Demonstr. MV à VL, es como el quadrado de MV, al rectangulo MVL; (1.6.Euc.) y siendo el quadrado de CV, la quarta parte del quadrado de MV, y el quadrado de PV por suposicion, la quarta parte del rectangulo MVL, serà MV à VL, como el quadrado de CV, al quadrado de PV; ò como el quadrado de CN, al quadrado de NG, (4.6.Euc.) por suponerse concurrir la CP en G; pero MV à VL, es (*corol.* 2.2.) como el rectangulo MNV, al quadrado de NG: luego la misma razon tienen el rectangulo MNV, y el quadrado de CN, con el quadrado de GN: luego el rectangulo MNV, y el quadrado de CN seràn iguales, contra la *prop.* 6. *lib.* 2. Eucl. luego la CP, no puede jamàs concurrir con la hiperbola: à mas de esto, siempre se va acercando mas à ella, porque las paralelas ZX, ON terminadas en la CO, crecen (2.6. Eucl.) segun la razon de CV à VP; y las aplicadas XT, NG crecen, (1.) segun la razon del rectangulo MXV, al rectangulo MNV, que es mayor razon que la sobredicha, por componerse de las razones de MX à XV, y de MN à NV, que son mayores que la de CV à VP: luego la hiperbola se va continuamente acercando mas à la CO, sin poder jamàs concurrir con ella: luego la CPO, es asimptotas.

PROP. XXI. Theorema.

Qualquiera tangente de la hiperbola corta entrambas asimptotas, y queda dividida por medio en el punto del contacto, y el quadrado de su mitad, es igual à la quarta parte de la figura. (*fig.* 17.)

La linea VL, toca à la hiperbola en V, y del centro C salen las asimptotas CO, CK. Digo lo primero, que dicha tangente corta entrambas asimptotas. La razon es, porque (corol. de la *propos.* 4.) las paralelas à la tangente tiradas dentro de la hiperbola la cortan por entrambas partes, y tambien al diametro; y por consiguiente, continuadas, cortan las dos asimptotas: luego la tangente tambien las corta.

Di-

Digo lo segundo, que el punto V del contacto corta la tangente en dos partes iguales VP, VQ, y que sus quadrados son iguales à la quarta parte de la figura; porque si el quadrado de VP, y lo mismo digo de VQ, no fuesse igual à la quarta parte de la figura, se podria alargar, ò acortar de suerte, que su quadrado fuesse igual à la quarta parte de la figura; y por su extremidad se tiraria una linea distinta de la CO, que (20.) seria tambien asimptotas, lo que es impossible, como consta de lo demonstrado acerca de estas lineas: luego el quadrado de VP, y assimismo el de VQ, es igual à la quarta parte de la figura; y dichas lineas son entre sì iguales. Lo mismo que se ha dicho de la tangente PQ, se ha de entender de otra qualquiera tangente.

COROLARIOS.

De aqui se colige, que ninguna tangente de la hiperbola puede passar por el centro, por cortar necessariamente las asimptotas en dos distintos puntos, como se ha demonstrado.

2 *Coligese tambien el modo de tirar una tangente à la hiperbola desde un punto P, dado en la asimptota. Dividase PC por medio en L: tirese la LV, paralela à la CK, la qual cortarà la hiperbola en V: tirese la PV, y serà tangente; porque en el triangulo PCQ, (2.6. Eucl.) es PV à VQ, como PL à LC; pero èstas son iguales: luego tambien lo son PV, VQ: luego PQ es tangente.*

PROP. XXII. Problema.

Dadas dos lineas que formen un angulo, y dado un punto dentro del mismo angulo, descrivir una hiperbola por el dicho punto, cuyas asimptotas sean las lineas sobredichas. (*fig.* 18.)

Sean dadas las dos lineas AB, AC, que forman el angulo BAC, y sea dado el punto D, por el qual se ha de descrivir la hiperbola, cuyas asimptotas han de ser AB, AC.

