arco K: tomese con el compàs lo que hay desde K hasta E; y con esta distancia, hecho centro en D, hagase el corte L; y el punto L estarà en la periferia de la elipse, y assimismo quantos se hallaren en la forma dicha. La razon es la misma que en los modos antecedentes.

LIBRO II.

DE LA PARABOLA.

DEFINICIONES.

1 PArabola, *es una figura curvilinea, que procede de una seccion conica paralela al lado del triangulo que passa por el exe*, como en la *fig.* 1. ABC es el triangulo que passa por el exe de la piramide conica, y la seccion DFGOL, que es paralela al lado BC de dicho triangulo, es la *parabola*.

2 *Tangente de una parabola, es la linea recta que toca la periferia de la parabola en un solo punto sin cortarla*, como BK, y RH. (*fig.* 2.)

3 *Lineas ordenadamente aplicadas en la parabola, son las paralelas à la tangente*, como FE, RS, y tambien PQ, NO, &c. (*fig.* 2.) Llamanse especialmente *aplicadas* à aquel diametro que las divide igualmente.

4 *Diametro, es aquella linea recta que parte igualmente todas las paralelas sus aplicadas*, como BD, HI. (*fig.* 2.)

5 *Exe de la parabola, es aquel diametro que es perpendicular à las aplicadas*, como BD; pero HI, aunque es diametro, no es exe.

6 *Vertice de la parabola, es la extremidad del exe*, como B. *Vertice del diametro, es la extremidad del diametro*, como H. (*fig.* 2.)

5 Sa-

7 *Sagita, ò saeta se llama el segmento TB, ò LH del diametro, contenido entre el vertice, y la aplicada.*

8 *Lado recto, ò parametro de un diametro de la parabola, es una tercera proporcional à la sagita, y à la semiaplicada*: como si à la sagita TB, y à la semiordenada TS, se halla una tercera proporcional, èsta serà el parametro del diametro BD; y sirve para medir, y determinar las potencias, ò quadrados de las aplicadas, como se verà despues.

9 *Polo, focus, ò ombligo de la parabola, es un punto de su exe, que dista del vertice la quarta parte del parametro*, como V. Porque en un espejo parabolico, puesto de cara al Sol, se unen, y concurren todos los rayos en el sobredicho punto, de suerte, que alli producen fuego.

10 *Linea perpendicular à la parabola, es la recta, que cortando à la parabola en un punto, es perpendicular à la tangente que passa por dicho punto.*

11 *Parabolas que se tocan, son aquellas à quienes una misma linea recta toca en el punto en que se encuentran.* Esta definicion conviene à toda suerte de figuras curvilineas.

12 *Parabolas iguales, son las que tienen iguales los parametros de sus exes.*

13 *Parabolas paralelas, son dos parabolas iguales puestas una dentro de la otra con un mismo exe.* Estas dos parabolas, si se prolongan hasta el infinito, se vàn continuamente acercando mas, y mas la una à la otra, sin que jamàs se puedan juntar; y por esta causa se llaman propiamente, *parabolas asimptotas*; porque el nombre de *paralelas*, solo les conviene por causa de que todas las lineas rectas tiradas entre estas dos parabolas, paralelas al exe comun, son entre sì iguales.

PROP.

PROP. I. Theorema.

En la parabola, los quadrados de las aplicadas al exe tienen entre si la misma razon que las sagitas. (fig. 1.)

SEa ABCG una piramide conica recta, y el triangulo que passa por su exe serà ABC. Tirada la DE, paralela à BC, passe la seccion parabolica DFGE por dicha linea, y sea perpendicular al plano del triangulo ABC; y como la basa AGC, tambien sea perpendicular al dicho triangulo, la comun seccion GE, serà perpendicular al plano del mismo triangulo; (19.11.Eucl.) y por consiguiente, la GE serà perpendicular à AC. Hagase la seccion IFK, paralela à la basa circular ACG, que (11.) serà circulo, y la FN, serà paralela à GE, (16.11.Eucl.) y perpendicular à IK, como lo es la GE à la AC; y seràn las GE, FN aplicadas al exe DE. Digo, que el quadrado de NF, al quadrado de EG, es como ND à ED.

