LIBRO III.

DE LA HIPERBOLA.

DEFINICIONES.

1 Hiperbola, *es una figura curvilinea, que procede de una seccion conica, cuyo plano corta el un lado del triangulo que passa por el exe, y encuentra con el otro prolongado fuera de la piramide conica.* Como en la *fig.* 1. el triangulo hecho por el exe, es ABC; y la seccion EDF es hiperbola, porque el plano que la forma, corta al lado AB en D, y tambien al lado CB continuado en G: lo qual concuerda con lo que dixe al principio de este tratado en la *def.* 16. que quando el *plano secante* corta las dos piramides conicas opuestas, las dos secciones conicas opuestas que se forman son *hiperbolas.* Las secciones hiperbolicas de entrambas piramides opuestas se expressan en la *fig.* 2. fuera de la piramide.

2 *Tangente de la hiperbola, es la recta que toca su periferia en un solo punto sin cortarla*, como EL, y AH. (*fig.* 2.)

3 *Diametro de la hiperbola, es la linea recta que parte por medio todas las paralelas à la tangente, terminadas dentro de la hiperbola*, las quales se llaman *aplicadas à aquel diametro*, ò *ordenadas*: y assi, la BEH, (*fig.* 2.) es diametro de la hiperbola FED, porque parte por medio todas las paralelas à la tangente LE, tiradas dentro de la hiperbola, y estas se llaman *ordenadas*, ò *aplicadas* à dicho diametro; y el mismo nombre se da à sus mitades, como HN; ò tambien *semiordenadas*, ò *semiaplicadas*.

4 *Exe de la hiperbola, es el diametro que es perpendicular à sus aplicadas*: como en la *fig.* 2. BEH, que no solo divide por

me-

medio à sus aplicadas, si que es perpendicular à ellas; pero GFK, aunque es *diametro*, por partir por medio sus aplicadas, pero no es *exe*, por no ser perpendicular à ellas.

5 *Vertice de la hiperbola, es el punto E, en que el exe corta su periferia.*

6 *Hiperbolas opuestas, son las que forma un mismo plano secante, cortando las dos piramides opuestas*; y entrambas tienen por consiguiente un exe comun, y assimismo los demàs diametros: como en la *fig.* 2. ABC, DEF, son hiperbolas opuestas, porque tienen un mismo exe comun IH; y todos los demàs diametros, como OK, son tambien comunes, esto es, assi en la una, como en la otra, dividen por medio sus ordenadas; y à sagitas iguales, corresponden aplicadas iguales.

7 *Exe indeterminado de una parabola, es toda la recta IH.* Llamase *indeterminado*, porque puede continuarse infinitamente; pero *exe determinado*, es solamente el segmento BE comprehendido entre las dos hiperbolas opuestas, el qual mide la distancia que hay entre ellas; y en la *fig.* 1. es la recta DG, y sus terminos son los vertices de entrambas hiperbolas.

8 *Centro de la hiperbola, es el punto G, (fig. 2.) que parte por medio al exe determinado BE*: conque el centro de la hiperbola està fuera de ella, y es comun à las dos hiperbolas opuestas.

9 *Diametro indeterminado*, es OK, porque se puede continuar infinitamente; y *diametro determinado*, es el segmento AF del indeterminado, que se termina en las periferias de las hiperbolas opuestas. Aqui se vè, que los diametros, assi determinados, como indeterminados, son infinitos; pero el exe es solo uno de ellos.

10 *Diametro segundo de la hiperbola, es una linea recta media proporcional entre el diametro determinado, y su parametro, dividida por medio en el centro de la hiperbola*: conque este diametro segundo, es comun à las dos hiperbolas opuestas.

11 *Hiperbolas conjugadas, son aquellas cuyos diametros mutuamente se cortan.* Sean en la *fig.* 3. dos oposiciones de hiperbolas, la una ABC, DEF, y la otra GHI, KLM, cuyos dia-

me-

metros BE, HL, se cortan en el centro S. Digo, que las dos opuestas son conjugadas con las otras dos opuestas, y los diametros BE, HL, se llaman tambien *conjugados*; porque continuados, el BE corta por medio todas las aplicadas paralelas al diametro HL, y èste à las aplicadas paralelas à BE; y por esta razon el diametro BE, se llama *recto*, respecto de las hiperbolas ABC, DEF; y *transverso*, respecto de las GHI, KLM; y al contrario, HL es *recto*, respecto de èstas; y *transverso*, respecto de aquellas: y por la misma razon BE, es *recto*, respecto de HL; y èste lo es, respecto de BE.

