ſegmento BD ; como la tangente del angulo CAD , à la tangente del ſegmento DC.

Demonſtr. Los triangulos HAG , BAD ſon rectangulos en G , y D, y tienen el angulo BAD comun ; y aſsimiſmo los triangulos GAI, DAC ſon rectangulos en G, y D, y tienen el angulo GAI comun : luego (1.5. *Trigon.*) la tangente de GH à la tangente de DB tiene la razon miſma que el ſeno de AG, al ſeno de AD: la tangente de GI à la tangente de DC tiene tambien la miſma razon que el ſeno de AG al ſeno de AD: luego la miſma razon tiene la tangente de HG à la tangente de BD, que la tangente de GI à la tangente de DC : luego

Como la tangente de HG , ù del angulo BAD,
à la tangente de BD , ſegmento de la baſa;
aſsi la tangente de GI , ù del angulo DAC,
à la tangente de DC ſegmento de la baſa.

CAPITULO II.

THEOREMAS FUNDAMENTALES PARA LA RESOLUCION de los triangulos esfericos obliquangulos , en que ſe dan conocidos ſus tres lados , ò ſus tres angulos.

PROP. VII. Theorema.

En qualeſquiera dos arcos , aſsi ſe ha el ſeno total , al ſeno de la ſemiſuma de dichos arcos ; como el ſeno de la ſemidiferencia de los miſmos arcos à la ſemidiferencia de ſus ſenos verſos. (fig.48.)

E*Xplicacion.* Sean los dos arcos AB , BC ; y todo el arco ABC ſerà ſu ſuma : tireſe la cuerda AC , y del centro L ſalga el radio LN perpendicular à AC ; y quedaràn aſsi la cuerda AC , como el arco ANC divididos en dos partes iguales en F , y N ; (3.3. Eucl.) conque AN ſerà la ſemiſuma de los arcos *AB* , *BC* ; y *AF* , el ſeno de dicha ſemiſuma : tomeſe el arco *BG*, igual à *BA* , y ſerà *CG* , la diferencia de los arcos *AB*, *BC* ; ò *BG*, *BC* ; y tirando la cuerda *AG*, quedarà èſta dividida en dos partes iguales en *D* , por el radio *LB*, que le es perpendicular por ſer los arcos *AB*, *BG*, iguales , conque ſerà *DB* , ſeno verſo del arco *AB* ; y tirada *CE* perpendicular al radio *LB* , ſerà *EB* , ſeno verſo del arco *BC*; y *ED*, ò *CM* ſu paralela, è igual , ſerà la diferencia de los ſenos verſos *DB* , *EB* : divídaſe por medio en *H* la recta *CG*; que es cuerda de la diferencia *CG*; y ſerà *CH*, ſeno de la ſemidiferencia, ò mitad del arco *CG*, y junteſe la linea *FH*. Digo pues, que aſsi ſe ha *LA* , radio à *AF* , ſeno de la ſemiſuma de los arcos *AB*, *BC*, como *CH*, ſeno de la ſemidiferencia de los miſmos, à CI, que es ſemidiferencia de ſus ſenos verſos.

Demonſtr. En los triangulos CFH , CAG , aſsi ſe ha CF à CA, como CH à CG; porque aſsi como CF es mitad de CA, aſsi CH es mitad de CG: luego (2.6. Eucl.) FH, AG ſon paralelas: luego (27.1. Eucl.) los angulos M, I, ſon rectos iguales, como tambien ſon iguales los angulos CHI , CGM : luego los triangulos CIH, CMG, ſon equiangulos: luego (4.6. Eucl.) aſsi como CH, es mitad de CG, es CI mitad de CM; es pues CI , ſemidiferencia de los ſenos verſos. Eſto ſupueſto , los triangulos AFL, CIH, ſon equiangulos, porque los angulos F, I, ſon rectos ; y el angulo ALN, es de tantos grados como el arco AN, por formarſe en el centro L ; y el angulo AGC, por formarſe en la circunferencia , es de tantos grados como la mitad del arco AC, que es tambien AN: (20.3. Eucl.) luego el angulo ALF, es igual al angulo AGC; y ſiendo èſte, como dixe , igual al angulo IHC , es tambien el angulo ALF, igual al IHC : luego los triangulos AFL, CIH , ſon equiangulos : luego (4.6. Eucl.) ſon ſus lados proporcionales.