Demonstr. Por ser FN perpendicular à IK, diametro del circulo IFK; y la GE perpendicular à AC, diametro del circulo AGC, es (13.6.Euc.) el quadrado de FN, igual al rectangulo INK; y el quadrado de GE, igual al rectangulo AEC: luego el quadrado de FN, al quadrado de GE, es como el rectangulo INK, al rectangulo AEC; y porque siendo paralelas NE, KC, como tambien NK, EC, son estas lineas NK, EC iguales, serà el rectangulo INK, al rectangulo AEC, (1.6.Euc.) como IN à AE, esto es, (2.6.Euc.) como DN à DE: luego el quadrado de FN, al quadrado de EG, es como DN à DE.

COROLARIOS.

1 *ESta es la primaria, y essencial propiedad de la parabola, la qual conviene tambien à la seccion parabolica de la piramide escalena, y se convence con la misma demonstracion, como se puede ver en el P. Gregorio à Sancto Vincentio en el escolio à la prop. 1. del lib. 5. porque en la piramide conica escalena, la seccion paralela à la basa tambien es circulo, como consta de la prop. 1. lib. 1. Y en caso, que el triangulo por el exe sea el mayor de los que por dicho exe se pueden formar en esta piramide, las aplicadas son tambien perpendiculares al exe, como demuestra Gregor. à S. Vinc. en los Prologomenos à las Sec. Conic. conque se convence de ellas sin diferencia alguna la propiedad misma con la demonstracion sobredicha; y en los demàs casos, aunque las aplicadas corten al exe, formando angulos obliquos, como sean siempre dichas aplicadas unas secciones comunes del plano parabolico con el circular paralelo à la basa, milita tambien en ellas la misma construccion, y demonstracion puesta arriba. De que se sigue, que en todo caso, si los quadrados de las aplicadas son como las sagitas, los puntos G, F, &c. estàn en la periferia de la parabola.*

2 *Siguese tambien de lo dicho, que los quadrados de las aplicadas, que dividen en partes iguales al exe, ò diametro, componen una progression arithmetica; porque en este caso las sagitas, cuya proporcion llevan los quadrados de las aplicadas, proceden en progression arithmetica.*

3 *El diametro DE de la parabola, parte por medio la aplicada FL, porque siendo FILK circulo, su diametro IK, parte à la cuerda FL su perpendicular por medio, (3.3.Euc.) y assimismo à las demàs aplicadas paralelas à FL.*

4 *Siguese tambien, que si en la parabola un diametro corta à una linea recta por medio, cortarà tambien por medio todas las paralelas à la sobredicha linea; porque la misma demonstracion que en el num. 3. se ha hecho de la FL, se harà de otra qualquier linea paralela à la GO.*

PROP. II. Theorema.

En la parabola, los quadrados de las aplicadas à qualquier diametro tienen la misma razon que las sagitas. (fig. 2.)

COnstruccion, y demonstracion. Tirada una recta HI, si en qualquier angulo con ella se tiran las rectas LO, MQ, &c. y se hace como la recta HL, à la recta HM, assi el quadrado de LO, al quadrado de MQ, en la forma que se dice en el Escolio siguiente, los puntos O, Q, &c. estaràn en la periferia de la parabola. (*corol.* 1. *preced.*) Continuense pues las OL, hasta N, y QM, hasta P, de suerte, que LN sea igual à LO, y MP à MQ. Digo, que los puntos N, y y P, tambien estàn en la periferia de la parabola; porque por construc. el quadrado de LO, al quadrado de MQ, es como HL à HM; pero el quadrado de LN, es igual al de LO; y el de MP, al de MQ, por ser dichas lineas iguales: luego el quadrado de LN, al de MP, es como HL à HM: luego los puntos N, y P, tambien estàn en la parabola; y siendo HI diametro, por dividir por medio las paralelas sobredichas, y ser distinto del exe, por cortarlas con angulos obliquos, tendràn en qualquier diametro los quadrados de las aplicadas, la misma razon entre si, que las sagitas.

ESCOLIO.

Para hacer dos quadrados tales, que el uno al otro tenga la razon de una linea dada à otra, como por exemplo, la razon de la HL à la HM, se hallarà una media proporcional X entre las lineas dadas HL, y HM; y dada, ò escogida la LO, se hallarà una quarta proporcional MQ à las tres HL, X, y LO, y seràn las quatro proporcionales HL, X, LO, MQ; y los quadrados hechos de LO, MQ, tendràn la misma razon que las HL, HM. Demonstr. Los quadrados de HL, y X, tienen la misma razon (22.6. Euc.) que los quadrados de LO, MQ; pero aquellos tienen la razon de HL à HM: (corol. de la prop. 20. 6. Euc.) luego los quadrados de LO, MQ, tienen la razon de HL à HM.

