

de lo demonstrado en la *prop. 10.* y otras: luego si por la regla de tres sobredicha sale este seno segundo, será el angulo vertical recto, y el triangulo será rectangulo; pero de otra fuerte podrá ser agudo, o obtuso.

Con estas mismas reglas se podrá conocer en caso de duda, de que especie sea qualquiera de los demás angulos, suponiendo ser basa del triangulo, el lado opuesto al angulo que se examina.

## REGLAS

Para el perpendicularo.

**I** EN qualquiera triangulo, como por exemplo BAC, (fig. de la *prop. siguiente*) el perpendicularo AD siempre ha de caer de la extremidad de un lado conocido AB, sobre el otro BC: de tal fuerte, que ambos lados AB, BC, incluyan el angulo B conocido, para que así haya en el triangulo ADB, à mas del angulo recto D, dos cosas conocidas, es à saber, el lado AB, y el angulo B.

Notese, que en algunos problemas se hallará poderse echar el perpendicularo con las condiciones sobredichas, de dos maneras; y de qualquiera que use el Analista obrará bien; menos en dos, en que no tendrá esse arbitrio; y en estas advertiremos en su lugar, de que lado se haya de tirar el perpendicularo.

2 Si los angulos B, y C fueren de una misma especie, el perpendicularo cae dentro del triangulo; pero si fueren de diferente especie, cae fuera: queda demonstrado en la *prop. 30. lib. 4.* de fuerte, que si el angulo C fuere agudo, y B obtuso, el perpendicularo caerá fuera mas allá de B; y si B fuere el agudo, y C el obtuso, caerá fuera mas allá del angulo C. La especie de los angulos se averigua por las reglas antecedentes.

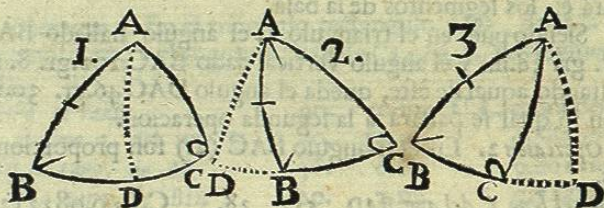
Para proceder con claridad en los problemas siguientes, notaré siempre el triangulo con las tres letras A, B, C, en esta forma, que la A siempre se pondrá en el angulo de quien se ha de echar el perpendicularo: la B en el angulo dado adyacente al lado conocido; y la C al tercer angulo; y ultimamente en el punto en que el perpendicularo corta la basa con angulos rectos, se pondrá siempre la letra D. Tambien para mayor claridad en cada problema se delinea-

nearà el triangulo en tres formas, segun las tres maneras en que puede caer el perpendicularo, ò dentro, ò fuera à la una parte, ò fuera à la otra.

## PROP. XIII. Problema.

En el triangulo esferico obliquangulo, dados dos angulos, y el lado intermedio, hallar el otro angulo.

**E**N el triangulo obliquangulo ABC, se suponen conocidos los angulos BAC 102.gr.8.min. y B 40.gr.12.m. y el lado intermedio AB 36.gr.0.min. y se busca el angulo ACB.



Operacion. 1. En el triangulo BAD, dada la hipotenusa AB, y el angulo B, se busca el angulo BAD por la *propof. 8. lib. 5.*

Como el seno todo	90.	o.m.	C.L.	0.0000000.
al seno 2. del lado AB:	36.	o.m.		9.9079576.
así la tang. del ang. B	40.	12.m.		9.9268904.
à la tang. 2. del ang. BAD	55.	38.m.		9.8348480.

**E**Ste angulo hallado BAD, se resta del angulo dado BAC en el triangulo 1. para saber el angulo DAC, por caer el perpendicularo dentro del triangulo: pero en el triangulo 2. el angulo BAD se suma con BAC, para saber el angulo DAC, por caer el perpendicularo fuera à la parte del angulo B: y en el triangulo 3. el angulo dado BAC se resta del hallado BAD, para tener el angulo CAD, por caer el perpendicularo fuera à la parte de C, como se ve claro en la figura. Sea pues

Regla general. 1. Quando el perpendicularo cae dentro del

del triangulo, el angulo hallado se resta siempre del angulo vertical conocido, como en el triangulo 1.