Como AL radio,
à AF, ſeno de la ſemiſuma de los arcos *AB*, *BC*;
aſsi CH, ſeno de la ſemidiferencia CT de dichos arcos,
à CI , ſemidiferencia de los ſenos verſos DB , EB de los miſmos.

CO-

COROLARIOS.

1 *En qualquiera triangulo inscrito en el circulo, son las mitades de sus lados medios proporcionales entre el radio, y la mitad del perpendiculo: como en el triangulo ACG; assi se ha el radio AL à AF, ò FC, mitad del lado AC: como CH, mitad del lado CG, à CI, mitad del perpendiculo CM. Consta de lo demonstrado.*

2 *Assi se ha el quadrado del radio, al rectangulo hecho del seno recto de la semisuma de dos arcos, y del seno recto de la semidiferencia de los mismos; como el diametro à la diferencia de los senos versos de los mismos arcos.*

Demonstr. Siendo, como queda demonstrado, el radio al seno de la semisuma de dos arcos, como el seno de la semidiferencia de los mismos arcos, à la semidiferencia de sus senos versos: serà (16.6.Eucl.) el rectangulo hecho del radio, y de la semidiferencia de los senos versos, que son los extremos, igual al rectangulo hecho de la semisuma, y semidiferencia de los arcos, que son los medios; y porque el quadrado del radio, al rectangulo, cuya altura es el radio, y su basa la semidiferencia de los senos versos, se ha como el radio à dicha semidiferencia, ò como todo el diametro à toda la dicha diferencia, serà el quadrado del radio al rectangulo hecho de los senos de la suma, y semidiferencia de los arcos, como el diametro à la diferencia de los senos versos de los mismos arcos.

PROP. VIII. Theorema.

En qualquiera triangulo esferico son proporcionales.
El rectangulo hecho de los senos de los lados,
al quadrado del radio;
como la diferencia de los senos versos de la basa, y diferencia de los lados,
al seno verso del angulo vertical. (fig. 49.)

E*Xplicacion, y preparacion.* La mayor dificultad de estos Theoremas consiste en la disposicion de las figuras, que no pueden bastantemente expressar sus terminos por caer unas lineas en la superficie de la esfera, y otras dentro. Para mayor claridad, las que se han de considerar dentro, vàn notadas con puntos; y las que en la superficie, con lineas seguidas.

Sea pues el triangulo esferico ACB, cuya basa supongo ser CB, y su angulo vertical A. Desde B, como Polo, con la distancia BC, descrivase el circulo DCY, y seràn assi BD, como BY, iguales à BC; y desde A, como Polo, con la distancia AC, descrivase el circulo menor ECM, paralelo al maximo NGO, y serà AM igual al lado AC; y por consiguiente serà BM, diferencia de los lados AC, AB; y la MR perpendicular al radio XB, serà el seno recto de dicha diferencia, y su seno verso serà RB. Tirese el diametro DY, del circulo DCY; y porque el plano de este circulo es perpendicular al plano ANY, serà su exe BX perpendicular al plano de DCY; y por consiguiente (*defin.* 3. *lib.* 11. Eucl.) serà CL perpendicular al radio XB, y seno recto de la basa CB; y LB, seno verso de la misma basa: conque LR, serà la diferencia de los senos versos LB, RB; y tirada BV, perpendicular al radio AX, serà seno recto del lado AB; y MI, tambien perpendicular à AX, serà seno recto del lado AM, ù de AC su igual; y continuando el arco *AC*, hasta perficionar todo el quadrante AG, se considerarà la GP, perpendicular al diametro NO, y serà seno recto del arco GO; esto es, del angulo vertical *CAB*, à quien mide; y por consiguiente serà PO, seno verso del mismo arco GO, y de dicho angulo vertical *CAB*: y porque el plano, assi del circulo paralelo *ECM*, como del otro circulo *DCY*, son perpendiculares al plano del circulo maximo ANY, serà su comun seccion *CZ* (19. 11. Eucl.) perpendicular à dicho plano; y por consiguiente al diametro EM; conque ZM, en este diametro es seno verso del mismo angulo *CAB*, como lo es el seno verso PO, en el diametro NO, quedando semejantemente cortadas NO, EM en P, y Z, por el paralelismo de los planos *NGO*, *ECM*.

