perficie de la piramide conica, quando no es cortada por su exe. Llamase *linea eliptica*, quando representa la circunferencia de una elipse; *linea parabolica*, quando representa la circunferencia de la parabola; y *linea hiperbolica*, quando representa la periferia de la hiperbola.

LIBRO I.

DE LA ELIPSE.

DEFINICIONES.

1 *Elipse, es una figura curvilinea prolongada, que procede de la seccion obliqua, que no es subcontraria, hecha en una piramide conica con un plano, que corta sus dos lados, como BADC.* (*fig.4.*) Tiene dos exes, uno mayor, y otro menor.

2 *Exe mayor de la elipse, es la linea recta, que passando à lo largo de la una parte de la elipse à la otra, mide, y representa su longitud, como BD en la elipse 1. fig.4.*

3 *Exe menor de la elipse, es la linea recta, que passando por lo ancho de ella de la una parte à la otra, mide su amplitud, como AC en la elipse 1.* Estos dos exes se parten el uno al otro perpendicularmente en dos partes iguales: y de la propia suerte divide cada uno de ellos à todas las lineas que se tiraren dentro de la elipse paralelas al otro exe; y assi el exe BD, parte igualmente, y es perpendicular al exe menor AC, y à todas sus paralelas MI, LG, &c. Y el exe AC, parte igual, y perpendicularmente al exe mayor BD, y à todas sus paralelas GP, NO, &c.

4 *Centro de la elipse, es el punto E, en que se cortan los dos exes.*

5 *Diametro de la elipse, es qualquier linea recta, que passando por el centro de la elipse, se termina por entrambas partes en su circunferencia, como RQ, SI, &c.*

Donde se ve, que la elipse tiene infinitos diametros, y que dos de ellos son solamente exes, el uno de los quales es el mayor de todos los diametros; y el otro, el menor de todos, como se demonstrarà despues. Tambien todos los diametros se cortan mutuamente en dos partes iguales; pero solos aquellos son entre sì perpendiculares, que juntamente son exes, como queda dicho.

6 *Lineas ordenadamente aplicadas al diametro, son aquellas, que siendo entre si paralelas, son divididas por el diametro en dos partes iguales, como MI, LG, &c.* assi en la elipse 1. como en la 2. (*fig.4.*) A estas lineas llamaremos *ordenadas*, ò *aplicadas*; y à sus mitades, *semiordenadas*, ò *semiaplicadas*; ò tambien *ordenadas*, ò *aplicadas*.

7 *Diametros conjugados de una elipse, son aquellos, que mutuamente dividen sus paralelas en dos partes iguales, cada uno à las del otro.* Como BD, AC son diametros conjugados, assi en la elipse 1. como en la 2. porque BD divide por medio à las MI, LG, paralelas al otro diametro AC; y èste, à las NO, GP, paralelas à BD.

8 *Exes conjugados son los diametros conjugados, que se parten perpendicularmente à si, y à sus paralelas, como BD, AC en la elipse 1.*

9 *Tangente de la elipse, es la recta, que toca la periferia de la elipse en un solo punto sin cortarla.*

10 *Focos, polos, ò ombligos de la elipse, son dos puntos puestos en el exe mayor, en igual distancia de sus extremidades, de los quales, si se tiran dos lineas à qualquier punto de la periferia de la elipse, son entrambas juntas iguales à dicho exe mayor; ò tambien son dos puntos en el exe mayor en igual distancia de sus extremidades, que de tal suerte le dividen, que el rectangulo de sus segmentos, es igual al quadrado del semiexe menor.* Estas propiedades, con otras, se demonstraràn en su lugar.

11 *Lado recto, ò parametro de un diametro de la elipse, es una tercera proporcional à dicho diametro, y à su diametro conjugado.* Como si à los diametros BD, AC se les halla una recta tercera proporcional, èsta serà el parametro del diametro BD, y sirve de medida, ò nivel para las potencias, ò qua-

quadrados de las aplicadas à dicho diametro, como se verà despues.

12 *Figura se llama absolutamente el rectangulo hecho del parametro, y del diametro.*

PROP. I. Theorema.

En qualquiera piramide conica, la seccion paralela à la basa es circulo.

Demonstr. Las piramides poligonas inscritas en la conica, degeneran en ésta, como demonstrè en el lema para la *prop.* 10. del *lib.* 8. de la Geom. Elem. Y assimismo los poligonos inscritos en el circulo, degeneran en el circulo, como demonstrè alli mismo en el lema 2. para la *prop.* 2. Siendo pues en las piramides poligonas la seccion paralela à la basa un poligono semejante à la basa; (lema 1. para la *propos.* 7. *lib.* 8. Geom. Elem.) tambien en la conica la seccion paralela à su basa circular, serà circulo: y esto es lo mismo, aunque la piramide sobredicha sea escalena.