12 *Asimptotas, son unas lineas en el plano de la hiperbola, que salen de su centro, y quanto mas se apartan de èl, mas se acercan à la periferia de la hiperbola; pero jamàs concurriràn con ella, aunque corran infinitamente*, como en la *fig.* 3. SN, SQ, SP, SO. Estas pueden formar angulo recto en el centro, y tambien angulo agudo, ò obtuso.

13 *Parametro, ò lado recto de la hiperbola, es una linea por quien se miden, y à quien se comparan las potencias de las aplicadas al diametro.* Como (*fig.* 4.) sea BD el diametro determinado de la hiperbola ABC, y su aplicada FA, sean proporcionales BF, FA, FE: tirese la BH, paralela à FA, larga à discrecion: tirese la DE, que cortarà la BH en G; y serà BG el *parametro*, ò *lado recto*, como se demonstrarà en su lugar. Adviertase lo primero, que assi en la hiperbola, como en la parabola, y elipse, no es forzoso que el lado recto se aplique perpendicularmente al diametro, si que puede hacerse paralelo à las aplicadas. Advierto lo segundo, que cada diametro de la hiperbola tiene su parametro diferente, por ser diferentes sus potencias, y las de sus aplicadas, à quienes mide.

14 *Hiperbolas iguales, son aquellas en quienes los triangulos que forman las tangentes con las asimptotas son iguales, ò son aquellas que à sagitas iguales corresponden aplicadas iguales.*

15 *Hiperbolas semejantes, son aquellas en quienes los triangulos que forman las tangentes con las asimptotas, que hacen angulos iguales, son semejantes.*

16 *Focus de la hiperbola, es un punto puesto en el exe dentro de ella, y distante de su centro, tanto, quanta es aquella parte de la asimptota, que se comprehende entre el centro, y el punto en que es cortada por la tangente que sale del vertice de la hiperbola.* Como en la *fig.* 3. si la distancia SR se passa de S hasta T, el punto T serà el *focus*. La propiedad essencial de los focus de las dos hiperbolas opuestas, es, que si de un punto tomado arbitrariamente en qualquiera de estas hiperbolas, se tiran dos lineas, una à cada focus, la diferencia de la mayor à la menor es siempre igual al exe determinado, que es comun à entrambas hiperbolas, ò à la distancia de sus vertices.

PROP. I. Theorema.

En la hiperbola, los quadrados de las aplicadas tienen entre sì la razon misma que los rectangulos hechos de las sagitas, y la linea compuesta de la sagita, y diametro. (*fig.* 5.)

La piramide conica VRS, se supone cortada por su exe con el plano RVS, y juntamente con otro plano que corta la basa de la piramide por la linea NQ, perpendicular à RS, y à la superficie de la misma piramide, segun la linea curva MPQ, de tal suerte, que el diametro NM de esta seccion, prolongado concurra con el lado RV, tambien alargado en L. Assimismo, por qualquiera punto O, passe la HOI, paralela à RS, y por dicha linea el plano HPI paralelo à la basa, que con el plano QPM, harà la comun interseccion OP. Esta seccion NMQ, es hiperbola, (*def.* 1.) y LM, es su diametro determinado; y las OP, NQ, son las aplicadas al diametro. Digo pues, que el quadrado de OP, al quadrado de NQ, es como el rectangulo LOM, al rectangulo LNM.

Demonstr. Por ser el plano HPI, paralelo al plano RQS, es circulo, y las intersecciones OP, NQ, son paralelas; (16. 11. Euc.) y siendo NQ perpendicular à RS, tambien OP serà perpendicular à HI, que es paralela à RS: luego (35. 3. Euc.) el rectangulo HOI, es igual al quadrado de OP, y el rectangulo RNS, es igual al quadrado de NQ: luego el quadrado de OP, al quadrado de NQ, tiene la misma razon que el rectangulo HOI, al rectangulo RNS; pero el rec-

rectangulo HOI, al rectangulo RNS, tiene la razon compuesta de HO à RN, ù de LO à LN; y de OI à NS, ù de MO à MN: luego el quadrado de OP, al quadrado de NQ, tiene la razon compuesta de LO à LN, y de MO à MN; pero el rectangulo LOM, al rectangulo LNM, tiene tambien la razon compuesta de LO à LN, y de MO à MN: luego el quadrado de OP, al quadrado de NQ, tiene la razon misma que el rectangulo LOM, al rectangulo LNM.

COROLARIO.

Si se tirasse una recta por los puntos Q, P, alargada, cortaria al diametro; porque como el rectangulo LOM sea menor que el rectangulo LNM, tambien el quadrado de OP, serà menor que el de NQ: luego OP es menor que NQ; y siendo estas lineas paralelas, es forzoso, que las rectas NO, QP, alargadas, vengan à concurrir.