Demonstr. Por ser VB, IT paralelas, los triangulos VXB, IXT, son semejantes; (2.6.Eucl.) y tambien lo son por la misma razon ZMK, ZTL. Assimismo, los triangulos XIT, ZLT,

COROLARIOS.

1 *En qualquiera triangulo inscrito en el circulo, son las mitades de sus lados medios proporcionales entre el radio, y la mitad del perpendiculo: como en el triangulo ACG; assi se ha el radio AL à AF, ò FC, mitad del lado AC: como CH, mitad del lado CG, à CI, mitad del perpendiculo CM. Consta de lo demonstrado.*

2 *Assi se ha el quadrado del radio, al rectangulo hecho del seno recto de la semisuma de dos arcos, y del seno recto de la semidiferencia de los mismos; como el diametro à la diferencia de los senos versos de los mismos arcos.*

Demonstr. Siendo, como queda demonstrado, el radio al seno de la semisuma de dos arcos, como el seno de la semidiferencia de los mismos arcos, à la semidiferencia de sus senos versos: serà (16.6.Eucl.) el rectangulo hecho del radio, y de la semidiferencia de los senos versos, que son los extremos, igual al rectangulo hecho de la semisuma, y semidiferencia de los arcos, que son los medios; y porque el quadrado del radio, al rectangulo, cuya altura es el radio, y su basa la semidiferencia de los senos versos, se ha como el radio à dicha semidiferencia, ò como todo el diametro à toda la dicha diferencia, serà el quadrado del radio al rectangulo hecho de los senos de la suma, y semidiferencia de los arcos, como el diametro à la diferencia de los senos versos de los mismos arcos.

PROP. VIII. Theorema.

En qualquiera triangulo esferico son proporcionales.
El rectangulo hecho de los senos de los lados,
al quadrado del radio;
como la diferencia de los senos versos de la basa, y diferencia de los lados,
al seno verso del angulo vertical. (*fig.* 49.)

Explicacion, y preparacion. La mayor dificultad de estos Theoremas consiste en la disposicion de las figuras, que no pueden bastantemente expressar sus terminos por caer unas lineas en la superficie de la esfera, y otras dentro. Para mayor claridad, las que se han de considerar dentro, vàn notadas con puntos; y las que en la superficie, con lineas seguidas.

Sea pues el triangulo esferico ACB, cuya basa supongo ser CB, y su angulo vertical A. Desde B, como Polo, con la distancia BC, descrivase el circulo DCY, y seràn assi BD, como BY, iguales à BC; y desde A, como Polo, con la distancia AC, descrivase el circulo menor ECM, paralelo al maximo NGO, y serà AM igual al lado AC; y por consiguiente serà BM, diferencia de los lados AC, AB; y la MR perpendicular al radio XB, serà el seno recto de dicha diferencia, y su seno verso serà RB. Tirese el diametro DY, del circulo DCY; y porque el plano de este circulo es perpendicular al plano ANY, serà su exe BX perpendicular al plano de DCY; y por consiguiente (*defin.* 3. *lib.* 11. Eucl.) serà CL perpendicular al radio XB, y seno recto de la basa CB; y LB, seno verso de la misma basa: conque LR, serà la diferencia de los senos versos LB, RB; y tirada BV, perpendicular al radio AX, serà seno recto del lado AB; y MI, tambien perpendicular à AX, serà seno recto del lado AM, ù de AC su igual; y continuando el arco *AC*, hasta perficionar todo el quadrante AG, se considerarà la GP, perpendicular al diametro NO, y serà seno recto del arco GO; esto es, del angulo vertical *CAB*, à quien mide; y por consiguiente serà PO, seno verso del mismo arco GO, y de dicho angulo vertical *CAB*: y porque el plano, assi del circulo paralelo *ECM*, como del otro circulo *DCY*, son perpendiculares al plano del circulo maximo ANY, serà su comun seccion CZ (19. 11. Eucl.) perpendicular à dicho plano; y por consiguiente al diametro EM; conque ZM, en este diametro es seno verso del mismo angulo *CAB*, como lo es el seno verso PO, en el diametro NO, quedando semejantemente cortadas NO, EM en P, y Z, por el paralelismo de los planos *NGO*, *ECM*.