Ope-

Operacion. Tirese la recta DA, y haganse DA, AE iguales; y el punto A, serà el sentro de la hiperbola, y DE su diametro determinado. Tirese la DF, paralela à AB, y haganse AF, FC iguales; y tirese la CDB, y (2.6.Euc.) seràn las BD, DC iguales: hallese una tercera proporcional à las lineas AD, BC, y sea G, que servirà de parametro. Dado pues el diametro ED, y el parametro G, se descrivirà facilmente la hiperbola en esta forma. Hagase DH, igual al parametro G; tirese la EH larga à discrecion; y tirense las IK, que se quisiere, paralelas à DH; y entre cada DI, y cada IK, hallese una media proporcional IL: y por los puntos L, se descrivirà la hiperbola DLL, &c. y las AC, AB, seràn sus asimptotos.

Demonstr. Por ser las IL medias proporcionales entre las DI, IK, seràn sus quadrados iguales à los rectangulos DIK: luego (*corol.* 3. *propos.* 2.) los puntos L, L, forman la hiperbola. Tambien por ser la BC media proporcional entre el diametro ED, y el parametro DH, serà el quadrado de BC, igual al rectangulo de ED, DH; y por consiguiente, el quadrado de DC, serà la quarta parte del rectangulo de ED, DH, ù de la figura: luego (20.) las AB, AC son asimptotas.

PROP. XXIII. Theorema.

Si del centro se tira una recta por el punto del contacto, dividirà todas las paralelas à la tangente en dos partes iguales, y serà diametro. (fig. 18.)

LA recta BC toca la hiperbola en el punto D. Digo, que la recta tirada del centro A, por dicho punto D, divide por medio en I, todas las HL, paralelas à BC; y por consiguiente, que la recta ADI es diametro.

Demonstr. Tiradas las asimptotas AM, AO, queda formado el triangulo AMO; y tirada la AI, forma con las paralelas todos los triangulos AMI, proporcionales con el triangulo ABD: (2. 6. Euc.) y assimismo todos los AIO, proporcionales con ADC: luego serà AI con IM, como AD con DB; y AI con IO, como AD con DC: pero por ser las DB, DC (21.) iguales, la misma razon tiene AD con

con DB, que con DC: luego la misma razon tiene tambien AI con IM, que con IO: luego las IM, IO son iguales. Por la misma razon son iguales en el triangulo ENK, las IN, IK: luego las medias proporcionales entre DI, IK, seràn iguales à las medias proporcionales entre DI, IN, que (22.) son las IL, IH: luego estas lineas son iguales; y por consiguiente, ADI es diametro.

PROP. XXIV. Theorema.

Si el diametro PVT (fig. 19.) corta por medio la RS, la tangente QV, tirada por el vertice V, serà paralela à RS.

DEmonstr. Si no es paralela, tirese la SZ, paralela à QV: luego (23.) quedarà dividida por medio en O; y como la SR se suponga dividida por medio en T, serà como SO à OZ, assi ST à TR: luego (2.6.Euc.) la recta RZ serà paralela à OT, siendo assi, que (corol. *prop.* 1.) alargada concurre con la TOP, fuera de la seccion: luego la VQ no es paralela à SZ, si à la RS.

COROLARIO.

SI la QV es tangente, y la RS su paralela està dividida por medio en T, la recta VT serà diametro; porque si no lo fuesse, lo seria otra linea, como VN, y èsta (def. 3.) dividiria por medio la RS, en otro punto N: luego estaria dividida por medio en N, y en T, lo que es impossible.

PROP. XXV. Theorema.

Qualquier linea que corta à la hiperbola en dos puntos, corta entrambas asimptotas; y los segmentos de dicha linea, comprehendidos entre la hiperbola, y las asimptotas, son iguales. (fig. 20.)