2 Quando el perpendicular cae fuera del triangulo, si el otro angulo dado B, fuere obtuso, como en el triangulo 2. se sumará el angulo hallado BAD con el angulo vertical dado BAC; pero si dicho angulo dado B fuere agudo, se restará el angulo vertical dado BAC, del angulo hallado BAD, como en el triangulo 3. Y obrando de esta suerte, se hará en qualquier caso de los referidos, el angulo DAC, de quien se necesita para la segunda operacion, que concluye la resolución del triangulo; y esto mismo se observará en los segmentos de la basa.

Siendo pues en el triangulo 1. el angulo hallado BAD 55. gr. 38.m. y el angulo vertical dado BAC 102.gr. 8. m. restando aquel de éste, queda el angulo DAC 46.gr. 30.m. con lo qual se pasará à la segunda operacion.

Operacion 2. En el triangulo BAC (2.) son proporcionales.

Como el seno 1. del ang. BAD	55.	38.	C.L. 0.0833134.
al seno 1. del ang. CAD;	46.	30.	9.8605622.
así el seno 2. del ang. B,	40.	12.	9.8829774.
al seno 2. del ang. ACD.	47.	51.	9.8268530.

Adviertase, que el angulo ACB, y el angulo ACD en el triangulo 1. y 2. es un mismo angulo; pero en el tercero es diferente: y así, habiendose hallado el angulo ACD, se ha de tomar su complemento à 180. grad. para tener el ACB que se busca.

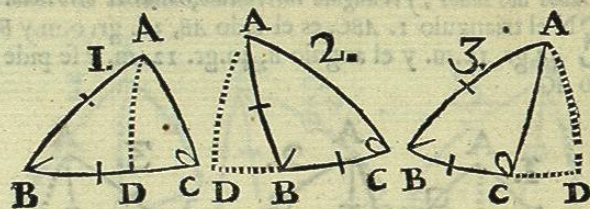
PROP. XIV. Problema.

En el triangulo esférico obliquangulo, dados dos lados, y el angulo intermedio, hallar qualquiera angulo.

EN este caso el perpendicular necesariamente deve caer del lado opuesto al angulo que se busca, tirandole de aquel angulo, que ni se busca, ni se supone conocido. Sea pues el triangulo 1. ABC, en el qual se suponen cono-

ci-

cidos los lados BA, 36.gr. 0. m. y BC, 44.gr. 12.m. y el angulo B, 40.gr. 12.m. y se pide el angulo C.



Operacion 1. En el triangulo rectangulo ABD, dada la hipotenusa AB, y el angulo B, hallese (14.lib. 5.) el segmento BD.

Como el radio	90.	0.m.	C.L. 0.000000.
al seno 2. del ang. B;	40.	12.m.	9.8829774.
así la tang. de AB	36.	0.m.	9.8612610.
à la tang. de BD.	29.	2.m.	9.7442384.

Hallado el segmento BD, queda conocido en qualquiera de los tres triangulos el arco, ó segmento CD: en el 1. restando BD de BC: en el 2. sumando BD, con BC: y en el 3. restando BC de BD. Restando pues en el triangulo 1. BD, 29. 2.m. de BC, 44. 12.m. es CD, 15. 10. m. con lo que se passa à la segunda operacion.

Operacion 2. En el triangulo BAC, (5.) son proporcionales.

Como el seno de BD	29.	2.m.	C.L. 0.3139733.
al seno de DC;	15.	10.m.	9.4176837.
así la tang. 2. de ABC	40.	12.m.	10.0731096.
à la tang. 2. de ACD.	57.	28.m.	9.8047666.

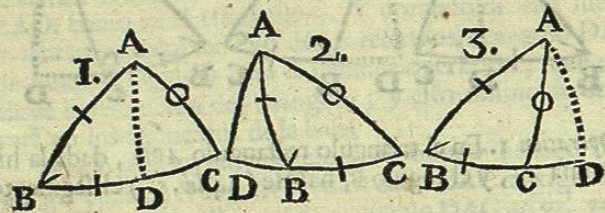
Adviertase, que el angulo ACD, y el ACB, en los triangulos 1. y 2. es uno mismo; pero en el tercero es menester tomar el complemento à 180.gr. del ACD hallado, para tener el ACB, que se busca.

PROP.

## PROP. XV. Problema.

Dados dos lados, y el angulo intermedio, hallar el otro lado.

EN el triangulo 1. ABC, es el lado AB, 36. gr. o.m. y BC, 44. gr. 12. m. y el angulo B, 40. gr. 12. m. y se pide el lado AC.