Demonstr. Por ser VB, IT paralelas, los triangulos VXB, IXT, son semejantes; (2.6.Eucl.) y tambien lo son por la misma razon ZMK, ZTL. Assimismo, los triangulos XIT, ZLT,

ZLT, porque tienen el angulo T comun; y los angulos L, I, rectos, son equiangulos: luego (4.6.Euc.) son semejantes: luego (21.6.Euc.) los quatro triangulos VXB, IXT, ZTL, ZMK, son semejantes: luego sus lados son proporcionales. Comparando pues los triangulos ZMK, y VXB, serà como MK à MZ; assi BV à BX; y porque las cuerdas, y senos de un mismo angulo en circulos diferentes tienen una misma razon con el radio, serà el seno verso MZ, al seno verso OP, como el radio MI, al radio OX, son pues proporcionales.

MK à MZ, como BV à BX.
MZ à OP, como MI à OX.

Y porque (32.6.Euc.) los rectangulos hechos de lados proporcionales, son tambien entre sì proporcionales, serà

El rectangulo hecho de MK, MZ,
al rectangulo hecho de MZ, OP;
como el rectangulo hecho de BV, MI,
al rectangulo hecho de BX, OX.

Y como los rectangulos hechos de MK, MZ, y de MZ, OP, tengan una misma altura MZ; tendràn entre sì la misma razon que sus basas MK, OP: luego el rectangulo hecho de MK, MZ, al hecho de MZ, OP, serà como MK à OP; y haviendo la misma proporcion entre el rectangulo hecho de MK, MZ, y el hecho de MZ, OP, que hay entre el rectangulo hecho de BV, MI, y el hecho de BX, OX, serà el rectangulo de BV, MI, al rectangulo de BX, OX, como MK, à OP; pero el rectangulo de BX, OX, es quadrado hecho de los radios iguales: luego serà

Como el rectangulo hecho de BV, MI, senos de los lados AB, y AM, ò AC,
al quadrado del radio OX;
assi MK, diferencia de los senos versos de la basa CB, y de BM, diferencia de los lados,
à OP, seno verso del angulo vertical CAB.

PROP.

PROP. IX. Theorema.

En qualquiera triangulo esferico son proporcionales:
Como el rectangulo hecho de los senos de los lados, que comprehenden el angulo,
al quadrado del radio;
assi el rectangulo hecho del seno de la semisuma de la basa, y diferencia de los lados, y del seno de la semidiferencia que hay entre la basa, y la diferencia de los lados,
al quadrado del seno de la mitad del angulo vertical. (*fig.* 50.)

E*xplicacion, y preparacion.* Sea el triangulo ABC; y tomando como antes BD, BY iguales à la basa BC, y cortando AM igual al lado AC, serà BM diferencia de los lados AC, AB; y siendo BD igual à la basa BC, serà el arco DBM suma de la basa, y de la diferencia de los lados; y dividiendo al arco DBM por medio en E, serà DE la semisuma de la basa, y de la diferencia de los lados; y el seno recto de dicha semisuma serà DQ: y siendo BY igual à la basa BC, serà MY diferencia de la basa, y de la diferencia BM de los lados; y MZ serà seno recto de la semidiferencia.