LA recta AC corta la hiperbola en los puntos A, y C. Digo, que prolongada, corta tambien entrambas asimptotas DE, y DF, y que los segmentos AE, CF son iguales. Dividase AC por medio en G, y tirese del centro D

D, la linea DG, que cortarà la hiperbola en el punto B; por el qual hagase la HBK, paralela à AC.

Demonstr. (corol. antec.) La BG es diametro, y la HK es tangente, (7.) la qual corta (21.) entrambas asimptotas: luego tambien las cortarà su paralela AC; y siendo (21.) las BH, BK iguales, tambien lo seràn las GE, GF; y quitando las GA, GC, iguales, quedaràn AE, CF iguales.

PROP. XXVI. Theorema.

Si à la tangente de una de las hiperbolas opuestas, se le hace una paralela por el centro, èsta serà el diametro conjugado del que passa por el contacto. (*fig.* 21.)

LA linea AG toca à la hiperbola inferior en A: hagase por el centro O, su paralela OR. Digo, que OR es el diametro conjugado de OA, que passa por el contacto: tirese qualquiera linea HF, paralela à AO, que encuentre con entrambas hiperbolas en H, F; y de estos puntos tirense las aplicadas FN, HD.

Demonstr. Las aplicadas FN, HD, son paralelas, por estàr aplicadas à un mismo diametro; y como ND, FH, se supongan ser paralelas, seràn NF, DH iguales; y (1.) los rectangulos ANE, EDA, seràn iguales; y por consiguiente seràn AD, EN iguales, como tambien ON, OD, y sus paralelas RF, RH: luego HF està dividida por medio en R. Lo mismo demonstrarè de qualquier otra paralela: luego OR es diametro conjugado del diametro AE, segun la *defin.* 11.

PROP. XXVII. Theorema.

Las asimptotas de las hiperbolas opuestas son comunes. (*fig.* 22.)

SEa EB uno de los diametros de las hiperbolas opuestas, cuyo centro C. Digo, que las asimptotas son comunes à entrambas.

Preparacion. Tirense por los puntos E, y B, dos tangentes FBG, DEA, que seràn paralelas à las aplicadas: (*def.* 3.) cortense las rectas EA, ED; BG, BF iguales: y sean tales, que

que su quadrado sea igual à la quarta parte de la figura, propia del diametro EB; y juntense las rectas CD, CA, CF, CG.

Demonstr. Las lineas BG, DE, son paralelas: luego los angulos alternos DEC, GBC, son iguales; y como BG, DE sean por construccion iguales, como tambien BC, CE, seràn (4.1.Eucl.) los triangulos DCE, BCG, totalmente iguales: luego sus angulos en C, son iguales; y siendo verticales opuestos, las lineas DC, CG, son una linea recta; y porque las lineas DE, AE, FB, BG, pueden la quarta parte de la figura, seràn (20.) las DG, FA asimptotas comunes à entrambas hiperbolas.

PROP. XXVIII. Theorema.

Si por los puntos en que las paralelas TV, HI (fig. 23.) cortan à la hiperbola puesta dentro de sus asimptotas, se tiran las ON, LM, paralelas à GI; y las PQ, RS, paralelas à GH, seràn proporcionales RS à PQ, como LM à ON.

DEmonstr. (25.) Las TO, PV son iguales, como tambien HL, RI; y los triangulos RSI, PQV son semejantes, por tener sus lados paralelos, como tambien lo son HML, TNO, assi entre sì, como à los primeros: luego tienen los lados proporcionales, como RS à PQ; assi LM à ON.

PROP. XXIX. Theorema.

Si la linea LR (fig. 24.) corta la hiperbola, y de las intersecciones se tiran RS, LM, paralelas à las asimptotas GH, GI, seràn los rectangulos LMG, RSG, iguales.

DEmonstr. (25.) Las HL, RI son iguales; y los triangulos RSI, HML, son semejantes: luego seràn RS, HM; SI, ML iguales. Tambien por ser semejantes los triangulos ISR, IGH, serà RS à HG, como IS, ò ML à GI; y dividiendo, serà como RS à MG; assi ML à GS: lue-

luego el rectangulo, ò paralelogramo equiangulo hecho de los extremos RS, GS, es igual al de los medios MG, ML.