Operacion 1. En el triangulo rectangulo ABD, para hallar el segmento BD, son proporcionales como en la proposicion antecedente.

Como el radio	90.	o.m.	CL.0.000000.
al seno 2. del ang. B;	40.	12.m.	9.8829774.
así la tang. de AB	36.	o.m.	9.8612610.
à la tang. de BD.	29.	2.m.	9.7442384.

Hallado el segmento BD, queda sabido CD, como en la prop. passada, que será 15. gr. 10. m.

Operacion 2. En el triangulo BAC, (4.) son proporcionales.

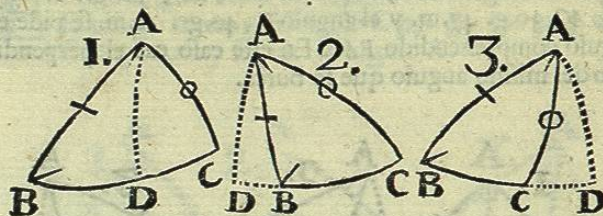
Como el seno 2. de BD	29.	2.m.	CL.0.0583209.
al seno 2. de CD;	15.	10.m.	9.9846033.
así el seno 2. de AB	36.	o.m.	9.9079576.
al seno 2. de AC.	26.	45.m.	9.9508818.

## PROP. XVI. Problema.

En el triangulo esferico obliquangulo, dados dos angulos, y el lado intermedio, hallar qualquiera de los lados opuestos.

Advierto, que en este caso, el perpendicular necesariamente ha de caer de aquel angulo dado, que es ad-

adyacente al lado que se busca. Sea pues el triangulo ABC, en quien sean dados el angulo A, 102. gr. 8. m. y el angulo B, 40. gr. 12. m. y el lado intermedio AB, 36. gr. o. m. y se busca el lado AC.



Operacion 1. En el triangulo rectangulo ABD, hallese como en la prop. 13. el angulo BAD.

Como el radio	90.	o.m.	C.L.0.000000.
al seno 2. de AB;	36.	o.m.	9.9079576.
así la tang. del ang. B	40.	12.m.	9.9268904.
à la tang. 2. del ang. BAD.	55.	38.m.	9.8348480.

Hallado el angulo BAD, se sabe como en la prop. 13. el angulo CAD, que en el triangulo 1. se halla ser 46. gr. 30. m.

Operacion 2. En el triangulo BAC, son (3.) proporcionales.

Como el seno 2. del ang. BAD	55.	38.m.	C.L.0.2483462.
al seno 2. del ang. CAD;	46.	30.m.	9.8378122.
así la tang. 2. de AB	36.	o.m.	10.1387390.
à la tang. 2. de AC.	30.	47.m.	10.2248974.

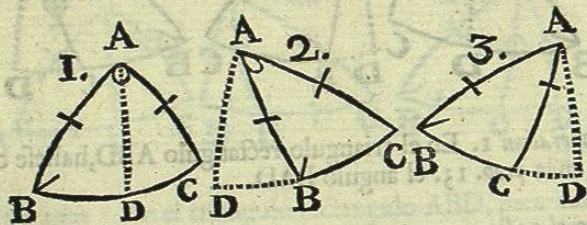
## §. III.

Resolucion de los triangulos esfericos obliquangulos, en que se dan dos partes alternas, y una opuesta.

PROP. XVII. Problema.

Dados dos lados, y un angulo opuesto, hallar el angulo intermedio.

EN el triangulo ABC, dados los lados AB, 36. gr. o. m. y AC, 30. gr. 47. m. y el angulo B, 40. gr. 12. m. se pide el angulo comprehendido BAC. En este caso cae el perpendicular del mismo angulo que se busca.



Operacion 1. En el triangulo rectangulo BAD, hallese el angulo BAD (8.) en la siguiente analogia.

Como el radio	90.	o.m.	C.L.o.0000000.
al seno 2. de AB;	36.	o.m.	9.9079576.
assi la tang. del ang. B	40.	12.m.	9.9268904.
à la tang.2. del ang. BAD.	55.	38.m.	9.8348480.

Operacion 2. En el triangulo ABC, son proporcionales. (3.)

Como la tang. 2. de AB	36.	o.m.	C.L. 9.8612610.
à la tang. 2. de AC;	30.	47.m.	10.2249538.
assi el seno 2. del ang. BAD	55.	38.m.	9.7516538.
al seno 2. del ang. CAD.	46.	30.m.	9.8378686.

