semisuma BG de los tres lados. Esto supuesto,

Siendo por la proposicion anteced. el rectangulo hecho de los senos de los lados BA, BC,que comprehenden el angulo B, al quadrado del radio, como el rectangulo hecho de los senos, el uno de la semisuma de la basa, y diferencia de los lados; y el otro de la semidiferencia de la basa,y diferencia de los lados, al quadrado del seno de la mitad del angulo vertical ABC, seràn tambien proporcionales los siguientes.

Como el rectangulo hecho de los senos de los lados BA, BC, que incluyen el angulo B,
al quadrado del radio;
assi el rectangulo hecho de los senos de las diferencias,que hay entre los lados BA, BC, y la semisuma de los tres lados.
al quadrado del seno de la mitad del angulo vertical B.

CAPITULO III.

EN QUE SE RESUELVEN LOS TRIANGULOS ESFERICOS obliquangulos.

PAra proceder con mayor claridad, advierto, que las partes que se consideran en qualquier triangulo son seis; es à saber, tres angulos, y tres lados: entre cada dos lados hay un angulo, y entre cada dos angulos hay un lado: por lo qual aquellas partes del triangulo, que entre si contienen otra, se llamaràn *Alternas*; y las contenidas, *Intermedias*: y assi dos lados son partes alternas, porque tienen intermedio un angulo; y assimismo dos angulos son tambien partes alternas, porque tienen intermedio un lado. Esto supuesto, todos los problemas obliquangulos se reducen à tres especies: en la primera se dan conocidas tres partes alternas: en la segunda dos alternas, y una intermedia: en la tercera dos alternas, y una opuesta.

§. I.

§. I.

Resolucion de los triangulos esfericos obliquangulos, en que se dan tres partes alternas.

PROP. XI. Problema.

Dados los tres lados de un triangulo esferico, hallar qualquier angulo.

ESte problema, à quien muchos Autores llaman, *admirable*, se puede resolver de diferentes maneras: contentome con poner aqui la methodo de Adriano Ulac, que es la mas facil, remitiendo al Lector curioso al Padre Dechales, que en el *lib.* 6. de la *Trigonometria*, *prop.* 8. propone, y demuestra ocho modos diferentes de resolverle.

Sea pues dado el triangulo ABC, en el qual se dan sus tres lados: el lado AB es 55. gr. 30. min. el lado AC es 54. gr. 19. min. y el lado BC es 40.gr.10.min. y se busca el angulo A.

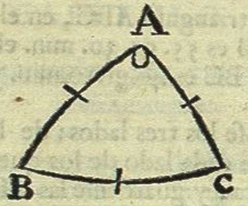
Operacion. Sumense los tres lados: de la mitad de esta suma restese de por sì cada lado de los que comprehenden el angulo que se busca, y guardense las diferencias, ò residuos. Tomense los complementos logarithmicos de los senos de los sobredichos lados que comprehenden el angulo: tomense tambien los logarithmos de los senos de las dos diferencias halladas: sumense todos, y la mitad de la suma serà el logarithmo del seno de la mitad del angulo que se busca, como se ve executado en la disposicion siguiente. Advierto, que de la suma de los logarithmos no se quita el radio,como en otras ocasiones, por la razon que luego diremos.

Lado BC	40.	10.m.	
Lado AB	55.	30.m.	C.L.0.0840063.
Lado AC	54.	19.m.	C.L.0.0903085.
Suma de los 3. lad.	149.	59.m.	

Semi-

Semisuma.	74.	59.m. $\frac{1}{2}$	
Difer. de AB	19.	29.m. $\frac{1}{2}$	9.5233168.
Difer. de AC	20.	40.m. $\frac{1}{2}$	9.5478566.
Snma de los logarithmos.			19.2454882.
Semisuma: seno de	24.	48.m. 13.s.	9.6227441.
angulo A.	49.	36.m. 26.s.	

El angulo de 24. gr. 49. m. y 13. segundos, es la mitad del angulo A, que se busca: conque su duplo 49. gr. 36.m. y 26. segundos, es el angulo A.