LEMA.

En qualquiera figura curvilinea, si las perpendiculares tiradas de su periferia à alguna otra linea, que corre todo el curvilineo, la dividen de tal suerte, que los quadrados de dichas perpendiculares son iguales à los rectangulos de los segmentos, el curvilineo serà circulo. (*fig.* 5.)

Suponese, que el quadrado de MO, perpendicular à la recta GH, es igual al rectangulo GOH. Digo, que la figura curvilinea GMH es circulo. Dividase la GH por medio en I, y tirese la IM.

Demonstr. Por estàr GH dividida igualmente en I, y desigualmente en O, es (5. 2. Eucl.) el rectangulo GOH, mas el quadrado de IO, igual al quadrado de IH; pero el rectangulo mismo GOH se supone igual al quadrado de MO: luego el quadrado de MO, mas el quadrado de IO, es igual al quadrado de IH: y siendo (47. 1. Eucl.) el quadrado de IM, igual à los quadrados de IO, MO, seràn los quadrados de IH, de IM, y de IG iguales: luego las tres lineas, IH, IM, IG son iguales; y por consiguiente, el curvilineo GMH es circulo.

PROP. II. Theorema.

En la piramide conica escalena, la seccion subcontraria es circulo. (*fig.* 6.)

Sea ABLC la piramide conica escalena; y sea ABC el triangulo plano, que passando por el exe es perpendicular à la basa de la piramide. Cortese la piramide con el plano EFG recto al plano del triangulo ABC, y serà EG la seccion comun de estos dos planos; y el triangulo AEG que forma este corte, sea semejante, y subcontrario al triangulo ABC. Digo, que la seccion conica EFG es circulo.

Preparacion. Tirese en el plano EFG la recta IF perpendicular à EG, que por consiguiente (*def.* 3. 11. Euc.) serà perpendicular al plano ABC: tirese por IF el plano HFK paralelo à la basa, y la seccion comun HK de dicho plano, y del triangulo ABC, serà paralela à la basa BC; y (1.) serà HFK circulo.

Demonstr. La recta FI, seccion comun de los planos EFG, HFK, es perpendicular al plano ABC: luego es perpendicular à HK; y siendo HFK circulo, serà IF media proporcional entre HI, IK: (*corol.* de la 13. del 6. Eucl.) luego el quadrado de FI es (17. 6. Euc.) igual al rectangulo HIK; pero el rectangulo EIG es tambien igual al rectangulo HIK, por ser semejantes los triangulos EIH, KIG, como lo convence la igualdad de los angulos verticales I; y de los angulos EHI, EGK iguales entrambos al angulo B, esto es, G por suposicion, y H por las paralelas HK, BC: luego (4. 6. Eucl.) sus lados homologos son proporcionales, esto es, EI à HI, como IK à IG: luego (16. 6. Eucl.) el rectangulo EIG de las extremas es igual al rectangulo HIK de las medias: luego el quadrado IF, que es igual al rectangulo HIK, es igual al rectangulo EIG: luego (lema antec.) la figura EFG es circulo.

PROP.

PROP. III. Theorema.

Si el diametro de la feccion conica alcanza entrambos lados del triangulo que paffa por el exe, y dicha feccion, ni es paralela à la bafa, ni fubcontraria; no ferà circulo, fi elipfe. (fig. 7.)

EL diametro DF de la feccion DEF corta entrambos lados del triangulo ABC, que paffa por el exe; y ni es paralela à la bafa BC, ni fubcontraria. Digo, que la feccion DEF no es circulo.

Demonftr. Si DEF fuere circulo, DF tendria poftura fubcontraria, contra lo fupuefto: luego dicha feccion no puede fer circulo. Para demonftrar el antecedente fe ha de fuponer, que fi el plano DEF fe continuara, cortaria à la bafa BC, ò fu plano continuado en NGH, la qual feccion feria perpendicular à BC, por fer el plano DEF perpendicular al plano ABC. Hagafe pues EI paralela à NG: tirefe LIM paralela à BC, y ferà EI perpendicular à LIM; y el plano que paffare por IE, y LIM, ferà paralelo à la bafa BC; y (1.) ferà circulo: luego IE es (*corol.* 13. 6. Eucl.) media proporcional entre LI, IM: y como DEF fe fuponga fer circulo, tambien la IE ferà media proporcional entre DI, IF: luego los rectangulos DIF, LIM feràn iguales entre sì, por fer entrambos iguales al quadrado de IE: luego (16.6. Euc.) ferà LI à DI, como IF à IM; y fiendo los angulos verticales I iguales, feràn los triangulos LID, FIM equiangulos; y la feccion fubcontraria, contra lo fupuefto: luego efta feccion no es circulo; y por configuiente (*def.* 1.) ferà elipfe, cuyas propiedades mas infignes fe demueftran en las propoficiones figuientes.