PROP. II. Problema.

Dado el diametro determinado de la hiperbola, y una aplicada, hallar su parametro. (*fig.* 4.)

Dixe en la *defin.* 13. que el parametro de la hiperbola es una linea por quien se miden las potencias, ò quadrados de las aplicadas. Y Apolonio Pergeo dice, que este parametro, ò medida en la hiperbola, à diferencia del parametro de las otras secciones, es de tal calidad, que el quadrado de qualquier aplicada excede al rectangulo hecho del parametro, y sagita, en un rectangulo semejante al formado del mismo parametro, y del diametro determinado. Esto supuesto, sea dado el diametro determinado DB, y la aplicada FA, y se pide el parametro de dicho diametro.

Operacion. Hallese una tercera proporcional à la sagita BF, y à la aplicada FA, y serà la FE: juntese la DE, y tirese del vertice B la BG paralela à la aplicada, y esta recta BG, serà el parametro que sirve para el diametro dado, y sus aplicadas. Perficionense los rectangulos Fi, FM.

Demonstr. Por ser tres proporcionales BF, FA, FE, es (17.

(17. 6. Eucl.) el quadrado de FA igual al rectangulo de BF, FE, esto es, al rectangulo FH: luego dicho quadrado excede al rectangulo FG, hecho de la sagita FB, y de la recta BG, en el rectangulo KH, semejante (24. 6. Eucl.) al rectangulo BM, hecho del diametro determinado BD, y de la recta BG: luego la recta BG es el parametro, segun la inteligencia de Apolonio.

COROLARIOS.

1 *De aqui se colige la razon, porque esta seccion se llama hiperbola, à diferencia de las otras; y es, porque en la parabola, el quadrado de las aplicadas, es igual al rectangulo hecho de las sagitas, y el parametro. En la elipse, los quadrados de las aplicadas son menores que dichos rectangulos de las sagitas, y parametros; pero en la hiperbola, dichos quadrados de las aplicadas son mayores que los rectangulos referidos.*

2 *En la hiperbola, el quadrado de qualquier aplicada, como FA, tiene con el rectangulo DFB la misma razon, que el parametro BG con el diametro determinado BD; porque el rectangulo BFE igual, como hemos visto, al quadrado de FA, tiene con el rectangulo DFB la razon de FE à FD, por tener una misma altura FB;* (1.6. Eucl.) *pero como FE à FD, assi es* (4.6. Eucl.) *BG à BD: luego el quadrado de FA tiene con el rectangulo DFB la razon de BG à BD.*

3 *Si la recta DGE, que saliendo de la extremidad del diametro, passa por la extremidad del parametro, se continùa; y assimismo las aplicadas, como LN, se prosiguen hasta cortar la dicha recta en O, serà el quadrado de la aplicada LN, igual al rectangulo de la sagita BL, y de la recta LO; y assi en las demàs. La razon es, porque el rectangulo DFB al rectangulo DLB, tiene la misma razon que el quadrado de FA al quadrado de LN; pero el rectangulo BFE al rectangulo BLO, tiene tambien la misma razon que el rectangulo DFB al rectangulo DLB; porque la razon del rectangulo DFB al DLB, se compone de las razones de BF à BL, y de DF à DL; y la razon del rectangulo BFE al rectangulo BLO, se compone tambien de la de BF à BL; y de la de FE à LO, que* (4.6. Eucl.) *es la misma que la DF à DL: luego el quadrado de FA al quadrado de LN, tiene la misma razon que el rectangulo BFE al rectangulo* BLO;

BLO; y alternando, el quadrado de FA, al rectangulo BFE, tiene la misma razon que el quadrado de LN, al rectangulo BLO; pero el quadrado de FA, es igual al rectangulo BFE, como se ha demonstrado: luego el quadrado de LN, es igual al rectangulo BLO. Y assi de las demàs aplicadas.

PROP. III. Theorema.

Si una linea ocurre à la hiperbola, de suerte, que por entrambas partes cae fuera de ella, alargada concurre con el diametro. (fig. 6.)

LA recta CDE, ocurre à la hiperbola en el punto D, de suerte, que alargada, cae fuera de la seccion por una, y otra parte: digo, que concurrirà con el diametro. Señalese en la periferia de la hiperbola qualquier punto F, y tirese la recta FD.

Demonstr. (*corol. prop.* 1.) La FD prolongada concurre con el diametro en un punto A: luego corriendo la CDE, entre el punto A, y la seccion, necessariamente cortarà al diametro.

PROP. IV. Theorema.