Considerese aora el plano del semicirculo NGO, perpendicular al plano del semicirculo NEO, y el arco GO serà la medida del angulo vertical CAB, y la perpendicular GP serà su seno recto, y PO su seno verso, y la recta GO es cuerda del arco GO; y por consiguiente, su mitad SO serà el seno recto de la mitad de dicho arco GO, y de la mitad del angulo vertical CAB; y tirada SF perpendicular al radio XO, serà FO mitad de PO, assi como SO es mitad de GO. (2.6.Euc.) Esto supuesto, digo, que *el rectangulo hecho de BV, MT, senos de los lados AB, AM, al quadrado del radio, es como el rectangulo hecho de MQ, MZ, senos, el uno de la semisuma de la basa, y diferencia de los lados; y el otro, seno de la semidiferencia que hay entre la basa, y la diferencia de los lados, al quadrado de SO, seno del semiangulo vertical CAB.*

Demonstr. La misma razon hay de MK à OP, que de MH à OF, que son sus mitades; y siendo el rectangulo hecho

cho de MH, OX, al hecho de OF, OX, por tener una misma altura OX, como la basa MH, à la basa OF, (16.Eucl.) tendràn estos rectangulos la razon que hay de MK à OP: y teniendo (por la antec.) el rectangulo hecho de BV, MT, y el hecho de BX, OX, la misma razon de MK à OP, seràn los quatro rectangulos proporcionales, como se sigue.

Como el rectangulo de BV, MT,
al rectangulo, ò quadrado de BX, OX;
assi el rectangulo de MH, OX,
al rectangulo hecho de OF, OX.

A mas de esto, porque MQ, MZ, senos, aquel de la semisuma, y èste de la semidiferencia de los lados, son (7.) medios proporcionales entre el radio OX, y MH, semidiferencia de los senos versos de los mismos arcos, serà (16.6. Eucl.) el rectangulo hecho de MQ, MZ, igual al rectangulo hecho de MH, OX. Tambien en el triangulo XSO, por ser el angulo XSO recto, (3.3.Eucl.) aunque la figura no le represente recto, es OS, media proporcional entre OF, OX; (8.6. Eucl.) y por consiguiente, el quadrado de OS, es igual al rectangulo hecho de OF, OX: luego si en la proporcion antecedente, en lugar de los rectangulos de MH, OX, y de OF, OX, se subitituyen el rectangulo de MT, MZ, y el quadrado de OS, seràn tambien proporcionales.

Como el rectangulo de BV, MT, hecho de los senos de los lados AB, AM, *al quadrado del radio BX; assi el rectangulo hecho de MT, MZ;* de los quales, MT, es seno de la semisuma de la basa, y diferencia de los lados; y MZ, es seno de la semidiferencia que hay entre la basa, y la diferencia de los lados; *al quadrado de OS,* seno de la mitad del angulo vertical CAB.

PROP.

PROP. X. Theorema.

En qualquiera triangulo esferico son proporcionales:
Como el rectangulo hecho de los senos de los lados, que comprehenden el angulo vertical,
al quadrado del radio;
assi el rectangulo hecho de los senos da las diferencias, que hay entre los dichos lados, y la semisuma de los tres,
al quadrado del seno del semiangulo vertical. (*fig.* 51.)

E*xplicacion*, y *preparacion*. Sea el triangulo ABC, y sean BA, BC sus lados, y AC su basa. Digo, que si se suman sus tres lados, y de la mitad de esta suma se restan de por sì los lados BA, BC, para sacar sus diferencias de dicha semisuma, serà el *rectangulo hecho de los senos de los lados BA, BC, al quadrado del radio, como el rectangulo hecho de los senos de las diferencias halladas entre los lados BA, BC, y la semisuma de los tres lados, al quadrado del seno del semiangulo vertical ABD.* Haganse los arcos BD, BE, iguales al lado BC, y serà AD la diferencia de los dichos lados: tomese AF, igual à la basa AC, y añadase FH, igual al arco AD; y cortese FI, igual al lado BC; y ultimamente, dividase el arco FD, por medio en G.