PROP. IV. Theorema.

La recta DF (fig. 7.) corta por medio en I à la recta EK.

DEmonftr. La recta LM fe fupone paralela à la BC; y afsimifmo KE fe hizo en la prop. anteced. paralela à HN: luego el angulo LIE es igual (10. 11. Eucl.) al angulo BGN; pero el angulo BGN, fe fupone recto por la razon dicha en la propof. paffada: luego LIE, tambien es recto; y fiendo (1.) la feccion LEM circulo, y fu diametro LM, es forzofo (3.3. Euc.) que efte diametro corte à la perpendicular EIK, por medio en I; y fiendo el punto I, como fe ha fupuefto, comun à las tres rectas LM, EK, DF, la DF, cortarà à la EK, por medio en I.

COROLARIOS.

1 *SIguefe de aqui, que la recta DF, cortarà por medio à todas las paralelas à EK, que fe tiraren dentro de la elipfe; y al contrario.* 2. *Se infiere, que la recta DF, es el exe mayor de la elipfe; y que la EK, y todas fus paralelas fon las ordenadamente aplicadas à dicho exe DF.*

PROP. V. Theorema.

Si en la elipfe DEFN, fe tira otra qualquiera linea RT paralela à EN, ferà el rectangulo DMF, al rectangulo DHF, como el quadrado de EM, al quadrado de RH. (fig. 8.)

P*Reparacion.* Tirefe por el punto H la recta SHQ paralela à OP; y paffe por las rectas SQ, TR un plano, que (15.11. Eucl.) ferà paralelo à OEP, y à la bafa CGA; y fu feccion SRQ, ferà circulo. (1.)

Demonftr. Por fer las rectas OP, SQ paralelas, en los triangulos DMP, DHQ, la razon de DM à DH, es (2.6. Eucl.) la mifma que de PM à QH; y en los triangulos OMF, SHF, la razon de MF à HF, es la mifma que de MO à HS. Siendo pues (23. 6. Eucl.) la razon del rectangulo DMF, al rectangulo DHF, compuefta de la razon de DM à DH, y de MF à HF, ferà la razon del rectangulo DMF, al rectangulo DHF, compuefta de la razon de PM à QH, y de MO à HS; pero la razon del rectangulo PMO, al rectangulo QHS, fe compone tambien de las razones de PM à QH, y de MO à HS: luego el rectangulo DMF, al rectangulo DHF, es como el rectangulo PMO, al rectangulo QHS, efto es, (por fer PEO, QRS, circulos) como el rec-

rectangulo EMN, al rectangulo RHT sus iguales (35. 3. Eucl.) estos rectangulos EMN, RHT, son quadrados, por estàr divididas las rectas EN, RT por medio en M, y H: (4.) luego el rectangulo DMF, al rectangulo DHF, es como el quadrado de EM, al quadrado de RH.

Esta es la propiedad essencial, y primaria de la elipse, que los quadrados de las aplicadas al exe, tienen entre si la misma razon que los rectangulos de los segmentos del exe; lo qual conviene tambien à los demàs diametros, como lo demuestra el P. Dechales, lib.2. Sec. Con. prop. 31. pero basta haverlo demonstrado en las aplicadas al exe para lo que en adelante hemos de tratar. Y aunque es verdad que esta propiedad en parte conviene tambien al circulo, pero no de la misma suerte que à la elipse; porque en el circulo, aunque los rectangulos HOG, HNG (fig. 5.) de los segmentos del diametro, tienen entre si la misma razon que los quadrados de las aplicadas MO, LN, pero por ser èstas medias proporcionales entre dichos segmentos, son los rectangulos de èstos iguales à los quadrados de aquellas; lo que no sucede en la elipse, exceptando el caso en que los diametros conjugados sean iguales, como en su lugar veremos.

COROLARIOS.