Si à la tangente EI, (fig. 7.) se hace una paralela ML, dentro de la hiperbola opuesta, alargada dicha paralela, cortarà la hiperbola por ambas partes.

D*Emonstr.* La recta EI (3.) concurre con el diametro: luego su paralela ML, tambien concurre con el diametro, como por exemplo en L. Tomese pues AH, igual à BL: tirese por H, la HO, paralela à EI, y tirese qualquiera recta EN; y porque IE concurre con EN, tambien su paralela HO, concurrirà con la misma EN, dentro, ò fuera de la hiperbola; y por consiguiente, en qualquier caso cortarà la periferia. Supongamos pues la corta en O: tirese de O, la aplicada OQ, y tomando la LR, igual à HQ, tirese la aplicada RP, que cortarà à la MLP, en P. Digo, que este punto P, està en la periferia de la hiperbola: la razon es, porque los triangulos OHQ, RLP, son totalmente iguales, por

por tener los lados HQ, RL, iguales; y todos los angulos tambien iguales, por el paralelismo de los lados RP, OQ, y LP, OH: (26.1.Eucl.) luego las OQ, RP, son iguales; y estando el punto O, en la periferia de su hiperbola, lo estarà tambien el punto P, en la periferia de la hiperbola MBP. (*defin.* 6.)

COROLARIO.

Q*Valquiera paralela à la tangente, como OC, corta la hiperbola en dos puntos, y al diametro en un punto.*

PROP. V. Theorema.

En las hiperbolas opuestas, las aplicadas, que distan igualmente del vertice, son iguales. (fig. 8.)

AUnque esto se colige bastantemente de la naturaleza misma de estas hiperbolas; pues siendo secciones hechas en piramides conicas iguales, y semejantes, lo han de ser tambien las hiperbolas, y por consiguiente, sus aplicadas en igual distancia del vertice han de ser iguales; pero lo quiero demonstrar para mayor evidencia.

Sean pues las dos hiperbolas opuestas SON, QPT. Tomense las distancias del vertice, ò sagitas OM, PR, iguales. Digo, que las aplicadas RQ, MN, son iguales.

Demonstr. Por ser PR, OM, iguales, y la OP comun, serà el rectangulo ORP, igual al rectangulo PMO; pero (1.) el quadrado de RQ, al quadrado de MN, tiene la razon misma que el rectangulo ORP, al rectangulo PMO: luego siendo estos rectangulos iguales, tambien lo seràn dichos quadrados: luego sus lados RQ, y MN, son iguales.

COROLARIO.

D*E aqui se colige, que las hiperbolas opuestas, terminadas en igual distancia de sus vertices, son iguales.*

PROP. VI. Theorema.

La linea recta, que passando por el centro de las hiperbolas opuestas, ocurre à la una, encuentra tambien con la otra. (fig. 8.)

DIgo, que la recta CQ, que passando por el centro C, de las hiperbolas opuestas, encuentra con la una en en el punto Q, prolongada, encuentra tambien con la otra. Tirese del punto Q, la aplicada QR; y tomando la OM, igual à PR, tirese la aplicada MN, y juntese la CN.

Demonstr. Los triangulos QRC, NMC, tienen los lados CR, CM, iguales, por haverse añadido à los semidiametros iguales CP, CO, las PR, OM, iguales; y las RQ, MN, son (5.) iguales; y los angulos R, y M, son tambien iguales, por ser las QR, MN, paralelas: luego (4.1. Eucl.) son del todo iguales: luego el angulo QCR, es igual al angulo MCN; y siendo verticales opuestos, serà (15. 1.) QCN una linea recta: luego la QC alargada, coincide con la CN; y por consiguiente encuentra con la hiperbola en el punto N, que es el que en la periferia termina la aplicada MN.

COROLARIOS.

1 *Si por el punto C, que divide al diametro determinado por medio, se tira una recta, que encuentra con las hiperbolas opuestas en Q, y N, las ordenadas tiradas por dichos puntos, como QR, NM, son iguales, y cortan las sagitas OM, PR iguales.*

2 *Todas las rectas, que passando por el punto C, ocurren à las hiperbolas opuestas, quedan divididas en C, en dos partes iguales, como se infiere de lo dicho: y por esta causa se llama el punto C, centro de las hiperbolas; y todas las rectas que passan por C, y cortan las hiperbolas, son sus diametros; y sus mitades, semidiametros.*

PROP. VII. Theorema.

Qualquier linea, que passando por el vertice de la hiperbola, es paralela à las aplicadas à un mismo diametro, es tangente. (*fig.* 9.)