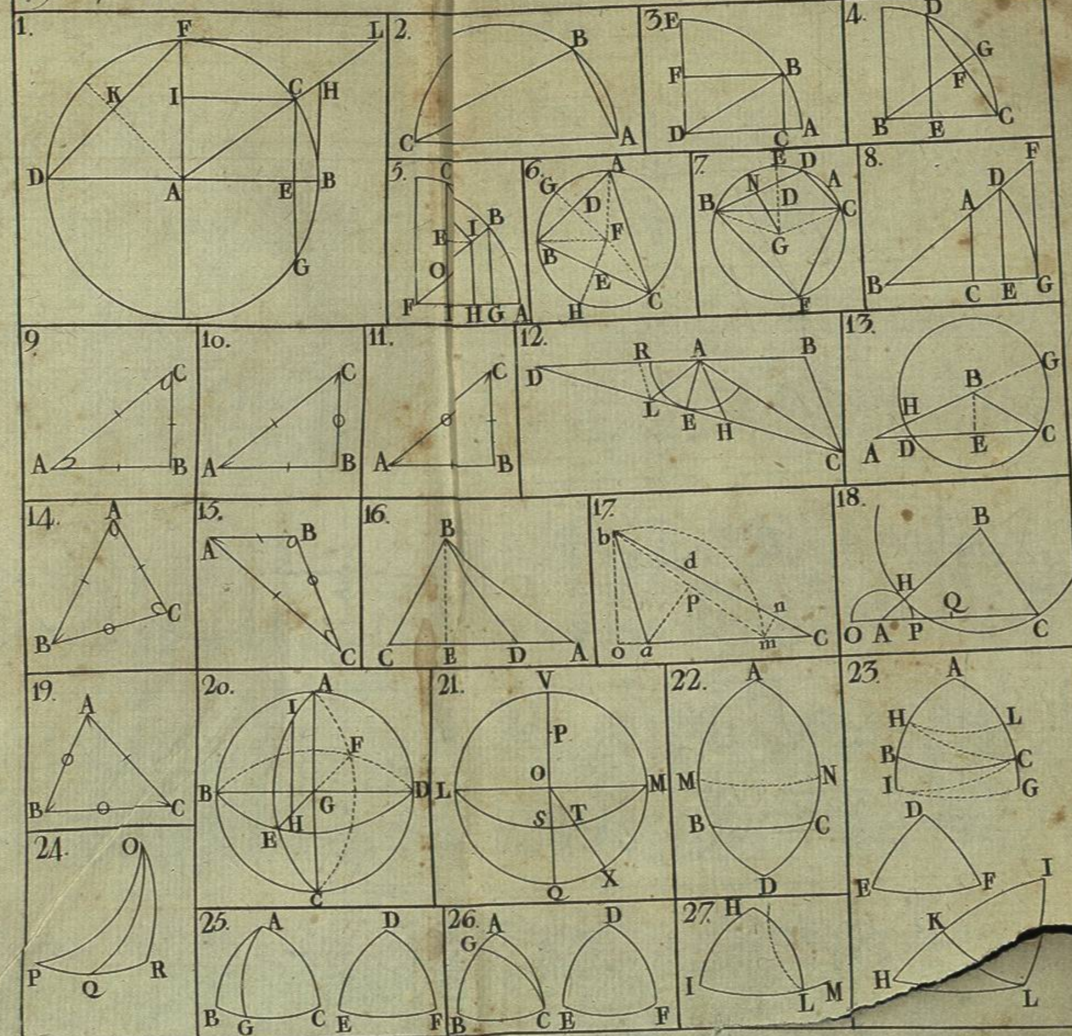


Demonstr. Por la *propos.* 10. son proporcionales: como el rectangulo hecho de los senos de los lados AB, AC, que comprehenden el angulo A, al quadrado del radio, assi el rectangulo hecho de los senos de las diferencias de dichos lados à la semisuma de los tres, al quadrado del seno del semiangulo vertical: el rectangulo de los senos de los lados AB, AC, se hace sumando los logarithmos de dichos lados; y el rectangulo de las sobredichas diferencias, se forma sumando sus logarithmos, como consta del Corol. de la *prop.* 5. del *lib.* 2. y el quadrado del radio, se halla duplicando su logarithmo (*Corol. de la prop. 6. lib. 2.*) Serà pues la disposicion de los proporcionales sobredichos la siguiente.