PROP. XXX. Theorema.

Si à una de las asimptotas se tiran dos paralelas, los segmentos que hacen en la otra asimptota son proporcionales con las paralelas. (fig. 25.)

Tirense arbitrariamente las rectas AB, CD, paralelas à la asimptota EF. Digo, que son proporcionales CD à AB, como BE à DE. Por los puntos C, y A, tirese la linea CA, que cortarà las asimptotas en I, y en F: tirense tambien por A, y C, las lineas GH, AG, paralelas à la otra asimptota ED, y seràn (29.) los rectangulos AGEB, CDEH iguales: luego (14. 6. Eucl.) tendràn sus lados reciprocos; esto es, CD à AB, como BE à ED.

PROP. XXXI. Theorema.

En la misma suposicion, si se tira la EC, seràn BA, DC, BI continuas proporcionales. (fig. 25.)

Demonstr. (30.) Es BA à CD, como DE à BE; pero como DE à BE, assi es DC à BI: luego BA à CD, es como DC à BI.

PROP. XXXII. Theorema.

Si à la asimptota AG (fig. 26.) se tiran dos paralelas BC, DE; y por el punto C, se tira la ACF, hasta encontrar con la DE, alargada en F, seràn las DE, BC, DF continuas proporcionales.

Demonstr. (30.) Son proporcionales DE à BC, como AB à AD; pero como AB à AD, assi es BC à DF: (2. 6. Eucl.) luego como DE à BC, assi es BC à DF.

PROP.

PROP. XXXIII. Theorema.

Si una asimptota se divide en partes proporcionales, y por ellas se tiran paralelas à la otra asimptota, hasta cortar la hiperbola, estas paralelas seràn proporcionales. (fig. 26.)

En la asimptota AD, sean proporcionales AH à AB, como AB à AD; y por los puntos H, B, D, tirense hasta la hiperbola las rectas HI, BC, DE. Digo, que las rectas DE, BC, HI, son proporcionales.

Demonstr. (30.) AH à AB, es como BC à HI; y como *AB* à *AD*, assi es *DE* à *BC*; pero *AH*, *AB*, *AD*, se suponen proporcionales: luego tambien lo son *DE*, *BC*, *HI*.

COROLARIOS.

1 *Las DE, HO, son iguales, porque (32.) DE, BC, DF, son proporcionales; pero las HO, BC, DF, son proporcionales, (2. 6. Euc.) por serlo por suposicion las AH, AB, AD: luego DE, HO, son iguales. Assimismo DE, BC, HI, son proporcionales; pero (32.) tambien lo son DE, BC, DF: luego HI, y DF, son iguales.*

2 *Por suponerse AH, AB, AD, proporcionales, y ser HO, BC, DF, paralelas, son (2.6. Euc.) las AO, AC, AF, tambien proporcionales.*

PROP. XXXIV. Theorema.

Si se tiran algunas paralelas à una de las asimptotas, que sean entre sì proporcionales, y terminadas entre la otra asimptota, y la hiperbola; y del centro se tira una recta à la ultima de ellas, se continuarà una misma proporcion. (fig. 27.)

Las rectas BA, DC, FE, HG, son proporcionales, y paralelas à la asimptota MN; y se ha tirado la MG del centro à la ultima HG. Digo, que BA, DC, FE, HG, FL, DK, BI, son continuas proporcionales.

Demonstr. Por ser BA, DC, EF, HG, continuas proporcionales, tambien las MB, MD, MF, MH, tendràn la misma pro-

proporcion, aunque con orden inverso; esto es, serà como FE à HG, assi HM à FM; (30.) pero como HM à FM, assi es HG à FL, (2.6.Eucl.) y como FM à DM; assi FL à DK, &c. luego se continua la misma proporcion en las lineas sobredichas.