LA recta LI, tirada por el vertice I de la hiperbola, es paralela à la ordenada NQ. Digo, que la LI cae toda fuera de la hiperbola; porque si cayesse dentro, como IM, dividiendola por medio en R, seria aplicada al diametro HRO; y èste, dividiendo por medio la MI, tambien dividirà por medio su paralela NQ en O, (*def.* 3.) lo que es impossible, por suponerse ya dividida por medio en P: luego dicha linea cae fuera de la seccion: luego es tangente.

te. Lo mismo se convence de otra qualquier paralela à las aplicadas à otro diametro, que passe por el punto en que dicho diametro corta à la hiperbola.

PROP. VIII. Theorema.

Si el diametro determinado BA, de la hiperbola, (fig. 10.) se divide en E, de tal suerte, que BE à BA, sea como BD à la sagita AD, la EC tirada del punto E, à la extremidad de la aplicada DC, serà tangente.

P*Reparacion.* Si no es tangente, cortarà la hiperbola, y vendrà por exemplo al punto F: tirese pues por F, la aplicada GFH; y por los puntos A, y B, las AL, BK, paralelas à EC, y juntense BCX, DCK, y GCM.

Demonstr. Por suposicion BD à AD, esto es, BK à AN, (4.6.Euc.) es como BE à EA; esto es, como BC à CX; ò como BK à XN, por la semejanza de los triangulos BCK, XCN: luego BK à AN, es como la misma BK à XN: luego AN, XN son iguales: luego (5. 2. Euc.) el quadrado ANX, es mayor que el rectangulo AOX: luego mayor razon tiene la NX à XO, que la AO à AN. Esta consequencia es clara, porque si se hiciesse el rectangulo AOS, igual al rectangulo, ò quadrado ANX, seria NX à SO, como AO à AN, como se vè en las lineas puestas à parte: luego siendo OS mayor que XO, mayor razon tendrà NX à XO, que à OS: luego mayor razon tiene tambien NX à XO, que AO à AN; pero como NX à XO, assi es BK à BM, por la similitud de los triangulos XCN, BCK: luego mayor razon tiene BK à BM, que AO à AN: luego el rectangulo hecho de los extremos BK, AN, es mayor que el de los medios BM, OA; y por consiguiente, el primero tiene con el quadrado de CE, mayor razon que el segundo: pero como el rectangulo de BK, AN, al quadrado de CE; assi es el rectangulo BDA, al quadrado DE: (2.6.Euc.) y tambien, como el rectangulo de BM, AO, al quadrado de CE; assi el rectangulo BGA, al quadrado de GE: luego mayor razon tiene el rectangulo BDA, al quadrado de DE, que el rectangulo BGA, al quadrado de GE; y permutando, mayor

yor el primer rectangulo al segundo, que el quadrado primero al segundo; y como (1.) sea como el rectangulo BDA, al rectangulo BGA; assi el quadrado CD, al quadrado GH: y como el quadrado DE, al quadrado GE; assi el quadrado CD, al quadrado FG: (por suponerse, que la EC prolongada viene à F) luego mayor razon tiene el quadrado CD, al quadrado GH, que es el mismo quadrado CD, al quadrado FG, lo que es absurdo, y contra lo demonstrado en la *propos.* 8. *lib.* 5. Eucl. luego la EC alargada no puede venir al punto F, ni à otro dentro de la seccion: luego ha de caer fuera de ella; y por consiguiente serà tangente.

PROP. IX. Theorema.

Si una recta toca à la hiperbola, y del punto del contacto se tira una aplicada, las partes del diametro determinado tendràn la misma razon que la recta compuesta de dicho diametro, y sagita tiene con la sagita.

(*fig.* 11.)

SEa OV el diametro de la hiperbola; y la tangente PT; y PQ la aplicada. Digo, que OQ à VQ, tiene la misma razon que OT à TV.

Demonstr. Si no es assi, hagase como OT à TV; assi OS à VS, y tirese la aplicada SR: conque (8.) la TR serà tangente; y alargada àzia baxo, cortarà à la TP; y por consiguiente, dos rectas cerraràn espacio, lo que es impossible.

COROLARIOS.

DE aqui se colige, que qualquiera tangente de la hiperbola prolongada corta el diametro entre el centro, y el vertice, ò à menor distancia del vertice, que el semidiametro; porque las partes del diametro OT à TV, tienen la misma razon que OQ à VQ; y como la OQ siempre haya de ser mayor que su parte VQ; tambien la OT, siempre serà mayor que TV: luego TV es menor que el semidiametro.

2 *Si de un punto del diametro, que no diste del vertice de la hiperbola menos que el semidiametro, se tira una recta à la hiperbola, la ha de cortar precisamente. Consta de lo dicho.*

PROP. X. Theorema.