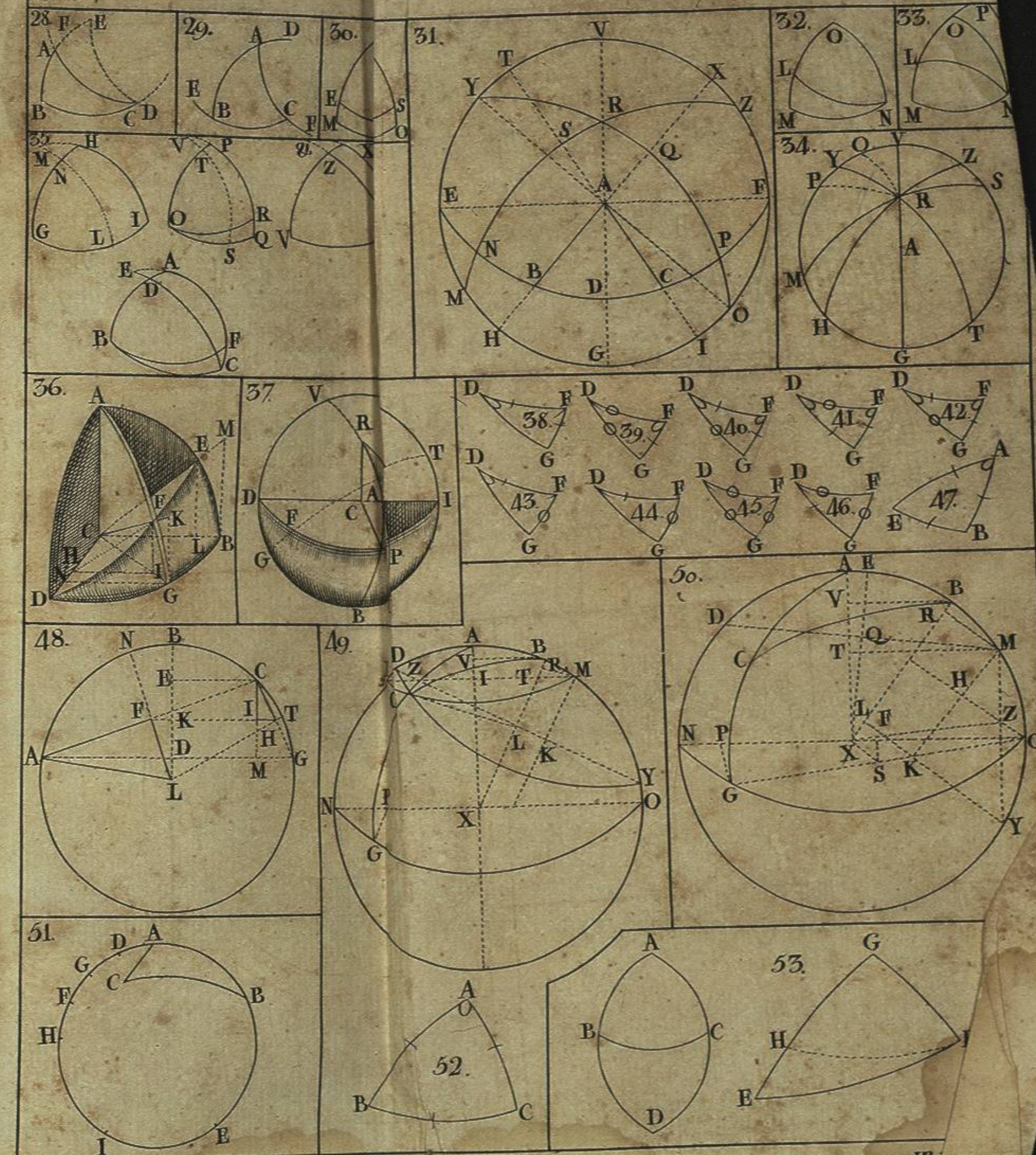
Como el rectang. de los senos de	AB 55. 30.m.	9.9159938.
	AC 54. 19.m.	9.9096915.
Al quad. del radio		2.0000000.

Assi

Estampa 1. Tom. 3.



H. Ricarte sculp.


28.
29.
30.
31.
32.
33.
34.
35.
36.
37.
38.
39.
40.
41.
42.
43.
44.
45.
46.
47.
48.
49.
50.
51.
52.
53.

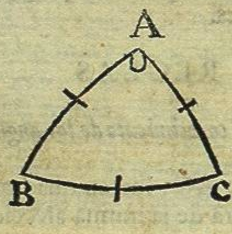
Aſsi el rectangul. de los ſenos de	Dif.AB 19.29.m. $\frac{1}{2}$	9.5233168.
	Dif.AC 20.40.m. $\frac{1}{2}$	9.5478566.
Al quadr. del ſeno del ſemiang. A	24.49.m. $\frac{1}{2}$	19.2454882.

Luego ſi ſe ſuman los Logarithmos tercero, quarto, y quinto; y de la ſuma ſe reſta la ſuma de los Logarithmos primero, y ſegundo, el reſiduo ſerà el Logarithmo del quadrado del ſeno de la mitad del angulo A: (32.*lib.*2.) luego ſi en lugar de los Logarithmos primero, y ſegundo, ſe toman ſus complementos Logarithmicos, la ſuma del 1. 2. 3. 4. 5. menos el duplo radio (por haverſe tomado dos complementos al radio) darà el Logarithmo del ſexto termino: luego no hay para que eſcrivir el tercero termino, que es el duplo radio; y por conſiguiente, baſtarà ſumar los complementos Logarithmicos de los lados con los Logarithmos de las diferencias; y la ſuma ſerà el Logarithmo de el quadrado del ſeno de la mitad del angulo A, que ſe buſca: luego la mitad de la ſuma, ſerà el Logarithmo de la raiz; eſto es, del ſeno de la mitad de dicho angulo, que es toda nueſtra practica.