1 *De aqui se infiere, que la elipse tiene dos exes, uno mayor, y otro menor; porque si fuessen iguales, los rectangulos hechos de los segmentos del exe, serian iguales à los quadrados de las ordenadas, assi como lo serian los rectangulos de los segmentos de entrambos exes; y por consiguiente, no se distinguiria la elipse del circulo.*

2 *Las aplicadas al exe, que distan igualmente del centro de la elipse, son iguales; porque si distan igualmente del centro, seràn tambien iguales las distancias DM, FH; como tambien, añadiendo à entrambas el comun MH, seràn DH, FM iguales: luego los rectangulos DMF, DHF seràn iguales; y siendo los quadrados de ME, HR, iguales à los sobredichos rectangulos, seràn entre si iguales: luego sus lados ME, HR, seràn iguales. De que tambien se colige, que si las aplicadas son iguales, distan igualmente del centro.*

PROP.

PROP. VI. Theorema.

El exe menor CD, (fig.9.) divide tambien por medio à todas sus aplicadas.

Demonstr. Cortense EG, EH iguales; y tirense las perpendiculares HI, GF; èstas (*corolar. 2. antec.*) son iguales, y paralelas: luego la FI, que las junta, serà paralela, è igual à GH: (33. 1. Eucl.) luego la perpendicular ED, que parte por medio la GH, dividirà tambien por medio la FI en K; y assi las demàs aplicadas al diametro CD.

PROP. VII. Theorema.

Las aplicadas en el circulo del exe, ò diametro mayor de la elipse, à las aplicadas en la elipse à su exe, ò diametro mayor, tienen entre si la razon misma del exe, ò diametro mayor al menor; y assimismo las aplicadas al exe, ò diametro menor en la elipse, tienen con las aplicadas al circulo de su exe menor, la razon misma del diametro mayor al menor.

(fig. 10.)

Explicacion. Sea la elipse AGH; y el circulo de su exe mayor AH, serà AVH; y el de su diametro menor GI, serà DGE; y las semiordenadas en el circulo mayor, seràn FP, CS, OT; y las semiordenadas en la elipse FL, CI, ON. Digo lo primero, que FP à FL, es como CS, semiexe, ò semidiametro mayor de la elipse, à CI, semiexe, ò semidiametro menor; y assi en todas las demàs.

Demonstr. El rectangulo AFH, al rectangulo ACH, es (5.) como el quadrado de FL, al quadrado de CI; pero el rectangulo AFH, es (*corol.* de la 13.6.Eucl.) igual al quadrado de FP; y el rectangulo ACH, es igual al quadrado de CS: luego el quadrado de FP, al quadrado de CS, es como el quadrado de FL, al quadrado de CI; y alternando, el quadrado de FP, al quadrado de FL, es como el quadrado de CS, al quadrado de CI; y como (20.6.Eucl.) los quadrados tengan entre sì la razon duplicada de sus lados, la razon duplicada de la de FP, à FL, serà la misma que la duplicada de CS, à CI: luego la misma razon hay de FP, à FL,

que

que de CS semiexe, ò semidiametro mayor, à CI semiexe, ò semidiametro menor; y assi en las demàs semiordenadas.

Con semejante demonstracion se convence la segunda parte de la propuesta: esto es, que tiradas las semiordenadas ZXY, y las demàs, es ZY à ZX, como CA, semidiametro mayor, à CD, semidiametro menor.

PROP. VIII. Theorema.

El circulo del exe mayor tiene con la elipse la misma razon que tiene el diametro mayor con el menor; y essa misma razon tiene la elipse con el circulo del exe menor. (fig. 10.)

Demuestrase facilmente por la methodo, que llaman de *indivisibles*, ò segun el Padre Andres Taquet, *de etherogeneos*. Considerense tiradas todas las ordenadas possibles, paralelas à la VS, y quedarà formada con ellas toda la area de la elipse, y del circulo mayor; y como todas estas ordenadas sean cortadas por la elipse en la razon misma de CS à CI, se sigue, que todas las del circulo mayor juntas, à todas las de la elipse, esto es, la area del circulo mayor, à la de la elipse, tendrà la razon de CS, semidiametro mayor, à CI, semidiametro menor. Assimismo, si se consideran todas las possibles dentro de la elipse paralelas à AH, se infiere tienen todas las de la elipse à las del circulo menor la razon de AC, semidiametro mayor, à DC, semidiametro menor: luego el circulo mayor à la elipse, y èsta al circulo menor, tienen la razon del semidiametro mayor al semidiametro menor.

COROLARIO.

El circulo del exe mayor, la elipse, y el circulo del exe menor son continuos proporcionales, por tener la razon misma del exe mayor al menor.

PROP.

PROP. IX. Theorema.

