Proporcion. Prop. 2.	*Gr.*	*m.*	*Logarithmos.*
Como el radio	90.		C. L. 0.0000000.
al ſeno 2. del angulo D	28.	22.	9.9444457.
aſsi la tang. 2. del lado DG	67.	51	9.6096742.
à la tang. 2. de la hipot. DF	70.	18.	9.5541199.

Demonſtr. (*fig.* 37.) En los triangulos AGB, AFE, ſon proporcionales (2.) como el ſeno del quadrante AB, que es el radio, al ſeno 1. de AE, que lo es ſegundo de EB, ù del angulo D; aſsi la tangente 1. de BG, que lo es ſegunda de DG, à la tangente 1. de EF, que lo es ſegunda de la hipotenuſa FD.

PROP. XIX. Problema.

Modo de reſolver los triangulos quadrantales.

T*Riangulos quadrantales*, como en otra parte dixe, ſon aquellos que tienen un lado quadrante de 90. grados, y no ſon rectangulos. El modo de reſolver eſtos triangulos, es, mudar los lados en angulos, y los angulos en lados, con que queda formado otro triangulo, que es rectangulo, el qual reſuelto, queda reſuelto el primero; y como dicho ſegundo triangulo ſea rectangulo, ſe reſolverà por aquel problema de los ſobredichos, à quien perteneciere.

La razon de eſto es, porque como demonſtrè en la *prop.* 25. del lib. antecedente, en los polos de qualquiera triangulo eſferico, ſe forma otro, cuyos angulos ſon complemento de los lados del primero al ſemicirculo; y los lados, de los angulos: luego teniendo el triangulo quadrantal un lado de 90. grados, el triangulo formado en ſus polos tendrà un angulo recto; y por conſiguiente ſerà rectangulo: y como los complementos al ſemicirculo tengan los miſmos ſenos, y tangentes que los arcos de quien ſon complementos, baſtarà convertir los lados en angulos, y los angulos en lados: y aunque eſto es bien claro, para mayor facilidad propongo el exemplo ſiguiente.

Sea dado el triangulo AEB, (*fig.* 47.) en quien ſe suponen

nen conocidos el lado EB, 55.gr. 54.min. el lado BA, 53.gr. 48.m. y el lado, ò baſa EA ſea quadrante 90. gr. Pideſe el angulo A, opueſto al lado mayor EB. *Operacion.* Convierto los lados en angulos, y ſupongo que dados los tres angulos buſco el lado mayor; y procediendo por la *propoſ.* 11. diſpongo la proporcion en la forma ſiguiente, uſando del nombre de *lados*, donde alli deciamos *angulos*; y del nombre de *angulos*, donde alli deciamos *lados*.

Proporcion.	*Gr.*	*m.*	*Logarithmos.*
Como el ſeno 1. de BA lado cont.	53.	48.	C.L.0.0931478.
al ſeno 2. de BE lado opueſto;	55.	54.	9.7486833.
aſsi el radio,	90.	0.	10.0000000.
al ſeno 2. del angulo A.	46.	0.	9.8418311.

LIBRO VI.

DE LA RESOLUCION DE los triangulos esfericos obliquangulos.

LA mayor parte de los triangulos eſfericos obliquangulos ſe reſuelve, reduciendo el triangulo dado à dos triangulos rectangulos, lo que ſe hace tirando de ſu vertice el *perpendiculo* à la baſa, el qual no es otra coſa que un arco de circulo maximo, que deſciende del vertice perpendicularmente ſobre la baſa del triangulo. Demonſtrarè en los dos primeros capitulos de eſte libro los Theoremas principales en que ſe funda la reſolucion de dichos triangulos, que ſe explicarà deſpues en el tercero.

CAPITULO I.

THEOREMAS FUNDAMENTALES PARA LA RESOLUCION de los triangulos esfericos obliquangulos, quando se dan conocidos dos angulos, y un lado; ò dos lados, y un angulo.

PROP. I. Theorema.

En qualquiera triangulo esferico, los senos de los lados son proporcionales con los senos de los angulos opuestos. (fig. 31.)

SEa el triangulo ABC. Digo, que el seno de el lado AB, al seno de el angulo opuesto C, tiene la misma razon que el seno de el lado AC, al seno del angulo opuesto B: cayga desde A, el perpendiculo AD, y continuense los lados BAQ, BCP, CAS, CBN, hasta el quadrante.

Demonstr. Los triangulos rectangulos CSN, CAD, tienen el angulo C comun, como tambien los triangulos rectangulos BQP, BAD, tienen el angulo B comun: luego (1. *lib.* 5. *Trigon.*) los senos de las hipotenusas, seràn proporcionales con los senos de los perpendiculos, como se sigue.

En los triangulos CSN, CAD.

Como el seno total, ù del quadrante CS, ò BQ su igual,
al seno de SN, ù del angulo C, à quien mide;
assi el seno del lado CA,
al seno del perpendiculo AD.

En los triangulos BQP, BAD.

Como el seno total, ù del quadrante BQ, ò CS su igual,
al seno de QP, ù del angulo B, à quien mide:
assi el seno del lado BA,
al seno del perpendiculo AD.