PROP. XII. Problema.

En el triangulo eſferico, dados los tres angulos, hallar qualquier lado.

EN el miſmo triangulo ABC, ſuponganſe conocidos ſus tres angulos, y ſe buſca el lado BC.



Operacion. Tomese el complemento al semicirculo de qualquiera de los angulos conterminos al lado BC, que se busca; como por exemplo, tomese el complemento del angulo C; y haciendo cuenta que el angulo A, es lado; y el angulo B, otro lado; y el complemento sobredicho del angulo C, otro lado: hagase la misma operacion de la prop. passada, y quedarà hecha la resolucion.

Demonstracion. Por la *prop.* 24. *lib.* 4. en los polos de los arcos del triangulo ABC, se forma otro triangulo, cuyos dos lados son iguales à los angulos A, y B; y el tercer lado es igual al complemento del angulo C, al semicirculo; y los dos angulos de este segundo, son iguales à los lados AC, BC; y el tercer angulo es complemento de AB, al semicirculo: luego resolviendo por la antecedente este segundo triangulo, se sabrà el valor del lado BC.

§. II.

Resolucion de los triangulos esfericos obliquangulos, en que se dan dos partes alternas con una intermedia.

CAsi todos los problemas que se siguen, usan en sus resoluciones del perpendiculo, con el qual queda dividido el triangulo obliquangulo en dos triangulos rectangulos; y consiguientemente necessitan de dos operaciones, de las quales, la primera, sirve para hallar el segmento de la basa, ù del angulo vertical que corta el perpendiculo; y la segunda, concluye la operacion, hallando el lado, ò angulo que se busca; y para proceder con acierto, serà conveniente en algunos casos atender à las reglas siguientes, tocantes al conocimiento de los angulos, y disposicion del perpendiculo, conque se quitarà la perplexidad que puede ofrecerse algunas veces.

REGLAS

Para determinar el conocimiento de los angulos. (*fig.* 53.)

1 SI los lados AB, AC, fueren quadrantes, el angulo vertical A, serà de la misma afeccion, que la basa BC; esto es, si BC es quadrante, serà el angulo A recto; si BC es mayor que quadrante, serà obtuso; y si menor, agudo. La razon es, porque en este caso la basa BC es medida del angulo A.

2 Si los lados AB, AC no siendo quadrantes, fueren de una misma afeccion; esto es, ò los dos mayores, ò los dos menores que un quadrante, y la basa no fuere menor que el quadrante, el angulo vertical A serà obtuso.

Demonstr. Supongamos, que AB, AC (*fig.* 53.) son mayores que el quadrante, y la basa BC no sea menor que quadrante: luego (35.4.) los tres angulos son obtusos: luego A es obtuso. Supongamos aora, que los lados AB, AC son menores que quadrante: luego continuandose hasta que concurran en D, seràn BD, CD mayores que quadrante; y como BC no sea menor que quadrante, seràn los tres angulos del triangulo BDC obtusos: luego D es obtuso; y por consiguiente A, que es igual à D, tambien serà obtuso.

3 Si los lados de un triangulo fueren de diferente afeccion; esto es, el uno mayor, y el otro menor que el quadrante, y la basa no fuere mayor que quadrante, el angulo vertical serà agudo.

Demonstr. Supongamos, que el triangulo EFG sea rectangulo en F, y que sus lados FG, FE sean el uno mayor, y el otro menor que quadrante: luego (28. 4. *Caso* 5.) la basa, ò hipotenusa EG serà mayor que quadrante, y mucho mas si el angulo F fuere obtuso: luego para que no sea mayor que quadrante se havrà de acortar, como por exemplo hasta H, de que necessariamente resulta el HFG, menor que recto.

4 Si los lados fueren de una misma especie, y la basa menor que el quadrante, el angulo vertical puede ser recto: lo qual se averiguarà deste modo. Multipliquense entre sì los senos segundos de los lados, y el producto partase por el seno total, ò radio; y si lo que saliere fuere igual al seno segundo de la basa, serà el angulo vertical recto. La razon es, porque en el triangulo rectangulo assi se ha el seno total, ò radio al seno segundo de AB; como el seno segundo de BC, al seno segundo de AC, como consta