PROP. III. Problema.

Dada una linea que corte la parabola en dos puntos, hallar el diametro. (fig. 3.)

Sea dada la linea AC: pidese el diametro de la parabola.

Operacion. Tirese la EF paralela à la dada AC: dividanse entrambas por medio en D, y G: tirese por estos puntos la recta BDG, y serà el diametro que se pide.

Demonstr. Si BG no es diametro, sealo LO, que (*corol.* 4.1.) cortarà la EF por medio en M; y suponiendose estàr dividida por medio en G, serà GE igual à ME, el todo à su parte, que es impossible: luego BG es el diametro, y no LO.

PROP.

PROP. IV. Problema.

Por un punto dado en la periferia de la parabola, tirar una aplicada al diametro dado. (fig. 4.)

Pidese, que por el punto A, dado en la periferia de la parabola, se tire una aplicada al diametro dado BD.

Operacion. Tirese de A por B la recta ABF, y hagase la BF igual à AB. Desde F, tirese la FC paralela à BD, que cortarà la parabola en C: tirese AC, y èsta serà la aplicada. La razon es, porque siendo BE, FC paralelas, es (2. 6. Eucl.) AE à EC, como AB à BF; y siendo èstas iguales, tambien lo han de ser aquellas.

COROLARIO.

De aqui se infiere el modo de tirar la aplicada por un punto dado en el diametro, tirando primero qualquiera aplicada del modo sobredicho, y tirando despues una paralela por el punto dado en el diametro.

PROP. V. Problema.

Aplicar una linea dada al diametro de una parabola. (fig. 5.)

Pidese, que al diametro GI de la parabola se aplique la recta dada F.

Operacion. Tomese en el perimetro qualquiera punto L; y por la antecedente tirese la aplicada LH: hagase despues como el quadrado de LH, al quadrado de F; esto es, como LH, à la tercera proporcional de LH, y F: assi GH, à GI, y se tendrà el punto I. Tirese por I la IM paralela à LH, y èsta serà igual à F.

Demonstr. El quadrado de HL al quadrado de IM, es (1.) como GH à GI; y siendo por construccion el quadrado de HL, al quadrado de F, tambien como GH à GI, seràn IM, y F iguales.

PROP.

PROP. VI. Problema.

Hallar el parametro, ò lado recto de qualquier diametro de la parabola (fig. 6.)

SEa GI el diametro dado de la parabola: pidese su parametro. *Operacion.* Tirese qualquiera ordenada HL, (4.) y hallese una tercera proporcional à las GH, HL, que serà GN; y esta serà el parametro que se pide, segun la *defin.* 8. otros modos se veràn en los corolarios de las *propos.* 8. y 9.

PROP. VII. Theorema.

Los quadrados de las aplicadas son iguales al rectangulo hecho del parametro, y las sagitas. (fig. 6.)

ESto es propio de la parabola, como en otra parte dixe, y se demuestra en la forma siguiente.

Demonstr. Tirese otra aplicada IM, paralela à HL, y (1.) serà como GH à GI; assi el quadrado de HL, al quadrado de IM: y siendo tambien como GH à GI, assi el rectangulo NGH, al rectangulo NGI, (1. 6. Eucl.) tomando la GN, por altura comun: luego el quadrado de HL, al quadrado de IM, es como el rectangulo NGH, al rectangulo NGI; y permutando, el quadrado de HL, al rectangulo NGH, es como el quadrado de IM, al rectangulo NGI; pero el rectangulo NGH es igual al quadrado de HL, por ser HL, por construccion, media proporcional entre MG, GN: luego tambien el quadrado de IM, es igual al rectangulo NGI, hecho del parametro NG, y la sagita GI.

COROLARIOS.