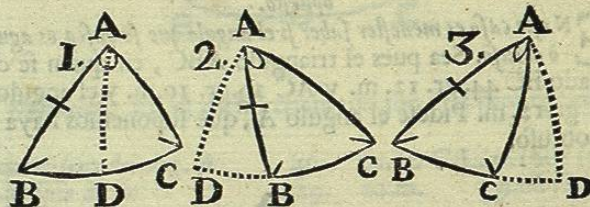
Sumense en el triangulo 1. los angulos BAD, CAD, hallados, por caer el perpendicular dentro, y la suma 102. gr. 8. m. serà el angulo BAC, que se pide. En los triangulos 2. y 3. por caer el perpendicular fuera, la diferencia de dichos angulos hallados, serà el BAC, que se busca.

PROP.

PROP. XVIII. Problema.

En el triangulo esferico obliquangulo dados dos angulos, y un lado opuesto, hallar el otro angulo

EN el triangulo ABC se suponen conocidos el angulo B 40. gr. 12. m. y el angulo C 47. gr. 51. m. y el lado AB 36. gr. o. m. y se pide el angulo A.



Adviertase lo 1. que se ha de saber si el angulo que se busca es agudo, ò obtuso; ò qual sea la especie del lado AC opuesto al angulo dado B. Lo 2. que en este caso cae el perpendicular del mismo angulo que se busca.

Operacion 1. En el triangulo rectangulo BAD, hallese (8.) el angulo BAD, como se sigue.

Como el radio	90.	o.m.	C.L.o.0000000.
al seno 2. de AB;	36.	o.m.	9.9079576.
assi la tang. del ang. B	40.	12.m.	9.9268904.
à la tang.2. del ang. BAD.	55.	38.m.	9.8348480.

Operacion 2. En el triangulo ABC (2.) son proporcionales.

Como el seno 2. del ang. B	40.	12.m.	C.L.o.1170226.
al seno 2. del ang. C;	47.	51.m.	9.8267703.
assi el seno 1. del ang. BAD	55.	38.m.	9.9166866.
al seno 1. del ang. CAD.	46.	29.m.	9.8604795.

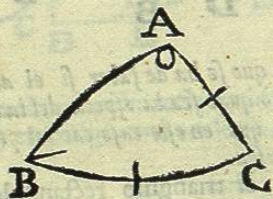
Si el perpendicular cae dentro del triangulo, sumense los angulos BAD, CAD, y la suma serà el angulo BAC, que se busca; pero si el perpendicular cae fuera, se restarà el an-

140 TRAT. VII. DE LA TRIGONOMETRIA.  
 angulo menor del mayor, y la diferencia hallada será el angulo que se pide; y así en el triangulo 1. por caer el perpendicular dentro, se suman los dos angulos hallados, y es el angulo BAC 102. gr. 7. m.

PROP. XIX. Problema.

Dados dos lados, y un angulo opuesto, hallar el otro angulo opuesto.

EN este caso es menester saber si el angulo que se busca es agudo, ò obtuso. Sea pues el triangulo ABC, en quien se dan el lado BC 44. gr. 12. m. y AC 29. gr. 10. m. y el angulo B 40. gr. 12. m. Pídesse el angulo A, que suponemos haya de ser obtuso.



Operacion. Por la propos. 1. en qualquier triangulo son proporcionales los senos de los lados con los senos de los angulos opuestos: luego en el triangulo dado son proporcionales.

Como el seno de AC	29.	10. m.	C.L.	0.3121575.
al seno del ang. B;	40.	12. m.		9.8098678.
así el seno de BC	44.	12. m.		9.8413356.
al seno del ang. A.	112.	35. m.		9.9653609.

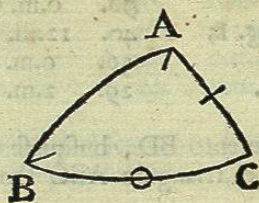
PROP. XX. Problema.

En el triangulo esferico obliquangulo, dados dos angulos, y un lado opuesto, hallar el otro lado opuesto.

EN este caso es menester saber si el lado que se busca es menor, ò mayor que el quadrante. Sea pues el triangulo ABC, en el qual dados los angulos B, 40. gr. 12. m. y A,

112.

112. gr. 35. m. y el lado AC 29. gr. 10. m. se pide el lado BC, que suponemos haya de ser menor que el quadrante.



Operacion. En el dicho triangulo son (1.) proporcionales.