Demonstr. El arco AH, se compone del arco AF, igual à la basa AC, y del arco FH, igual à AD, diferencia de los lados: conque dicho arco AH, es la suma de la basa, y de la diferencia de los lados; y por consiguiente AG, mitad de AH, serà la semisuma de la basa, y diferencia de los lados. Tambien el arco BAFI, se compone del arco BA, que es un lado del triangulo; del arco AF, que es igual à la basa AC; y del arco FI, igual al lado BC: luego dicho arco BAFI, es la suma de los tres lados: luego su mitad BG, ò GI, es la semisuma de los tres lados del triangulo: luego AG, (que diximos ser la semisuma de la basa, y diferencia de los lados) es tambien la diferencia del lado AB, de la semisuma BG de los tres. Assimismo GD, que es semidiferencia de la basa AF, y diferencia AD de los lados, es juntamente la diferencia de el lado BC, ò BD, de la semi-

semisuma BG de los tres lados. Esto supuesto,

Siendo por la proposicion anteced. el rectangulo hecho de los senos de los lados BA, BC, que comprehenden el angulo B, al quadrado del radio, como el rectangulo hecho de los senos, el uno de la semisuma de la basa, y diferencia de los lados; y el otro de la semidiferencia de la basa, y diferencia de los lados, al quadrado del seno de la mitad del angulo vertical ABC, seràn tambien proporcionales los siguientes.

Como el rectangulo hecho de los senos de los lados BA, BC, que incluyen el angulo B,
al quadrado del radio;
asi el rectangulo hecho de los senos de las diferencias, que hay entre los lados BA, BC, y la semisuma de los tres lados.
al quadrado del seno de la mitad del angulo vertical B.

CAPITULO III.

EN QUE SE RESUELVEN LOS TRIANGULOS ESFERICOS *obliquangulos.*

PAra proceder con mayor claridad, advierto, que las partes que se consideran en qualquier triangulo son seis; es à saber, tres angulos, y tres lados: entre cada dos lados hay un angulo, y entre cada dos angulos hay un lado: por lo qual aquellas partes del triangulo, que entre si contienen otra, se llamaràn *Alternas*; y las contenidas, *Intermedias*: y asi dos lados son partes alternas, porque tienen intermedio un angulo; y asimismo dos angulos son tambien partes alternas, porque tienen intermedio un lado. Esto supuesto, todos los problemas obliquangulos se reducen à tres especies: en la primera se dan conocidas tres partes alternas: en la segunda dos alternas, y una intermedia: en la tercera dos alternas, y una opuesta.

§. I.

§. I.

Resolucion de los triangulos esfericos obliquangulos, en que se dan tres partes alternas.

PROP. XI. Problema.

Dados los tres lados de un triangulo esferico, hallar qualquier angulo.

ESte problema, à quien muchos Autores llaman, *admirable*, se puede resolver de diferentes maneras: contentome con poner aqui la methodo de Adriano Ulac, que es la mas facil, remitiendo al Lector curioso al Padre Dechales, que en el *lib.* 6. de la *Trigonometria*, *prop.* 8. propone, y demuestra ocho modos diferentes de resolverle.

Sea pues dado el triangulo ABC, en el qual se dan sus tres lados: el lado AB es 55. gr. 30. min. el lado AC es 54. gr. 19. min. y el lado BC es 40. gr. 10. min. y se busca el angulo A.

Operacion. Sumense los tres lados: de la mitad de esta suma restese de por sì cada lado de los que comprehenden el angulo que se busca, y guardense las diferencias, ò residuos. Tomense los complementos logarithmicos de los senos de los sobredichos lados que comprehenden el angulo: tomense tambien los logarithmos de los senos de las dos diferencias halladas: sumense todos, y la mitad de la suma serà el logarithmo del seno de la mitad del angulo que se busca, como se ve executado en la disposicion siguiente. Advierto, que de la suma de los logarithmos no se quita el radio, como en otras ocasiones, por la razon que luego diremos.

Lado BC	40.	10.m.	
Lado AB	55.	30.m.	C.L.0.0840063.
Lado AC	54.	19.m.	C.L.0.0903085.
Suma de los 3. lad.	149.	59.m.	

Semi-