PROP. XXXV. Theorema.

Si se tiran algunas paralelas à una de las asimptotas, que sean entre sì proporcionales, y terminadas entre la otra asimptota, y la hiperbola; y del centro se tira una recta à la primera de ellas, se continuarà una misma proporcion. (fig. 28.)

SEan las lineas *HG*, *FE*, *DC*, *BA*, proporcionales, y paralelas à la otra asimptota *MN*: tirese del centro *M*, la *MA* prolongada; y continuense las paralelas hasta esta linea. Digo, que se continùa la misma proporcion en las lineas enteras; esto es, que son proporcionales *HG*, *FE*, *DC*, *BA*, *DL*, *FK*, *HI*.

Demonstr. (30.) Assi es *DC* à *BA*, como *MB* à *MD*; pero como *MB* à *MD*, assi es *BA* à *DL*: luego como *DC* à *BA*, assi es *BA* à *DL*; y assi de los demàs: luego se continùa la misma proporcion en la forma dicha.

COROLARIO.

DE aqui se sigue, que si se hacen proporcionales MB, MD, MF, &c. las paralelas HG, FE, DC, &c. seràn proporcionales.

PROP. XXXVI. Theorema.

Si à entrambas asimptotas se tiran dos paralelas proporcionales, resultaràn dos quadrilateros iguales. (fig. 29.)

LAs AG, BI son paralelas à la asimptota ED; y las EC, FB son paralelas à la asimptota DG, y son proporcionales AG à BI, como EC à FB. Digo, que tiradas las CB, AB, el quadrilatero AGBI, es igual al quadrilatero

ro ECBF: continuense las IB, FB, y perficionense los paralelogramos HF, MI.

Demonstr. AG à BI, es como EC à FB; y siendo (30.) como AG à BI, assi DI à DG; y como EC à FB, assi DF à DE, serà DI à DG, como DF à DE: luego el rectangulo DB, al rectangulo DM, es como el mismo rectangulo DB, al rectangulo DH: luego los rectangulos DM, DH, son iguales. Tambien por ser AG à IB, ò GM, como EC à FB, ò EH; serà tambien GA à GM, como EC à EH; y componiendo, serà GM à AM, como EH à CH; pero como GM à AM, assi es el rectangulo MI, al rectangulo AMB: y como EH à CH, assi es el rectangulo EB, al rectangulo CHB: luego el rectangulo AMB, es igual al rectangulo CHB: luego los triangulos AMB, CHB, que son la mitad de dichos paralelogramos, son iguales: luego quitados de los paralelogramos iguales MI,HF, los quadrilateros residuos AGBI, ECBF, son iguales.

PROP. XXXVII. Theorema.

Tirada la CO, (fig.29.) paralela à la asimptota ED, serà el rectilineo AGIB, igual al rectilineo CBIO.

DEmonstr. Por suponerse AG à BI, como EC à FB, es (30.) DI à DG, como DF, ò BI su igual à DE, ò OC su igual: son pues proporcionales DI à DG,como BI à OC;pero como DI à DG,assi es (30.) AG à BI: luego AG à BI, es como BI à CO: luego componiendo,AG, mas MG à BI, es como BI, mas CO à CO: luego dividiendo,serà BI, menos AG; esto es, MA, ò CH, su igual à BI, como CO menos BI; esto es, como HB, ò su igual MB à CO; con que son proporcionales CH à BI, como BM à CO: luego el rectangulo HO, hecho de los extremos, es igual al rectangulo MI, hecho de los medios; y quitando de dichos rectangulos iguales los triangulos iguales CBH, AMB, quedaràn los quadrilateros AGIB, COIB iguales.

COROLARIO.

Lo mismo que se ha demonstrado de los quadrilateros AGIB, CBIO, por ser proporcionales las lineas AG, BI, CO, se demonstrarà de otros qualesquiera quadrilateros, formados con paralelas à una asimptota, mientras sean proporcionales; esto es, que todos seràn iguales.