1 *LAs aplicadas mas proximas al vertice de la parabola son menores, porque sus sagitas son menores: luego el rectangulo del parametro, y la sagita es menor en las mas proximas al vertice, que en las mas remotas: luego el quadrado de aquellas es menor que el de estas: luego las aplicadas mas proximas al vertice son menores.*

2 Si

2 *Si la sagita es igual al parametro, tambien lo serà la ordenada; como si la sagita GI, es igual al parametro GN, tambien lo serà la ordenada IM. La razon es, porque el quadrado de IM, es igual al rectangulo NGI; y suponiendo ser NG, GI iguales, serà quadrado: luego el quadrado de GN, serà igual al quadrado de IM; conque las tres lineas NG, GI, IM, seràn iguales.*

3 *Qualquiera linea paralela al diametro, como LK, corta à la periferia de la parabola en un punto; porque las ordenadas sobre la LH, son menores, y las de debaxo son mayores que LH: luego la LK corta à la parabola en un punto.*

PROP. VIII. Theorema.

Si de la extremidad del diametro se tira una paralela NM (fig. 7.) à las aplicadas, y el angulo NMP se parte por medio con la linea MO; y desde O se tira la aplicada OP, serà la sagita MP, igual al parametro.

DEmonstr. Por ser NM, OP paralelas, serà el angulo NMO igual à MOP; (29. 1. Eucl.) pero el angulo OMP es igual por construccion al angulo MNO: luego (6. 1. Eucl.) PM, PO, son iguales; y (7.) PM igual al parametro, como tambien OP.

COROLARIO.

DE aqui se colige otro modo de hallar el parametro. Tirese de la extremidad del diametro una paralela NM à las aplicadas, y partase por medio el angulo NMP, con la NO; y del punto O, tirese la aplicada OP, y la MP serà igual al parametro.

PROP. IX. Theorema.

Si de la extremidaad del exe MN, (fig. 8.) se tira la MO, y del punto O, en que corta la parabola, se tira la aplicada OP, y la ON perpendicular à MO, serà PN igual al parametro.

DEmonstr. Por ser MON triangulo rectangulo en O, y ser OP perpendicular à MN, es OP media proporcional entre MP, PN: (13.6.Eucl.) son pues proporcionanales MP, OP, PN : luego (*defin.* 8.) PN es igual al parametro.

COROLARIO.

Coligese de aqui otro modo de hallar el parametro. Dividase el exe MN en dos partes iguales; y haciendo centro en el punto de la division, hagase un semicirculo, que cortarà la parabola en un punto O; y tirando la perpendicular OP, serà PN el parametro, que siempre serà el mismo, aunque se tome la MN, mayor, ò menor.

PROP. X. Theorema.

Si por la extremidad del diametro se tira una linea paralela à las aplicadas, serà tangente: y al contrario, la que dentro de la parabola es paralela à la tangente, es aplicada al diametro que desciende del punto del contacto. (*fig.* 9.)

EN la parabola NMP, sea el diametro MO, y su aplicada NP; y sea RM paralela à NP. Digo, que es tangente; y si no lo es, supongamos corte à la parabola en algun punto, como Q: dividase la MQ por medio en S, y tirese la SO.

Demonstr. Por suponerse MQ paralela à NP, y estàr ambas partidas por medio con la recta OS, serà OS diametro, cuya aplicada serà la NP; pero esta misma NP se supone ser aplicada al diametro MO: luego serà aplicada à dos diametros, lo que es impossible; porque si esso fuesse, las paralelas à la NP, serian divididas por los dos diametros OS, OM, por medio en dos diferentes puntos: luego la MR no puede cortar la parabola: luego es tangente.

Digo tambien, que siendo la MR tangente, qualquier paralela suya, como la NP, serà aplicada al diametro MO, que desciende del punto del contacto M; porque si no lo es, supongamos lo sea NL: luego NL serà paralela à RM; y como la NP, se suponga tambien ser paralela à la RM, seràn NP, y NL paralelas, lo que no es possible por quanto concurren en N: luego la NL no es aplicada al diametro MO, sino la NP.

CO-

COROLARIO.

Qualquiera recta que estando dentro de la parabola, fuere paralela, ò à la tangente, ò à las ordenadas, queda dividida por medio con el diametro, que baxa del punto del contacto, y corta la periferia en dos puntos.

PROP. XI. Theorema.

La linea, que saliendo de la periferia de la parabola, corta en el diametro prolongado un segmento igual à la sagita, es tangente. (*fig.* 10.)