El circulo cuyo radio es medio proporcional entre el semiexe mayor, y el semiexe menor de la elipse, es igual à la elipse. (fig. 10.)

Sea la B media proporcional entre el semiexe mayor CH, y el menor CI. Digo, que el circulo hecho de B, como radio, serà igual à la elipse.

Demonstr. El circulo mayor ASHV, al circulo hecho del radio B, tiene (2. 12. Eucl.) razon duplicada del radio CS al radio B; y siendo la razon de CS à CI, duplicada de la de CS à B, por ser proporcionales CS, B, CI, el circulo mayor ASHV, al circulo hecho de B, serà como CS à CI; pero el mismo circulo mayor à la elipse es tambien (8.) como CS à CI: luego el circulo hecho del radio B, y la elipse son iguales.

COROLARIOS.

1 *De aqui se colige el modo de hacer un circulo igual à una elipse, pues solo con hallar una media proporcional entre sus semiexes mayor, y menor, el circulo que se hiciere con dicha media como radio, serà igual à la elipse.*

2 *El rectangulo circunscrito à la elipse, y el quadrado circunscrito al circulo hecho de la media proporcional B, son iguales; porque el lado de este quadrado, ò el diametro del circulo sobredicho es medio proporcional entre los lados de aquel rectangulo, ò exes de la elipse, à quien son iguales.*

3 *Las elipses son entre sì como los rectangulos de sus exes. Las que tienen los exes reciprocos son iguales. Las semejantes, esto es, las que tienen los exes proporcionales, tienen la razon duplicada de sus exes homologos. Las que tienen un exe igual, tienen la razon que los otros exes: y las que constan de exes desiguales, tienen la razon compuesta de sus exes.*

PROP. X. Problema.

Explicanse dos modos de descrivir la elipse, dados sus dos exes.

En esta proposicion explico dos modos de delinear la elipse, fundados en su propiedad primaria, que se de-

demonstrò en la *prop.* 5. Mas adelante se daràn otros, fundados en otra propiedad suya.

Modo 1. (*fig.* 11.) Dados el exe mayor AB, y el semiexe menor CG, se pide se descriva la elipse.

Operacion. Del centro C descrivase el semicirculo AKB: dividase AC en qualesquiera partes iguales, ò desiguales, como L, D: tirense LM, DE paralelas à CK: dividanse estas en N, y F, semejantemente que lo està la CK en G; esto es, sea DF à DE, como CG à CK; y assimismo LN à LM, como CG à CK. Digo, que los puntos A, N, F, G, estàn en la periferia de la elipse; y por consiguiente, si por ellos se tira una linea curva ANFG, &c. quedarà descrita la elipse. Quanto mas fueren estos puntos hallados, serà mas perfecta la descripcion.

Demonstr. El quadrado de DE es igual al rectangulo ADB, (17.6.Euc.) y el quadrado de CK es igual al rectangulo ACB; y siendo por la construccion DF à DE, como CG à CK, serà (22. 6. Eucl.) el quadrado de DF al quadrado de DE, como el quadrado de CG al quadrado de CK; y alternando, el quadrado de DF al de CG, es como el quadrado de DE al de CK: luego el quadrado de DF, al quadrado de CG, serà como el rectangulo ADB, al rectangulo ACB: luego (5.) el punto F està en la periferia de la elipse. Lo mismo se probarà del punto N, y de todos los demàs: luego ANFG, &c. es elipse.

Modo 2. (*fig.* 12.) Sea dado el exe mayor AB, y el menor CD: pidese se descriva la elipse.

Operacion. Tomese con el compas la diferencia del semiexe mayor al menor; y puesto el un pie en qualquiera punto G del exe mayor, señalese con el otro en el exe menor el punto F: tirese la FGH igual al semiexe mayor. Digo, que el punto H està en la periferia de la elipse. Hagase lo mismo sobre diferentes puntos de la AB, y se tendràn muchos puntos de la periferia de la elipse; y guiando por ellos una linea, quedarà hecha su descripcion.

Para la demonstracion descrivase el semicirculo ALB; y por el punto H tirese la IHK perpendicular à AB; y juntese la EI.

De-

Demonstr. Las lineas FH, EI son iguales, por serlo entrambas al semiexe mayor EA, las quales juntan las paralelas HI, FE: luego ellas son paralelas: luego (2. 6. Eucl.) en el triangulo EIK, assi se ha EI, igual al semiexe mayor, con GH, igual al semiexe menor, como KI, semiaplicada al circulo, con KH, semiaplicada à la elipse: luego (7.) el punto H està en la periferia de la elipse; y assi en los demàs.