PROP. XXXVIII. Theorema.

El mayor de todos los triangulos que se pueden inscrivir en la hiperbola, es el que tiene con ella un mismo vertice, y es mayor que la mitad de la hiperbola. (*fig.* 30.)

SEa la hiperbola MUN terminada con la recta MN; su vertice es V; y el diametro es VO. Digo, que el triangulo MVN, es el mayor de todos los que se pueden inscrivir en dicha hiperbola. Por V tirese la PVR, paralela à MN, y serà tangente de la hiperbola en U: luego el triangulo que tiene el vertice en V, serà mayor que otro qualquiera inscrito en la hiperbola sobre la misma basa MN: porque ninguno de estos llegarà à la tangente, y por consiguiente tendràn todos menor altura.

Digo tambien, que dicho triangulo MVN, es mayor que la mitad de la hiperbola, porque (41. 1. Eucl.) es la mitad del paralelogramo MR; y como este sea claramente mayor que la hiperbola, serà dicho triangulo mayor que la mitad de la hiperbola.

PROP. XXXIX. Problema.

Si en la hiperbola se inscrive el triangulo maximo, y los triangulos maximos inscritos, en los segmentos residuos son iguales. (*fig.*31.)

EL triangulo ABC, sea el maximo que se puede inscrivir en la hiperbola, cuyo centro sea D; y la DBE parta por medio la AC: dividanse por medio los lados AB, BC en F, y G; tirense los diametros DMG, DHF. Digo, que los triangulos AHB, BMC, que (38.) son los maximos que se pueden inscrivir en aquellos segmentos residuos, son iguales.

Preparacion. Tirese por H la aplicada HM, que quedarà dividida por medio en L: tirese tambien la FG, que serà paralela à AC, y quedarà dividida por medio en N: tambien tirando la HI de la una interseccion à la otra, serà tambien paralela à FG, y quedarà dividida por medio en L, como la HM: luego HI, y HM son una misma linea.

Demonstr. Por ser FG, HM paralelas, es (2.6.Eucl.) GM à MD, como FH à HD: tambien por ser NF, NG iguales, son los triangulos DNF, DNG iguales, como tambien FBN, NBG: luego los restantes FBD, GBD son iguales; y como el triangulo FBH al triangulo HBD, sea como HF à HD; esto es, como GM à MD, segun lo dicho arriba; serà GBM à MBD, como FBH, à HBD; y componiendo, FBD à FBH, como GBD à GBM; y siendo el primero, y tercero iguales, tambien lo seràn el segundo, y quarto; esto es, FBH, y GBM: luego sus duplos AHB, BMC son tambien iguales.

PROP. XL. Theorema.

Las lineas que juntan dos paralelas en la hiperbola, cortan dos segmentos, cuyos triangulos maximos son iguales. (*fig.* 32.)

LAs lineas AB, CD, juntan en la hiperbola las dos paralelas AD, BC. Digo, que los triangulos maximos de los segmentos AB, CD son iguales.

Preparacion. Dividase AD por medio en K; y del centro E tirese el diametro EK, que cortarà por medio la paralela BC; partanse por medio las AB, CD en F, y G; y tirese la FG: tirense los diametros EHF, EIG; y la ordenada HM, que como se demonstrò en la prop. anteced. vendrà al punto I; y serà HI paralela à AD; y por consiguiente à FG; y (2.6.Euc.) serà GI à IE, como FH à HE: tirense las BN, CN, BE, CE.

Demonstr. Por ser BC, AD paralelas, y estàr las AB, DC divididas por medio en F, y G, seràn FG, AD paralelas; y la FG estarà tambien dividida por medio, como sus paralelas BC, AD: luego los triangulos FBN, NCG son iguales, como tambien BNL, CNL, y BEL, CEL: quitados estos triangulos de los iguales FEN, GEN, restaràn iguales los triangulos FEB, GEC; y por ser HI paralela à FG, serà como GI à IE, assi FH à HE; y tiradas las BH, CI, se demonstrarà como antes, que los triangulos HEB, IEC son iguales; y por consiguiente los residuos FHB, GIC: luego sus duplos AHB, DIC son iguales.