Si del contacto O (fig. 12.) se tira una aplicada OQ, al diametro MQ, serà el quadrado del semidiameteo QR, igual al rectangulo QGN.

DEmonstr. (8.) MN à NR, es como MQ à RQ: luego componiendo, serà como MN, y NR juntas; esto es, como MR, à NR: assi MQ, y RQ juntas, à RQ: luego las mitades de los antecedentes, son proporcionales con los mismos consequentes; esto es, GR, mitad de MR à NR, serà como GQ, mitad de las lineas MQ, y RQ à RQ: luego convirtiendo la razon, serà GQ à GR, como GQ—RQ à GR—NR; esto es, GQ à GR, como GR à GN: luego (17. 6. Eucl.) el quadrado de GR, es igual al rectangulo QGN. De aqui se colige bastantemente la conversa.

PROP. XI. Theorema.

En la misma suposicion (fig. 12.) el rectangulo MNR, es igual al rectangulo QNG.

DEmonstr. (10.) QG à GR, es como GR à NG: luego componiendo, serà como QM à GM: assi MN à GN; y alternando, como QM à MN, assi GM à GN; y dividiendo, como QN à NM, assi RN à NG: luego el rectangulo de los medios MNR, es igual al de los extremos QNG. (16. 6. Euclid.)

PROP. XII. Theorema.

En la misma suposicion (fig. 12.) es el rectangulo GQN, al quadrado de QO, como el diametro MR al parametro.

DEmonstr. Consta de lo dicho en la demonstracion de la propos. anteced. que GQ à RQ, es como GR, ò MG su igual à NR: luego alternando, es GQ à MG, como QR à NR; y componiendo, es como MQ à QG; assi NQ à QR:

à QR: luego (16.6.Euc.) los rectangulos MQR, GQN son iguales; pero el rectangulo MQR, es (*corol.* 2.2.) al quadrado de QO, como el diametro MR al parametro: luego el rectangulo GQN, al quadrado de QO, es como el diametro MR al parametro.

PROP. XIII. Theorema.

Hallar el diametro, centro, y exe de una hiperbola. (fig. 13.)

1 DAda la hiperbola IKP, pidese uno de sus diametros. *Operacion.* Tirense dentro de ella de qualquiera manera dos paralelas HF, IL: dividanse por medio en E, C: tirese la CE larga à discrecion, y serà el diametro indeterminado propio de las aplicadas HF, IL, y uno de los de la hiperbola.

Demonstr. Si la CE no es diametro, respecto de las HF, IL, lo serà alguna otra linea NP: luego cortarà por medio la IL en O, (*def.* 3.) siendo asi, que se ha supuesto cortada por medio en C: luego no la NP, ni otra alguna puede ser el diametro, respecto de las aplicadas HF, IL, si solamente la CE.

2 Pidese el centro de la misma hiperbola. *Operacion.* Tirado el diametro CE, con las paralelas HF, IL, tirense otras dos paralelas NP, QS, y dividanse por medio en O, R. Tirese el diametro RO, que cortarà al otro CE, alargado en M, y este punto M, serà el centro de la hiperbola; (*corol.* 2.6.) y las MK, MG, son semidiametros determinados, y su duplo seràn diametros determinados. (*defin.* 9.)

3 Pidese el exe de la hiperbola. *Operacion.* Del centro T, dado, ò hallado por la operacion antecedente, descrivase un arco de circulo, que cortarà la hiperbola en dos puntos Z, S. Tirese la recta ZS, que se dividirà por medio en V; tirese la TV, y serà el exe, por ser perpendicular à la aplicada ZS.

PROP.

PROP. XIV. Problema.

De un punto dado, tirar una tangente à la hiperbola. (fig. 12.)

1 SEa dado el punto O en la periferia de la hiperbola, de quien se ha de tirar la tangente. *Operacion.* Tirese la recta OP de qualquiera suerte, y hallese (13.) el centro G, y tirese el semidiametro GQ: y tomando GM igual à GR, serà MR el diametro determinado. Dividase MR en N, en dos partes, que tengan la misma razon que MQ à RQ; y la NO serà la tangente que se pide. Consta de la *prop.* 8.

2 Pidese, que del punto N, dado en el diametro entre el centro G, y el vertice R, se tire una tangente à la hiperbola. *Operacion.* Hallese una tercera proporcional à las NG, y GR, que serà la NQ: tirese por Q la aplicada PQO, y la NO serà la tangente. La razon es, porque segun esta practica, serà el quadrado del semidiametro GR, igual al rectangulo NGQ: luego (10.) la NO, es tangente. El modo de tirar la aplicada PQO, es el mismo que el de la parabola, y el que se sigue en la propos. siguiente.