DEl punto T, de la periferia de la parabola, sale la recta TR, y la aplicada TH; y las RS, SH son iguales. Digo, que la TR toca à la parabola en el punto T; de suerte, que qualquier otro punto P, ò G, cae fuera de la parabola: de P, y G, salgan las PQ, GI paralelas à TH.

Demonstr. Por ser las lineas TH, PQ, HR, QR, (2. 6. Eucl.) proporcionales, lo son tambien (22. 6. Eucl.) sus quadrados: luego el quadrado de TH, al quadrado de PQ, es como el quadrado de HR, al quadrado de QR; como el quadrado de HS, quarta parte del quadrado de HR, à la quarta parte del quadrado de QR, que es el quadrado hecho de la mitad de QR; pero el rectangulo QSR, (5. 2. Eucl.) es menor que la quarta parte del quadrado de QR, ò que el quadrado de la mitad de QR: luego mayor razon tiene el quadrado de HS, al rectangulo QSR, que el quadrado de TH, al quadrado de PQ; pero el quadrado de HS, al rectangulo QSR, tiene la razon de HS à QS, por tener la misma altura SR: luego mayor razon tiene HS à QS, que el quadrado de TH, al quadrado PQ; pero como HS à QS, assi (1.) el quadrado de TH, al quadrado de la aplicada VQ: luego el quadrado de TH, tiene mayor razon al quadrado de VQ, que al quadrado de PQ: luego VQ, es menor que PQ: luego el punto P, de la linea RT, cae fuera de la parabola. Lo mismo demonstrarè del punto G, y de otro qualquiera distinto de T: luego la linea RP es tangente.

CO-

COROLARIOS.

1 *La tangente toca à la parabola en un solo punto, porque todos los demàs caen fuera.*

2 *Si por S, se tira la tangente MS, serà èsta la mitad de la ordenada TH, por ser (2.6. Euc.) como RS à RH, assi MS à TH; y siendo RS mitad de RH, serà MS mitad de TH, y por consiguiente el quadrado de MS, es la quarta parte del quadrado de TH; y siendo el rectangulo de HS, y el parametro igual al quadrado de TH, (7.) serà el quadrado de MS, la quarta parte de dicho rectangulo. Tambien la tangente RT, està dividida por medio en M.*

PROP. XII. Theorema.

La tangente de la parabola corta en el diametro una linea igual à la sagita. (fig. 10.)

Digo, que la tangente RT, corta la SR, igual à SH; porque si dichas lineas no son iguales, seanlo SR, SQ, y tirese la aplicada VQ: y segun esto, si se tirasse la VR, seria tangente; (11.) y por consiguiente tocaria la parabola en solo el punto V: (*corol.*1.preced.) luego si se prosiguiesse, correria por fuera de la parabola; y por consiguiente, cortaria à la tangente RT, y dos lineas rectas se cortarian en dos puntos, y encerrarian espacio, lo que es impossible: esto mismo se sigue, si se conceden ser iguales RS, SI: luego SR, y SH son iguales.

COROLARIO.

Del mismo punto R, no pueden salir dos tangentes à una misma parte de la parabola, porque se seguiria el sobredicho inconveniente.

PROP. XIII. Theorema.

Si de qualquier punto de la parabola se tira una paralela à la tangente, y otra à la ordenada que sale del punto del contacto, se formarà un triangulo igual al rectangulo hecho de la aplicada, y sagita. (fig. 11.)

LA RP toca la parabola en P, de donde sale la aplicada PV; y del punto Z, salen ZI, ZQ, paralelas à la tangen-

gente, y à la aplicada. Digo, que el triangulo ZIQ, es igual al rectangulo QT, hecho de la sagita QS, y de ST, u de la aplicada VP su igual.

Demonstr. Por ser (12.) RS, SV iguales, es RV doblada de SV: luego (41.1.Euc.) el triangulo RPV, es igual al rectangulo VT. Tambien (1.) el quadrado de PV, al quadrado de ZQ, es como VS à QS, esto es, (1.6.Euc.) como el rectangulo VT, al rectangulo QT; pero como el quadrado de PV, al quadrado de ZQ, assi es el triangulo RPV, al triangulo semejante IZQ: luego el rectangulo VT, al rectangulo QT, es como el triangulo RPV, al triangulo IZQ: y alternando, el rectangulo VT, al triangulo RPV, es como el rectangulo QT, al triangulo IZQ; y siendo el primero igual al segundo, serà el tercero igual al quarto.