PROP. XLI. Theorema.

Si de los extremos de las aplicadas se tiran rectas al vertice, los segmentos convexos que resultan, son iguales; y si por los mismos extremos, y vertice se tiran paralelas à una asimptota, los segmentos concavos que resultan, son tambien iguales. (*fig.* 33.)

Sea HM el diametro, y su aplicada NI, de cuyos extremos al vertice V corran las NV, IV. Digo lo primero, que los segmentos convexos NOV, IPV son iguales.

Demonstr. Divididas NV, IV por medio en R, S, y tirados los diametros HR, HS, y tiradas las rectas NO, OV, IP, PV, resultan (39.) entrambos triangulos iguales. Assimismo, si se formassen otros triangulos sobre NO, PI, serian tambien iguales; y assi infinitamente en los segmentos residuos; y tantos se formaràn en la una parte como en la otra. Llevandose pues (38.) cada uno de estos triangulos mas de la mitad del segmento en que se inscrive, vendràn à degenerar en los segmentos parabolicos, de tal manera, que lo que sobrare serà menos que qualquiera cantidad assignable, como demonstrè al principio del *lib.* 8. de la *Geomet. Element.* que es el 12. de Eucl. luego siendo cada triangulo de un segmento igual al otro su correspondiente en el otro segmento, seràn dichos segmentos iguales. (*Porisma antes de la propos.* 2. *lib.* 12. *Euclid.*)

Por los puntos N, V, I tirense tres paralelas à la asimptota, que son NQ, VT, IL. Digo lo segundo, que los segmentos concavos IPVTL, NOVTQ son iguales.

Demonstr. Como se demonstrò en la *propos.* 37. las tres lineas IL, VT, NQ son proporcionales: luego (37.) los rectilineos ILTU, NVTQ son iguales: luego si de estos se quitan los segmentos convexos sobredichos que se han probado iguales, restaràn los segmentos concavos ILTV, NVTQ iguales.

PROP. XLII. Theorema.

Si una asimptota se divide en partes proporcionales, y por los puntos dividentes se tiran paralelas à la otra asimptota, estas seràn proporcionales; y los espacios comprehendidos entre ellas, seràn iguales. (*fig.* 34.)

Dividase la asimptota AC en partes proporcionales; esto es, sea AG à AH, como AH à AI: y como AH à AI, assi AI à AO, &c. y tirense las GD, HE, &c. paralelas à la otra asimptota AL. Digo, que las GD, HE, &c. son geometricamente proporcionales; y los segmentos concavos CM, ON, &c. son iguales.

Demonstr. Por ser AG, AH, AI, continuas proporcionales, son (33.) las CF, OM, IN, &c. proporcionales; y (41.) los segmentos concavos CM, ON, &c. son iguales.

Esta es la propiedad admirable de la hiperbola, que demonstrò el insigne Geometra el P. Gregorio de San Vicente, de la Compañia de Jesus, en que se ve que las paralelas CF, OM, &c. dan los numeros que crecen en progression Geometrica; y los espacios concavos que forman son iguales; y por consiguiente dan los logarithmos correspondientes à cada linea; esto es, el espacio CM es logarithmo de CF: el espacio CN, es logarithmo de OM: CE, de IN, &c. por proceder estos espacios en progression Arithmetica.

PROP.

PROP. XLIII. Problema.

Hallar las asimptotas de una hiperbola. (fig. 35.)

O*peracion.* Hallese (13.) qualquiera diametro AB de la hiperbola; y su centro C: hallase tambien (2.) su parametro BD: hallese una media proporcional entre el diametro AB, y el parametro BD; y serà BE, que se dividirà por medio en F: y haciendo BG igual à BF, se tiraràn del centro C las CG, CF, y èstas seràn las asimptotas.