Para mayor facilidad de la practica se suele cortar una regla de madera, como MN, igual al semiexe mayor de la elipse: y alli mismo se nota el semiexe menor OM; y ajustando el cabo N sobre la CE, y el punto O sobre la AE, de suerte, que corriendo N por la CE, jamàs se aparte O de la AE, la extremidad M irà descriviendo la elipse: à este modo se han discurrido algunos otros instrumentos para su descripcion.

PROP. XI. Problema.

Hallar el parametro del exe de la elipse. (*fig.* 13.)

Pidese el parametro, ò lado recto del exe AB de la elipse.

Operacion. Hagase como AB, al exe conjugado CD; assi CD à AE. Digo, que AE serà el parametro del exe AB; esto es, que AE serà la medida de los quadrados de las aplicadas al exe AB.

Antes de demonstrar esta regla quiero advertir, que los antiguos Geometras hallaron en las secciones conicas esta linea llamada *Parametro*, para tener en ella una medida fixa, y determinada, por donde pudiessen nivelar, y medir con mayor facilidad las potencias, ò quadrados de las lineas aplicadas à los diametros de dichas secciones, cosa que era muy conducente para averiguar sus propiedades. El modo con que por el parametro se miden los quadrados de las aplicadas, consiste, en que el quadrado de qualquiera aplicada, como por exemplo el de FG, es igual al rectangulo hecho de la sagita FA, y de la linea FI, que es el rectangulo FH; y assi en las demàs aplicadas:

y

y porque estos rectangulos en la elipse siempre son menores que el rectangulo hecho de la sagita, y parametro, por tener siempre por lado una linea, como FI, menor que el parametro, como se colige de la operacion sobredicha; por esta causa esta seccion conica se llama *elipse*, que es lo mismo que *deficiente*: à diferencia de la *parabola*, en que los quadrados de las aplicadas son iguales à los rectangulos sobredichos del parametro, y sagita; y de la hiperbola, en que los mismos quadrados son mayores que dichos rectangulos.

Esto supuesto, para probar que la recta hallada AE es el parametro del exe AB, hagase AE paralela al exe CD. Tirese la BE, y tambien las semiaplicadas que se quisieren, como FG, que extendida, cortarà la BE en I; y perficionese el paralelogramo AS: y ultimamente tirese la IH paralela à AB. Demuestro pues, que el quadrado de FG es igual al rectangulo hecho de AF, FI, que es FH.

Demonstr. Por ser FG, MD semiaplicadas al exe AB, es (5.) el quadrado de FG al quadrado de MD, como el rectangulo AFB al rectangulo AMB, ò quadrado de AM: luego (23. 6. Eucl.) tienen la razon compuesta de sus lados, esto es, de AF à AM, y de FB à AM; pero el rectangulo AFI, esto es, FH, tiene tambien la misma razon compuesta de la de AF à AM; y de la de FI à ML, que (2. 6. Eucl.) es la misma que la de FB à AM, ò MB: luego el rectangulo FH, al rectangulo AML, tiene la misma razon que el quadrado de FG, al quadrado de MD; y alternando, el rectangulo FH, al quadrado de FG, tiene la misma razon, que el rectangulo AML, al quadrado de MD; pero el quadrado de MD es igual al rectangulo AML, como luego probarè: luego el rectangulo FH es igual al quadrado de FG.

Que el quadrado de MD sea igual al rectangulo AML, es claro; porque AB, CD, AE son por construccion proporcionales: luego el rectangulo de las extremas AB, AE, (17. 6. Eucl.) es igual al quadrado de la media CD: luego sus quartas partes son iguales. El quadrado de MD es la quarta parte del quadrado de CD doblada de MD; y el rectangulo AML, ò LMB, es la quarta parte del rectangulo AS, por ser ML mitad de AE: (2. 6. Eucl.) luego el quadrado de MD, y el rectangulo AML, son iguales, que es lo que faltava probar.

De la misma suerte que se ha hallado el parametro de el exe mayor, se hallarà el del menor, haciendo como CD à AB: asi AB al parametro que se busca, el qual serà mayor que AB.

COROLARIOS.