Y como (16. 6. Eucl.) en los proporcionales el rectangulo de los medios sea igual al de los extremos; y el rectangulo de los extremos sea el mismo en las dos proporciones sobredichas, por ser los extremos los mismos, seràn los dos rectangulos de los medios iguales entre sì: luego el rectangulo de los senos de SN, CA, es igual al rectangulo de los senos QP, BA: luego (14. 6. Eucl.) sus lados son reciprocamente proporcionales, como el seno de SN, al seno de QP; assi el seno de BA, al seno de CA; y alternando, como el seno de SN, que lo es del angulo C, al seno de BA, lado opuesto; assi el seno de QP, que lo es del angulo B, al seno de AC, lado opuesto.

PROP. II. Theorema.

En qualquiera triangulo esferico, si de uno de sus angulos cae el perpendiculo à la basa, harà con los lados dos angulos verticales, cuyos senos primeros seràn proporcionales con los senos segundos de los angulos sobre la basa. (fig. 31.)

EN el triangulo ABC, sea el perpendiculo AD, que forma los angulos verticales BAD, DAC, cuyas medidas son los arcos HG, GI; y los arcos QP, SN son las medidas de los angulos ABC, ACB sobre la basa; y sus complementos son los arcos PO, NM. Tambien si de los quadrantes iguales HO, GF, se quita el arco comun GO, quedarà OF igual à HG, medida del angulo vertical BAD, y assimismo, si de los quadrantes IM, GE se quita el arco comun GM, quedarà ME igual à IG medida del otro angulo vertical DAC. Esto supuesto,

Demonstr. Los triangulos ENM, FPO, tienen los angulos E, y F iguales, (4. *lib.* 4. *Trigon.*) y los angulos N, y P rectos: luego (1. 5. *Trigon.*) seràn proporcionales los senos de las hipotenusas con los senos de los perpendiculos.

Como el seno de EM, ò GI su igual, ù del angnlo CAD,
al seno de MN, que es segundo de NS, ù del angulo ACB;
assi el seno de FO, ò GH su igual, ù del angulo BAD,
al seno de OP, que lo es segundo de PQ, ù del angulo ABC.

PROP. III. Theorema.

En qualquiera triangulo son proporcionales los senos segundos de los angulos verticales, que forma el perpendiculo, con las tangentes segundas de los lados. (*fig.*31.)

EN el mismo triangulo ABC, es FI, complemento de IG, medida del angulo vertical CAD; y IC, es complemento de CA: assimismo es EH, complemento de HG, medida del angulo vertical BAD; y HB, es complemento del lado BA. Esto supuesto,

Demonstr. Los triangulos FIG, EHB, tienen los angulos E, y F, iguales; y los angulos H, I, rectos: luego (2.5.*Trig.*) son los senos de sus basas proporcionales con las tangentes de los perpendiculos.

Como el seno 1. de FI, que lo es segundo de IG, ù del angulo CAD,
à la tangente 1. de IC, que lo es segunda de CA;
assi el seno 1. de EH, que lo es segundo de HG, ù del angulo BAD,
à la tangente 1. de HB, que lo es segunda de BA.

PROP. IV. Theorema.

Los senos segundos de los lados son proporcionales con los senos segundos de los segmentos, que hace el perpendiculo en la basa. (*fig.*31.)

EN el mismo triangulo ABC, los segmentos que el perpendiculo AD hace en la basa, son BD, y CD, los quales siempre se han de contar desde cada angulo sobre la basa hasta el perpendiculo, aunque èste cayga fuera del triangulo. Tambien el arco EB, es complemento del segmento BD; y el arco HB, del lado BA; y assimismo FC, es complemento del segmento CD; y el arco IC, del lado CA.

Demonstr. Los triangulos EBH, FCI, tienen los angulos I, H, rectos, y los angulos F, y E iguales: (4.4.*Trigon.*) luego (1. 5. *Trigon.*) los senos de las hipotenusas son proporcionales con los senos de los perpendiculos.

Como el seno 1. de EB, que lo es segundo del segmento BD,
al seno 1. de BH, que lo es segundo del lado BA;
assi el seno 1. de FC, que lo es segundo del segmento CD,
al seno 1. de CI, que lo es segundo del lado CA.

PROP. V. Theorema.

Los senos primeros de dichos segmentos de la basa, son proporcionales con las tangentes segundas de los angulos sobre la basa conterminos à los segmentos. (*fig.*31.)

EN el mismo triangulo ABC, si de los quadrantes iguales BP, DF, se quita el segmento comun DP, queda EP, igual al segmento BD; y si de los quadrantes CN, DE, se quita el segmento comun DN, queda el arco EN, igual al segmento DC. A mas de esto, el arco PO, es complemento del arco QP, medida del angulo B; y MN, es complemento de NS, medida del angulo C, lo qual supuesto,

Demonstr. En los triangulos ENM, FPO, los angulos N, y P, son rectos; y E, F, iguales: luego (2.5.*Trigon.*) los senos de las basas son proporcionales con las tangentes de los perpendiculos; y serà

Como el seno 1. de FP, ù del segmento BD, su igual,
à la tangente 1. de PO, que lo es segunda de QP, ù del angulo B;
assi el seno 1. de EN, ù del segmento DC, su igual,
à la tangente 1. de NM, que lo es segunda del arco AB, ù del angulo C.