PROP. XV. Problema.

Dado el diametro, y un punto, tirar por este punto una aplicada al diametro, y una tangente por el vertice. (fig. 14.)

1 SEa AB el diametro de una hiperbola: pidese se tire una aplicada al diametro sobredicho, por el punto P dado en la periferia.

Operacion. Tirese la PTQ por el vertice T, y sean iguales PT, TQ: tirese la QR paralela al diametro AB, que cortarà la periferia en R: tirese la PR, y serà la aplicada que se pide; porque PB à BR, es como PT à TQ; y siendo estas iguales, tambien lo seràn aquellas: luego la PR queda dividida por medio en B: luego es aplicada. (*defin.* 3.)

 Pi-

2 Pidese se tire una aplicada par un punto S dado en el diametro.

Operacion. Tirese por qualquier punto P de la periferia la ordenada PR, por la regla dada: hagase por el punto S la MSN paralela à PR, y serà la aplicada que se pide.

3 Pidese, que por el vertice T se tire una tangente. Tirese la LT paralela à MN, y quedarà hecho. Consta de la *prop. 7.*

PROP. XVI. Theorema.

En la hiperbola, si del punto del contacto se tira una aplicada, y por las extremidades del diametro determinado se tiran dos paralelas à la ordenada, que lleguen hasta la tangente, el rectangulo hecho de dichas paralelas, es igual à la quarta parte de la figura. (fig. 15.)

Apolonio entiende por *figura* el rectangulo hecho del diametro determinado, y parametro. Sea pues PR la tangente, y la aplicada PQ: por las extremidades del diametro NL, tirense las LI, NO paralelas à PQ, hasta que concurran con la tangente PR alargada: y sea LM el parametro. Digo, que el rectangulo hecho de LI, NO, es la quarta parte del rectangulo hecho de NL, LM.

Demonstr. Por ser RP tangente, (11.) los rectangulos QRE, NRL son iguales: luego como se ha el quadrado de QR con el rectangulo QRE; esto es, como QR à RE: assi se ha tambien el mismo quadrado de QR con el rectangulo NRL; pero esta razon del quadrado de QR al rectangulo NRL, se compone de la razon de QR à NR, ù de PQ à NO; y de la razon de QR à RL, ù de PQ à IL, que son las que componen la razon del quadrado de PQ al rectangulo de IL, NO: luego la misma razon tienen QR à RE, ò el rectangulo EQR, al rectangulo QER, ò al quadrado de LE su igual, (10.) que el quadrado de PQ al rectangulo NO, IL: y permutando, como el rectangulo EQR al quadrado de PQ, esto es, (15.) como el diametro NL al parametro LM: assi el quadrado de LE, al rectangulo NO, IL; pero como NL al parametro LM, assi el quadrado de NL al rectangulo NLM: (1.6.Eucl.) luego el quadrado de LE al rectangulo LI, NO, es como el quadrado de NL al rectangulo NLM: y alternando, como el quadrado de LE al

al quadrado de NL, assi el rectangulo LI, NO al rectangulo NLM: y siendo, como es el primero, la quarta parte del segundo, serà tambien el tercero la quarta parte del quarto: es pues el rectangulo de LI, NO, la quarta parte del rectangulo NLM, ù de la figura.

PROP. XVII. Theorema.

En la hiperbola, si por el punto del contacto se tira una aplicada, y por el centro se hace una paralela à dicha aplicada, que se termine en la tangente, serà el rectangulo hecho de la aplicada, y de la paralela sobredicha, igual à la quarta parte de la figura. (fig. 15.)

La recta RP toca à la hiperbola en P: tirese la aplicada PQ, y por el centro E hagase la EF paralela à dicha aplicada. Digo, que el rectangulo hecho de EF, PQ, es igual à la quarta parte de la figura, ù del rectangulo NLM.

Demonstr. (11.) Los rectangulos NRL, QRE son iguales: luego (14.6.Eucl.) tienen sus lados reciprocos; esto es, NR à QR, ò NO à PQ, como RE à RL, ò como EF à IL: (4.6. Eucl.) luego NO à PQ, es como EF à IL: luego el rectangulo de PQ, EF, es igual al rectangulo NO, IL; pero este (16.) es igual à la quarta parte de la figura: luego tambien lo es el rectangulo de PQ, EF.

PROP. XVIII. Theorema.