1 *EL parametro AE del exe mayor, el exe menor CD, el exe mayor AB, y el parametro del exe menor, son quatro continuos proporcionales; porque por construccion es AB à CD, como CD à AE, parametro del exe mayor: luego invirtiendo, serà AE, parametro del exe mayor, à CD, como CD à AB; y siendo tambien por construccion, como CD à AB, asi AB al parametro del exe menor, seràn quatro continuos proporcionales, como AE à CD, asi CD à AB; y asi AB al parametro del exe menor: luego los dos exes de la elipse son medios proporcionales entre los dos parametros; y por consiguiente, si dados los parametros, se descriviesse la elipse, se hallarian las dos medias proporcionales.*

2 *El quadrado de qualquiera aplicada, como de FG, al rectangulo AFB, tiene la misma razon que el parametro AE, al diametro AB, porque son proporcionales AB, CD, AE: luego (corol. 20. 6. Eucl.) AB à AE, es como el quadrado de AB, al quadrado de CD; y por consiguiente, como el quadrado de AM, al quadrado de CM: luego invirtiendo, serà como AE à AB; asi el quadrado de CM, al quadrado de AM, ò rectangulo AMB; pero (5.) el quadrado de CM, al rectangulo AMB, es como el quadrado de FG, al rectangulo AFB: luego el quadrado de FG, al rectangulo AFB, es como AE à AB.*

PROP. XII. Theorema.

El quadrado del exe menor es igual al rectangulo del exe mayor, y el parametro.

LA razon consta de lo dicho, porque (11.) el exe menor es medio proporcional entre el exe mayor, y el parametro: luego su quadrado (17. 6. Eucl.) es igual al rectantangulo del exe mayor, y el parametro. A este rectangulo llaman absolutamente *Figura*.

COROLARIOS.

1 *El quadrado del semiexe MD, (fig. 13.) es igual à la quarta parte de la figura, ò rectangulo AS, hecho del exe mayor, y el parametro: porque el quadrado de MD, es la quarta parte del quadrado del exe menor CD, el qual se ha probado ser igual al rectangulo AS.*

2 *Tambien por ser el exe mayor medio proporcional entre el exe menor, y su parametro, es su quadrado igual al rectangulo del exe menor, y su parametro; y el quadrado del semiexe mayor, igual à la quarta parte de dicho rectangulo.*

PROP. XIII. Problema.

Otro modo de descrivir la dicha elipse. (fig. 14.)

Sea dado el paralelogramo ABCD, cuya diagonal AC, ha de ser el exe mayor de la elipse que se ha de descrivir. *Operacion.* Tirense las paralelas que se quisieren EG, KM, NS. Hagase FH, media proporcional entre EF, FG: y assimismo LO, media proporcional entre KL, LM; y tambien hagase PS, media proporcional entre NP, y PR: y assi en quantas paralelas se quisiere. Digo, que los puntos H, O, S, estàn en la periferia de la elipse; y llevando por ellos una linea, quedarà hecha su descripcion.

Demonstr. La razon del rectangulo EFG, al rectangulo KLM, se compone de la razon de EF à KL, ù de AF à AL, que es la misma; (2.6. Eucl.) y de la razon de FG à LM, ù de CF à CL, que es la misma; pero la razon del rectangulo AFC, al rectangulo ALC, se compone de las mismas razones de AF à AL, y de FC à LC: luego assi se ha el rectangulo EFG, ò el quadrado de FH su igual, al rectangulo KLM, ò el quadrado de LO su igual, como el rectangulo AFC, al rectangulo ALC: luego (5.) los puntos H, y O, estàn en la circunferencia de la elipse; y lo mismo se convencerà de los demàs.

PROP.

PROP. XIV. Problema.

Dado el centro de la elipse, tirar los exes. (fig. 15.)

Operacion. Del centro dado A, hagase un arco de circulo, que corte la elipse en dos puntos B, y C. Tirese la recta BC, y partase por medio en D: tirese por A, y D, la recta MN, y serà el exe mayor; y tirando la perpendicular KE, por el centro A, serà el exe menor.

Demonstr. La recta NM, passa por el centro del circulo, y parte por medio à la cuerda BC: luego (3.3. Euc.) es perpendicular à la BC: luego (*corol.* 2. de la 4.) NM es el exe mayor; y por consiguiente, KE es el menor.

PROP. XV. Theorema.

Todas las rectas que passan por el centro de la elipse, y se terminan en su periferia, se dividen por medio en el mismo centro. (fig. 16.)

Sea el exe de la elipse IS, y su centro C. Digo, que qualquiera linea, como LF, que passe por el centro C, queda dividida en C en dos partes iguales.

Preparacion. Tirese desde L, la LN perpendicular al exe: cortese CM, igual à CN, y por M, hagase la perpendicular MF, y tirese la CF.