PROP. XIV. Theorema.

En la parabola, qualquier linea paralela al diametro, es diametro; y parte por medio las paralelas à la tangente, que toca à la parabola en la extremidad de dicho diametro. (fig. 12.)

SEa la linea CM paralela al diametro BD de la parabola. Digo, que CM es diametro; esto es, que corta por medio todas las lineas paralelas à la tangente CA; como por exemplo à la paralela LF.

Demonstr. El triangulo EFG, es igual al rectangulo GH. (13.) Tambien el quadrado de LD, al quadrado de FG, (1.) es como DB à GB; esto es, como el rectangulo DH al rectangulo GH; pero como el quadrado de LD, al quadrado de FG, assi es el triangulo LED, al triangulo EFG, (22.6. Euc.) por ser figuras semejantes: luego el triangulo LED, al triangulo EFG, es como el rectangulo DH, al rectangulo GH; y siendo el segundo igual al quarto, serà el primero igual al tercero: conque el triangulo LED, es igual al rectangulo DH; y quitandole à aquel el triangulo EFG, y à èste el rectangulo GH, que son iguales, quedaràn el trapecio GFLD, y el rectangulo DK iguales; y quitando el trapecio comun GFNMD, restaràn los triangulos LNM, KNF iguales; y siendo semejantes, seràn los lados del uno iguales à los del otro: luego LN, es igual à NF; y por consiguiente CM es diametro, porque de la misma suerte se convenceria lo sobredicho de otra qualquier paralela à la tangente CA.

PROP. XV. Theorema.

En la parabola todos los diametros son paralelos al exe. (fig. 12.)

EN la misma construccion, digo, que qualquiera diametro, como por exemplo CM, es paralelo al exe BD; porque si no lo fuera, se podria tirar del punto C una paralela al exe BD; èsta por la antecedente seria diametro, por ser paralela al exe, que es diametro: luego cortaria por medio la aplicada LF en otro punto distinto de N, en que la parte el diametro CM, lo que es impossible: luego tambien lo es el diametro que no sea paralelo al exe.

PROP. XVI. Theorema.

La aplicada al exe es menor que la aplicada à otro qualquier diametro, si entrambas se aplican en igual distancia del vertice. (fig. 13.)

SEa SQ el exe de la parabola: digo, que si en el exe se corta una sagita, y en otro qualquier diametro se corta otra igual, y por estos puntos se tiran las aplicadas, la aplicada al exe serà menor.

Preparacion. Supongamos que un diametro ha de passar por el punto R; tirese la RP aplicada al exe; hagase SQ, quadrupla de SP; y tirese la VQ paralela à RP: dividase èsta por medio en T, y juntando la RT, tirese la VS.

Demonstr. La SQ es por construccion quadrupla de SP: luego (1.) el quadrado de VQ, es quadruplo del quadrado de RP; pero el mismo quadrado de VQ es tambien quadruplo del quadrado de TQ: luego los quadrados de TQ, y RP son iguales: luego las rectas TQ, RP son iguales; y como sean paralelas, seràn (33.1.Euc.) las RT, PQ paralelas: luego (14.) la RT es diametro; y en el triangulo VTZ,

VTZ, el lado VZ, opuesto al angulo recto T, es mayor (19.1.Eucl.) que la VT; esto es, que la TQ, ò RP.

Pruebo aora, que las sagitas RZ, SP son iguales; porque siendo SQ 4. serà ZT 2. por ser (4.6.Eucl.) SQ à ZT, como VQ à VT. Tambien siendo SQ 4. es por construccion la PQ, ò RT 3. luego quitando de la SQ 4. la PQ 3. y de la RT 3. quitando la ZT 2. quedaràn tanto la SP, como la RZ 1. luego son iguales; y como los quadrados de las aplicadas al mismo diametro sean en todo caso como las sagitas, siempre los quadrados de las aplicadas al exe en igualdad de sagitas, seràn menores que las aplicadas à los demàs diametros.

PROP. XVII. Theorema.

El parametro del exe es menor que el de los otros diametros. (fig. 13.)