En la hiperbola, (fig. 16.) cuyo diametro es AB, y el centro C, y en quien es, (1.) como el rectangulo ADB al rectangulo AFB, assi el quadrado DE al quadrado FG: si se hace como el rectangulo ADB al mismo rectangulo ADB, mas el quadrado CB, assi el quadrado DE al quadrado DH: y assimismo, si se hace como el rectangulo AFB al mismo rectangulo AFB, mas el quadrado de CB, assi el quadrado de FG al quadrado de FI, la linea CHI que sale del centro, y passa por dichos puntos, es recta, y asimptotas; y quanto mas se alarga, mas se acerca à la hiperbola, sin que iamàs pueda concurrir con ella.

Demonstr. Por estàr la AB partida por medio en C, y haversele añadido la BD, es (6. 2. Eucl.) el rectangugulo ADB, mas el quadrado CB, igual al quadrado CD. Por la misma razon el rectangulo AFB, mas el quadrado CB, es igual al quadrado CF; pero el rectangulo ADB, por construccion, es al rectangulo ADB, mas el quadrado de CB, como el quadrado de DE, al quadrado de DH: luego el rectangulo ADB, al quadrado de CD, es como el quadrado de DE, al quadrado de DH: y de la misma suerte se infiere, que el rectangulo AFB, al quadrado de CF, es como el quadrado FG, al quadrado de FI; pero (1.) alternando los terminos, el rectangulo ADB, es al quadrado DE, como el rectangulo AFB, al quadrado FG: luego el quadrado CD al quadrado DH, es como el quadrado CF al quadrado FI: luego tambien serà (22. 6. Eucl.) la linea CD à DH, como CF à FI: luego CHI, es linea recta; (4.6. Euclid.) y porque el quadrado de FI, siempre excede al quadrado de FG, los puntos G, I, jamàs podràn concurrir; aunque el punto I, y los demàs que infinitamente se pueden continuar, siempre se iràn acercando mas à la hiperbola, por haver de ser siempre mayor la razon del quadrado de GF al quadrado de ED, que la del quadrado de IF al quadrado de HD, por ser la primera la misma del rectangulo AFB al rectangulo ADB, y la segunda la de los mismos rectangulos, juntos con el quadrado de CB añadido à cada uno.

PROP. XIX. Theorema.

En la misma construccion (fig. 16.) el rectangulo HEL, es igual al rectangulo IGN.

PAra la demonstracion se ha de advertir, que (6.2. Eucl.) si del quadrado de CD se quita el rectangulo ADB, queda el quadrado de CB; y si del quadrado de CF se quita el rectangulo AFB, queda tambien el mismo quadrado de CB, como consta claramente de la demonstr. antec. Tambien por estàr la LH dividida por medio en D, y desigualmente en E, si del quadrado de DH se quita el quadrado de DE, queda el rectangulo HEL; (5.2. Euc.) y assimismo, si

si del quadrado de FI se quita el quadrado de FG, queda el rectangulo IGN. Esto supuesto,

Demonstr. (18.) Como el quadrado de CD, al quadrado de CF, assi es el quadrado de DH, al quadrado de FI; y tambien (1.) como el rectangulo ADB, al rectangulo AFB, assi es el quadrado de DE, al quadrado de FG: luego si del quadrado de CD, se quita el rectangulo ADB, y del quadrado de CF se quita el rectangulo AFB, y del quadrado de DH el quadrado de DE, y del quadrado de FI el quadrado de FG, los residuos seràn tambien en la misma razon proporcionales: luego serà como el quadrado de CB, al mismo quadrado de CB; assi el rectangulo HEL, al rectangulo IGN; pero CB con CB, tiene razon de igualdad: luego dichos rectangulos son iguales.

COROLARIO.

DE aqui se colige otra vez, que IG, es menor que HE: porque siendo los rectangulos HEL, IGN iguales, tendràn (14. 6. Euc.) los lados reciprocos, y serà HE à IG, como GN à EL; pero GN, es mayor que EL: luego HE, es mayor que IG.

PROP. XX. Theorema.

Si por el vertice de la hiperbola passa una tangente, cuyo quadrado sea igual à la quarta parte de la figura, las lineas tiradas del centro por sus extremidades seràn asimptotas. (fig. 17.)

SEa MN diametro de la hiperbola, cuyo centro es C: por el vertice V passe la tangente PV, cuyo quadrado, ò el de VQ, sea igual à la quarta parte de la figura; esto es, sea la quarta parte del rectangulo hecho del diametro determinado MV, y del parametro VL. Digo, que las lineas CP, CQ son asimptotas, que acercandose siempre à la hiperbola, jamàs podràn concurrir con ella: si se dixere que pueden concurrir, sea en qualquier punto G; tirese la aplicada GN, que serà paralela à PV. (7.)

De-