1.1. Introducción

Objetivo

Comprender los conceptos intuitivos de punto, recta, plano y conocer los axiomas básicos de la Geometría Euclidiana.

Si preguntas a una persona cualquiera qué cosa es un cuerpo, seguramente recibirás respuestas como: un objeto, algo que se puede ver y tocar, por ejemplo un jarrón o una pelota, etc. Como puedes observar, en general se relaciona a la palabra cuerpo con objetos materiales. Ello no es totalmente correcto, pues sólo los cuerpos físicos son objetos materiales. Es decir:

- Un **cuerpo físico** es toda porción del espacio que está ocupada por materia.

Sin embargo, existe otro tipo de cuerpos que constituyen el objeto de estudio de la Geometría Plana, los cuerpos geométricos, que no son objetos materiales en general. Es decir:

- Un **cuerpo geométrico** es toda porción limitada del espacio (aunque no esté ocupada por materia).

La Geometría es la parte de las Matemáticas que estudia las propiedades de los cuerpos geométricos en general. Dichas propiedades pueden ser referidas tanto a las medidas de los cuerpos (longitud, área, volumen, etc.) como a las relaciones entre sus diferentes partes.

Los cuerpos geométricos elementales son el punto, la recta y el plano. Resulta imposible obtener una definición rigurosa de dichos conceptos, pues cualquier intento de definición de uno de ellos incluye siempre a alguno de los otros, sin poderse establecer un orden jerárquico que dé sentido globalmente a todas las definiciones. Así, podemos encontrar "definiciones" como las siguientes:

- Un *punto* es la intersección de dos rectas no paralelas.
- Una *recta* es la intersección de dos planos no paralelos.
- Un *plano* es el conjunto de todos los puntos determinados por tres puntos no colineales prefijados.

Sin embargo, cualquier persona es capaz de imaginar más o menos intuitivamente qué es un punto, una recta o un plano, viéndolos por ejemplo coma la esquina de una mesa, el borde de la mesa, o la superficie de la mesa. Luego, para desarrollar el concepto geométrico sólo resta tener en consideración los siguientes factores, que son de gran importancia en el trabajo geométrico y se obvian a menudo:

- el punto no tiene longitud,
- la recta contiene infinitos puntos, no tiene principio ni fin, su longitud es infinita y no tiene área,
- el plano contiene infinitos puntos y rectas, no tiene bordes, su área es infinita y no tiene volumen.

En el trabajo geométrico se dibuja la recta y el plano como objetos finitos por razones obvias de espacio, pero nunca se deben olvidar los factores anteriormente mencionados.

Otros conceptos elementales de la Geometría son los siguientes:

- Si en una recta se fija un punto O, entonces el conjunto formado por todos los puntos de la recta que se encuentran a un mismo lado del punto O, incluyendo el punto O, se llama **semirrecta** o **rayo**, y el punto O se llama **origen de la semirrecta**.
- Si en plano se fija una recta r, entonces el conjunto formado por todos los puntos del plano que se encuentran a un mismo lado de la recta, incluyendo la recta r, se llama **semiplano**.
- Una **superficie** es el conjunto de todos los puntos que limitan un cuerpo geométrico. Todo cuerpo geométrico plano es una superficie (conocida también como **figura plana**).

Además,

- Se dice que tres puntos son **colineales** si se encuentran todos sobre la misma recta, y **coplanales** si están en el mismo plano.
- Dos rectas son **paralelas** si se encuentran en el mismo plano y no tienen ningún punto en común.
- Dos planos son **paralelos** si no tienen ningún punto en común

Conociendo entonces estos conceptos primarios, la Geometría se desarrolla a partir de una serie de axiomas o postulados, los cuales son proposiciones que se consideran válidas gracias a la observación y la experiencia, y que no pueden ser demostradas con rigor matemático partiendo de conocimientos previos.

Algunos axiomas de la Geometría Euclidiana son los siguientes:

- Por un punto pasan infinitas rectas.
- Dos rectas se cortan a lo sumo en un punto.
- Dos puntos distintos determinan una recta.
- Tres puntos no colineales determinan un plano.
- Por un punto exterior a una recta dada se puede trazar una única recta que sea paralela a la anterior.