PROP. VI. Theorema.

Las tangentes de los angulos verticales son proporcionales con las tangentes de los segmentos de la basa. (*fig.*31.)

EN el mismo triangulo ABC. Digo, que son proporcionales la tangente del angulo BAD, à la tangente del seg-

ſegmento BD ; como la tangente del angulo CAD , à la tangente del ſegmento DC.

Demonſtr. Los triangulos HAG , BAD ſon rectangulos en G , y D, y tienen el angulo BAD comun ; y aſsimiſmo los triangulos GAI , DAC ſon rectangulos en G, y D, y tienen el angulo GAI comun : luego (1.5. *Trigon.*) la tangente de GH à la tangente de DB tiene la razon miſma que el ſeno de AG, al ſeno de AD: la tangente de GI à la tangente de DC tiene tambien la miſma razon que el ſeno de AG al ſeno de AD: luego la miſma razon tiene la tangente de HG à la tangente de BD, que la tangente de GI à la tangente de DC : luego

Como la tangente de HG , ù del angulo BAD,
à la tangente de BD , ſegmento de la baſa;
aſsi la tangente de GI , ù del angulo DAC,
à la tangente de DC ſegmento de la baſa.

CAPITULO II.

THEOREMAS FUNDAMENTALES PARA LA RESOLUCION de los triangulos esfericos obliquangulos , en que ſe dan conocidos ſus tres lados , ò ſus tres angulos.

PROP. VII. Theorema.

En qualeſquiera dos arcos , aſsi ſe ha el ſeno total , al ſeno de la ſemiſuma de dichos arcos ; como el ſeno de la ſemidiferencia de los miſmos arcos à la ſemidiferencia de ſus ſenos verſos. (*fig.* 48.)

EXplicacion. Sean los dos arcos AB , BC ; y todo el arco ABC ſerà ſu ſuma : tireſe la cuerda AC , y del centro L ſalga el radio LN perpendicular à AC ; y quedaràn aſsi la cuerda AC , como el arco ANC divididos en dos partes iguales en F , y N ; (3.3. Eucl.) conque AN ſerà la ſemiſuma de los arcos *AB* , *BC* ; y *AF* , el ſeno de dicha ſemiſuma : tomeſe el arco *BG*, igual à *BA* , y ſerà *CG* , la diferencia de los arcos *AB*, *BC* ; ò *BG*, *BC* ; y tirando la cuerda *AG*, quedarà èſta dividida en dos partes iguales en *D* , por el radio *LB*, que le es perpendicular por ſer los arcos *AB*, *BG*, iguales , conque ſerà *DB* , ſeno verſo del arco *AB* ; y tirada *CE* perpendicular al radio *LB* , ſerà *EB* , ſeno verſo del arco *BC*; y *ED*, ò *CM* ſu paralela, è igual , ſerà la diferencia de los ſenos verſos *DB* , *EB* : dividaſe por medio en *H* la recta *CG*; que es cuerda de la diferencia *CG*; y ſerà *CH*, ſeno de la ſemidiferencia, ò mitad del arco *CG*, y junteſe la linea *FH*. Digo pues, que aſsi ſe ha *LA* , radio à *AF* , ſeno de la ſemiſuma de los arcos *AB*, *BC*, como *CH*, ſeno de la ſemidiferencia de los miſmos, à CI, que es ſemidiferencia de ſus ſenos verſos.

Demonſtr. En los triangulos CFH , CAG , aſsi ſe ha CF à CA, como CH à CG; porque aſsi como CF es mitad de CA, aſsi CH es mitad de CG: luego (2.6. Eucl.) FH, AG ſon paralelas: luego (27.1. Eucl.) los angulos M, I, ſon rectos iguales, como tambien ſon iguales los angulos CHI , CGM : luego los triangulos CIH, CMG, ſon equiangulos: luego (4.6. Eucl.) aſsi como CH, es mitad de CG, es CI mitad de CM; es pues CI , ſemidiferencia de los ſenos verſos. Eſto ſupueſto , los triangulos AFL, CIH, ſon equiangulos, porque los angulos F, I, ſon rectos ; y el angulo ALN, es de tantos grados como el arco AN, por formarſe en el centro L ; y el angulo AGC, por formarſe en la circunferencia , es de tantos grados como la mitad del arco AC, que es tambien AN: (20.3. Eucl.) luego el angulo ALF, es igual al angulo AGC; y ſiendo èſte, como dixe, igual al angulo IHC , es tambien el angulo ALF, igual al IHC : luego los triangulos AFL, CIH , ſon equiangulos : luego (4.6. Eucl.) ſon ſus lados proporcionales.

Como AL radio,
à AF, ſeno de la ſemiſuma de los arcos *AB*, *BC*;
aſsi CH, ſeno de la ſemidiferencia CT de dichos arcos,
à CI , ſemidiferencia de los ſenos verſos DB , EB de los miſmos.

CO-