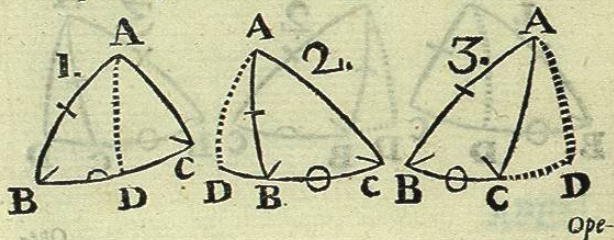
Como el seno del ang. B	40.	12. m.	C.L.	0.1901322.
al seno de AC	29.	10. m.		9.6878425.
así el seno del ang. A	112.	35. m.		9.9653532.
al seno de BC	44.	12. m.		9.8433279.

PROP. XXI. Problema.

En el triangulo esferico obliquangulo, dados dos angulos, y un lado opuesto, hallar el lado intermedio entre los angulos dados.

EN este caso cae el perpendicular sobre el lado que se busca; y es menester saber si este lado es mayor, ò menor que el quadrante; ò si el lado opuesto al otro angulo dado es mayor, ò menor que el quadrante.

Sea pues el triangulo ABC, en quien son conocidos los angulos B, 40. gr. 12. m. y C, 47. gr. 51. m. y el lado AB, 36. gr. 0. m. Pídesse el lado BC, que suponemos ha de ser menor que el quadrante.



Ope-

142 TRAT. VII. DE LA TRIGONOMETRIA.

Operacion 1. En el triangulo rectangulo ABD hallese como en la 15. el segmento BD, con la siguiente analogia.

Como el radio	90.	o.m.	C.L.	0.0000000.
al seno 2. del ang. B;	40.	12.m.		9.8829774.
asi la tang. de AB	36.	o.m.		9.8612610.
à la tang. de BD.	29.	2.m.		9.7442384.

Hallado el segmento BD, busquese el segmento CD.  
Operacion 2. En el triangulo ABC son proporcionales.

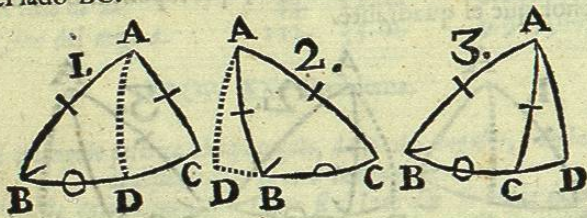
(5.)				
Como la tang. 2. del ang. B	40.	12.m.	C.L.	9.9268904.
à la tang. 2. del ang. C;	47.	51.m.		9.9567233.
asi el seno de BD	29.	2.m.		9.6860267.
al seno de CD.	21.	47.m.		9.5696404.

Hallados los segmentos BD, CD, la suma de ellos 50. gr. 49. m. es el lado BC, que se desea en el triangulo 1. En el 2. y 3. se hallará el mismo lado restando el segmento menor del mayor, por caer en éstos el perpendicular fuera del triangulo.

PROP. XXII. Problema.

En el triangulo esferico obliquangulo, dados los lados, y un angulo opuesto à uno de esos lados, hallar el tercer lado.

EN este caso el perpendicular cae sobre el lado que se busca. Sea el triangulo ABC, en quien se dan los lados AB 36. gr. o. m. AC 29. gr. 10. m. y el angulo B 40. gr. 12. m. y se pide el lado BC.



Ope-

LIBRO VI.

143

Operacion 1. En el triangulo rectangulo ABD, son (14. lib. 5.) proporcionales los siguientes, con que se halla el segmento BD.

Como el radio	90.	o.m.	C.L.	0.0000000.
al seno 2. del ang. B;	40.	12.m.		9.8829774.
asi la tang. de AB	36.	o.m.		9.8612610.
à la tang. de BD.	29.	2.m.		9.7442384.

Operacion 2. Busquese el segmento CD, en el triangulo ABC, en el qual son proporcionales (4.) los siguientes.

Como el seno 2. de AB	36.	o.m.	C.L.	0.0920424.
al seno 2. de AC;	29.	10.m.		9.9411166.
asi el seno 2. de BD	29.	2.m.		9.9416791.
al seno 2. de CD.	19.	19.m.		9.9748381.

Sumense los dos segmentos BD, CD, hallados, y la suma será en el triangulo 1. 48. gr. 21. m. Pero en los triangulos 2. y 3. se restará el menor del mayor para saber el lado BC, por caer el perpendicular fuera en entrambos triangulos.

APEN-