DIgo, que el parametro del exe SQ, es menor que el de otro qualquiera diametro RT. Suponganse iguales las sagitas SP, RZ, y tiradas las aplicadas RP, VZ.

Demonstr. El quadrado de RP (7.) es igual al rectangulo hecho de la sagita PS, y el parametro del exe SQ: assimismo el quadrado de VZ, es igual al rectangulo hecho de ZR, y el parametro del diametro RT; pero el quadrado de VZ, es mayor que el quadrado de RP: (16.) luego el rectangulo de RZ, y el parametro del diametro, es mayor que el rectangulo de SP, y el parametro del exe; y siendo SP, RZ iguales, serà (1. 6. Eucl.) el parametro de RT mayor que el parametro del exe.

PROP. XVIII. Theorema.

Si dos lineas cortan la parabola, cada una en dos puntos, de tal suerte, que los de la una seccion estèn fuera de los de la otra, concurriràn en un punto fuera de la parabola. (fig. 14.)

LAs rectas AB, CD cortan la parabola cada una en dos puntos, los de la una fuera de los de la otra. Digo, que

que concurren en un punto fuera de la parabola. Tirense por B, y D los diametros EF, GH, que (14.) seràn paralelos; y juntese la recta BD.

Demonstr. Los angulos EBD, GDB son (27.1. Euclid.) iguales à dos rectos: luego los angulos IBD, KDB son menores que dos rectos: luego las lineas AB, CD concurren en un punto.

PROP. XIX. Problema.

Hallar el exe de una parabola. (fig. 15.)

HAllese (3.) qualquiera diametro AB. Tirese la CD perpendicular à AB; partase esta por medio en F, y tirando la FE paralela à AB, serà esta el exe que se busca. Consta de la *prop.* 15.

PROP. XX. Problema.

De un punto dado dentro, ò fuera de la parabola, tirar un diametro. (fig. 15.)

SEa dado el punto A en la periferia de la parabola, de el qual se ha de tirar un diametro.

Operacion. Tirese (3.) qualquier diametro EF, y por el punto A hagase la paralela AB, y este (14.) serà diametro; de la misma suerte se tiraria del punto G dado fuera de la parabola.

PROP. XXI. Problema.

Por un punto dado dentro, ò fuera de la parabola, tirar una tangente. (fig. 16.)

1 SEa dado el punto A en la periferia de la parabola, por el qual se ha de tirar una tangente. *Modo* 1. Tirese (20.) por A el diametro AC, y hagase (4.) qualquier aplicada BCD à dicho diametro: tirese de A la AE paralela a BD, y esta serà (10.) la tangente que se pide. *Modo*.2. Tirese qualquier diametro EF, y del punto A hagase la aplicada AF à dicho diametro: cortese DE igual à DF, y la recta AE serà tangente. (11.)

2.Sea

2 Sea dado el punto E fuera de la parabola, y por èl se ha de tirar una tangente. *Operacion.* Tirese por E (20.) qualquiera diametro EF; cortese FD igual à DE, y por F tirese la aplicada FA,(corol. *prop.* 4.) y la EA serà la tangente, como consta tambien de la *prop.* 11.

PROP. XXII. Problema.

Tirar una tangente, que forme con el exe un angulo determinado. (fig. 17.)

PIdese, que se tire una tangente à la parabola, que forme con el exe AB un angulo igual al angulo F.

Operacion. De qualquier punto E tirese la EG perpendicular à FG. Partase la FG por medio en H, y tirese EH: hagase el angulo DAC igual al angulo FHE: tirese la CB perpendicular à DB, y haganse AD, AB iguales. Tirese la linea DC, y esta serà la tangente; y el angulo D, serà igual al angulo F.

Demonstr. Los triangulos HEG, ACB son equiangulos por construccion: luego (4.6.Euc.) serà EG à GH, como CB à BA; y por consiguiente, EG à GF, dupla de GH, es como CB à BD, dupla de BA: luego (6.6. Euc.) los triangulos EFG, CDB son equiangulos, y los angulos D, y F iguales: y como las DA, AB sean iguales, serà (11.) la DC tangente.

Si en lugar del exe se propusiera otro diametro, se tiraria qualquiera aplicada IK, y formando el angulo G igual al angulo K, se obraria como antes.

PROP. XXIII. Theorema.

Las tangentes tiradas por las extremidades de qualquier aplicada concurren en un mismo punto del diametro. (fig. 18.)