Demonstr. El quadrado de BF, es la quarta parte del quadrado de BE, por estar BE partida por medio en F: y como BE sea media proporcional entre el diametro AB, y el parametro BD, serà su quadrado igual al rectangulo hecho de AB, BD, que se llama *figura*: luego el quadrado de BF es igual à la quarta parte de la *figura*: luego (20.) la CF, como tambien la CG, son asimptotas.

PROP. XLIV. Problema.

Hallar los focos de la hiperbola. (fig. 36.)

O*peracion.* Hallese (10.) el exe de la hiperbola, y sea AV: hallese tambien el (2.) parametro VP en la tangente VP perpendicular al exe. Hagase VE media proporcional entre AU, VP, que se partirà por medio en F; y haciendo centro en C, que lo es de la parabola, con la distancia CF descrivase el semicirculo LFH: y los puntos L, H seràn los focos de entrambas hiperbolas opuestas.

Demonstr. El quadrado de VF, como demonstrè en la prop. passada, es igual à la quarta parte de la *figura*; y por consiguiente la CFO es asimptota; pero la CL es igual à la CF: luego el punto L dista del centro C quanto es la CF, porcion de la asimptota comprehendida entre dicho centro, y la tangente VE: luego (*defin.* 16.) el punto L es el focus; y assimismo lo es en la hiperbola opuesta el H, por la misma razon.

PROP.

PROP. XLV. Problema.

Dada la porcion de diametro, que ha de caer dentro de la hiperbola, y una aplicada, descrivir la hiperbola. (fig. 37.)

SEa AB el diametro dado para dentro de la hiperbola, y la aplicada BD; y la razon del diametro determinado con el parametro, dada, ò elegida, sea la que hay de R à S.

Operacion. Hallese una tercera proporcional à las rectas AB, BD, y sea BC: conque el quadrado de BD, serà igual al rectangulo ABC: hagase aora como S à R; assi BC à BE: y tirese la EC: tirese por el vertice A la AL; y por qualquiera punto la FH, entrambas paralelas à la BC: sea FK media proporcional entre AF, FH; y el punto K, pertenecerà à la periferia de la hiperbola, (22.) cuyo vertice es A, el semidiametro determinado es AE, y el parametro AL. De la misma suerte se hallaràn quantos puntos se quisieren; y guiando por ellos una linea curva, quedarà descrita la hiperbola.

PROP. XLVI. Problema.

Descrivir una hiperbola al rededor de un triangulo dado. (fig. 38.)

SEa dado el triangulo NUO, à quien se ha de circunscrivir una hiperbola. *Operacion.* Dividase la basa NO por medio en T. Tirese TV larga à discrecion; y tirese MO: tirese qualquiera PQS, paralela à TO; y hagase PR media proporcional entre PQ, PS: conque serà el quadrado de PR, igual al rectangulo QPS. Digo, que los puntos N, V, R, O, estàn en la periferia de la hiperbola.

Demonstr. (2.6.Eucl.) La razon de TO à PS, es la misma que de TM à PM; y la razon de TO à PQ, es la misma que de TV à PV; y la razon del quadrado de TO, al rectangulo QPS, se compone de la razon de TO à PS, y de de la razon de TO à PQ: luego ſe compone de la razon de TM à PM, y de la razon de TV à PV; pero eſtas miſmas dos razones ſon las que componen la razon del rectangulo MTV, al rectangulo MPV: luego los quadrados de TO, PR, tienen la miſma razon que los rectangulos MTV, MPV: luego (1.) ſiendo MV el diametro determinado, ſeràn TO, PR las aplicadas: luego los puntos N, V, R, O, eſtàn en la hiperbola.

Otras practicas hallarà el curioſo en el P. Gregorio à S. Vincentio, y en el P. Milliet; pero baſtan las que ſe han dado para nueſtro intento.