Demonstr. Las aplicadas MF, LN (*corol.* 2. *prop.* 5.) son iguales; las CN, y CM son iguales por construccion; y los angulos M, y N, rectos iguales: luego (4.1. Euc.) estos triangulos son del todo iguales: luego los angulos LCN, MCF, son iguales; y siendo verticales, las lineas LC, CF, (15. 1. Eucl.) compondràn una linea recta, y seràn iguales: luego la LF, se divide por medio en el centro C.

COROLARIOS.

1 *Todos los diametros passan por el centro de la elipse; y por consiguiente, se dividen alli en dos partes iguales.*

2 *Las aplicadas à qualquiera diametro en igual distancia del centro son iguales: consta de la demonstracion misma del Theorema.*

PROP. XVI. Problema.

Dado un diametro en la elipse, hallar el diametro conjugado, las aplicadas, y el centro. (fig.9.)

OPeracion 1. Al diametro dado AB, hagase la paralela FI: dividanse entrambas lineas por medio en E, y K: tirese la recta CEKD, y èsta serà el diametro conjugado; porque si por E passare otro diametro conjugado, dividiria la FI por medio en otro punto distinto de K, lo que es impossible: luego CD es el diametro conjugado. (*defin.* 7.)

2 Tirense qualesquiera paralelas à la CD, como son GF, HI, y èstas seràn las aplicadas al diametro AB.

3 Para hallar el centro de la elipse, si fuere dado su diametro, bastarà dividirle por medio con un punto, y èste serà el centro, como consta del *corol.* 1. de la prop. passada; pero si no fuere dado el diametro, tirense dentro de ella dos lineas paralelas como se quiera, como MN, FI, dividanse por medio en O, y K, y tirese la linea COKD: dividase CD por medio en E, y este punto serà el centro. La razon es, porque el centro està en dicha linea CD: luego es el punto E, que la divide por medio. Que el centro estè en la CD, es claro, porque no estando en ella, estaria en algun otro punto fuera de ella, como en P: luego si por el punto P, se tirare un diametro conjugado à AB, dividiria por medio las paralelas MN, FI, en O, y K; y tirando dicho diametro, passaria por OPK; conque esta recta, y la OEK, cerrarian espacio, lo que es impossible: luego el centro no puede estàr fuera de la CD: luego es el punto E.

COROLARIOS.

1 *SI el diametro divide por medio una linea, que no passa por el centro, divide assimismo por medio todas sus paralelas, y seràn sus aplicadas.*

2 *Qualquiera linea que parte igualmente dos paralelas dentro de la elipse, es diametro, y passa por el centro.*

3 *Hallado el centro, se tirarà facilmente un diametro de la elipse, de un punto dado en su periferia, con solo tirar una linea, que saliendo del punto dado passe por el centro.*

4 *La aplicada, que passa por el centro, es el diametro conjugado; porque como GF, HI sean paralelas, como tambien GH, FI, es GI paralelogramo: luego la aplicada CD, que es paralela à las GF, HI, partiendo por medio la GH, parte tambien por medio la FI, y lo mismo à qualquiera otra paralela: luego es diametro conjugado. (def. 7.)*

PROP. XVII. Theorema.

En la elipse el exe mayor es el diametro maximo, y el exe menor es el minimo, y los diametros que se apartan igualmente de los exes son iguales, y aquel es mayor, que mas dista del exe menor. (fig. 17.)

1 SEa IS el exe mayor de la elipse. Digo, que qualquiera otro diametro es menor que IS. Del centro C, con el radio CI, hagase un circulo; èste tocarà à la elipse en el punto I, y caerà todo fuera, como consta de la misma naturaleza de la elipse: luego qualquiera otro diametro no llegarà à la periferia del circulo: luego serà menor que IS.

2 Sea MN el exe menor. Digo, que qualquiera otro diametro serà mayor que MN. Con el intervalo CN hagase un circulo, y tocarà interiormente à la elipse en N, y todo caerà dentro: luego qualquiera otro diametro excederà al exe menor MN.

3 Digo, que los semidiametros CH, CG, que distan igualmente del exe IS, son iguales. Tirese la HG, que por distar igualmente los puntos H, y G del exe IS, quedarà dividida por medio en O, y serà aplicada al exe: (*corol.* 1. 16.) luego los triangulos CGO, CHO tienen los lados OG, OH iguales, y OC comun; y los angulos en O rectos, por ser la GH aplicada al exe: luego (4. 1. Euclid.) los semidiametros CG, CH son iguales.

4 La CH, que dista del semiexe CN mas que la CK, es mayor que CK; porque si se descrive con la distancia CH un circulo, cortarà à la elipse en H, y el semidiametro CK