DIgo, que las tangentes AD, BD, tiradas por las extremidades de la aplicada AB, concurren en el mismo punto D del diametro DF.

Demonstr. Por ser AD tangente, corta en el diametro la la ED igual à EF; (12.) y afsimifmo la tangente BD: luego concurren en el mifmo punto D.

PROP. XXIV. Theorema.

Si la linea que sale del punto en que dos tangentes concurren, divide por medio à la recta, que junta los puntos del contacto, serà diametro. (fig. 18.)

LAs dos tangentes AD, BD, concurren en el mifmo punto D, y la DF divide por medio à la AB, que junta los contactos. Digo, que efta linea es diametro; porque fi no lo es, fupongamos lo fea GF; conque la AB ferà fu aplicada, por eftàr dividida por medio en F; y fiendo la AG tangente, como fe fupone, feràn GH, HF iguales: (12.) luego (11.) fi fe tiraffe la GB, feria tangente, y (*corol. prop.* 12.) la DB no lo feria, contra lo fupuefto: luego la DF es diametro.

PROP. XXV. Theorema.

El diametro que sale del concurso de dos tangentes, divide por medio la recta, que junta los puntos del contacto. (fig. 18.)

DEl punto D en que concurren dos tangentes, fale el diametro DF. Digo, que parte por medio en F à la recta AB, que paffa por los contactos: fi el punto F no la divide por medio, fupongamos lo haga el punto K; y tirefe la DK.

Demonftr. Si DK parte por medio la AB, ferà (24.) diametro: luego (15.) es paralela al diametro DF, lo que es impofsible, por concurrir entrambas lineas en el punto D: luego el punto K no divide por medio la AB; y afsi de los demàs diftintos de F: luego la DF la divide por medio.

PROP. XXVI. Theorema.

Si el parametro se toma en el exe prolongado, qualquier cuerda tirada por el vertice, es media proporcional entre la sagita, y la compuesta de la sagita, y parametro. (fig. 19.)

SEa la AB igual al parametro; y del vertice del exe falga qualquiera cuerda BC, y tirefe la ordenada CD.

CD. Digo, que la CB, es media proporcional entre AD, y DB, efto es, que el quadrado de BC, es igual al rectangulo ADB.

Demonftr. El quadrado de BC, (47.1.Euc.) es igual à los quadrados de DB, DC: en lugar del quadrado de DC, fubftituyafe el rectangulo DBA, que (7.) es fu igual, y ferà el quadrado de BC, igual al quadrado de DB, y al rectangulo DBA; pero èftos dos juntos hacen el rectangulo ADB: (3.2. Eucl.) luego el quadrado de BC, es igual al rectangulo ADB. Efte Theorema puede fervir para la defcripcion de la parabola.

PROP. XXVII. Theorema.

Si de las extremidades de qualquier linea que corta al diametro, se tiran las aplicadas, quedarà el diametro dividido en tres continuas proporcionales; y las aplicadas seràn continuas proporcionales. (fig. 20.)

LA recta NM, corta al diametro en qualquier punto C; y por los puntos N, y M, fe tiran las aplicadas NO, ML. Digo lo primero, que las lineas FO, FC, FL, fon continuas proporcionales.

Demonftr. La FL à FO, tiene la mifma razon que el quadrado de LM, al quadrado de NO: (1.) luego tienen entre sì razon duplicada de LM à NO, ù de CL à CO, que (4.6. Euc.) es la mifma; pero efto mifmo fe figue fuponiendo fean FL, FC, FO proporcionales: luego lo fon en realidad. Que fe figa lo fobredicho, fe prueba; porque fiendolo, fi de toda la FL fe quita FC, y de toda FC fe quita FO, ferà toda FL, al fegmento quitado FC, como toda FC, al fegmento quitado FO: luego el refiduo CL, al refiduo CO, ferà tambien como toda FL à toda FC; y como FL à FO, tenga en efta fupoficion razon duplicada de FL à FC, tendrà tambien FL à FO, razon duplicada de CL à CO: luego fon proporcionales FO, FC, FL. *Efto puede fervir para hallar el punto M, en que la NC, corta la parabola.*

2 Digo, que HL, GC, NO, fon continuas proporcionales; porque las cantidades que tienen razon fubduplica-

da