Este último axioma se conoce con el nombre de postulado de las paralelas y fue objeto de discusión en la Geometría durante muchos años. Se trataba de determinar si él constituía un axioma o no, es decir, si podía ser demostrado con la ayuda de los axiomas ya conocidos o no. Luego de mucho tiempo de estudio se logró determinar que efectivamente el axioma de las paralelas sí podía ser considerado como tal, demostrándose además que su sustitución por otro podía conducir al desarrollo de otras Geometrías llamadas no euclidianas, como son los casos de la Geometría Elíptica y la Geometría Hiperbólica, donde en el lugar de el postulado de las paralelas se considera que:

- Por un punto exterior a una recta dada se pueden trazar infinitas rectas que sean paralelas a la anterior, o
- Por un punto exterior a una recta dada no se puede trazar ninguna recta que sea paralela a la anterior.

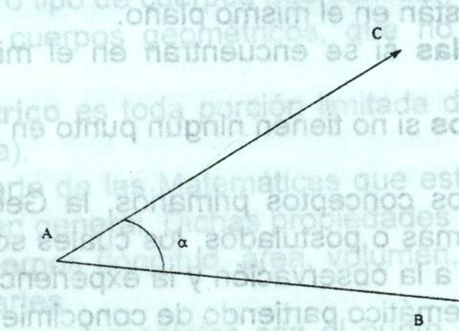
1.2. Ángulos

Objetivos

Dominar el concepto de ángulo (y su notación) y de grados y radianes como unidades de medición de ángulos

Transformar medidas de ángulos en grados a radianes y viceversa, y aplicarlo a la solución de problemas prácticos de medición de ángulos.

- Si dos semirrectas o rayos tienen el mismo origen, entonces el conjunto unión de ambas es lo que se llama un **ángulo**. Las dos semirrectas se llamarán **lados del ángulo** y el origen común de las semirrectas se llamará el **vértice** del mismo.



En la figura precedente las semirrectas son: AB y AC con origen común en A.

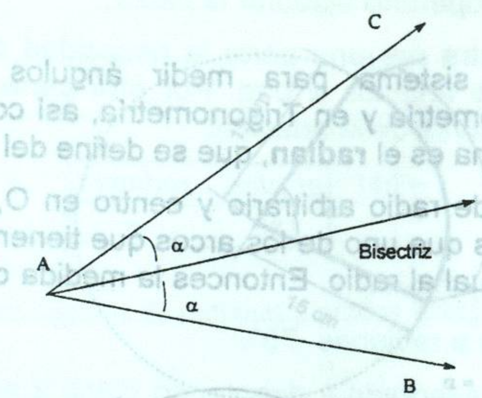
Para designar el ángulo que forman AB y AC se usa una de las dos notaciones siguientes: ∠ BAC o ∠ CAB situando la letra del vértice en el medio.

A veces, con la finalidad de abreviar, se designa el ángulo con la letra del vértice; en el caso de nuestra figura, así ∠ A. Desde luego esto último se hace si no hay más de un ángulo con el mismo vértice.

Si revisas otros libros encontrarás otras definiciones de ángulo que se refieren en general a regiones planas determinadas por dos semirrectas de origen común o por dos rectas que se cortan en un punto. Sin embargo, en casi todas ellas surge alguna ambigüedad al tratar de determinar la región en cuestión.

Esto conduce a otra forma de denotar los ángulos, haciéndolo a través de letras del alfabeto griego que marcan en la gráfica la región determinada por el ángulo, como se observa en la figura anterior, así se denota ∠ BAC = ∠ α.

- Así mismo, se llama **bisectriz** del ángulo ∠ BAC a la semirrecta que tiene su origen en el vértice del ángulo y lo divide en dos ángulos de igual magnitud.



En su obra "La isla misteriosa" Julio Verne describe como el ingeniero Ciro Smith calcula aproximadamente la altitud y longitud geográficas de la isla Lincoln con herramientas muy rústicas, pero con la ayuda indiscutible del cálculo geométrico. Para determinar la latitud mide un ángulo determinado y expresa el resultado en grados. Para ello construye un instrumento utilizando un círculo, cuya circunferencia divide en 360 partes iguales. Así logra expresar la medida del ángulo buscado en grados sexagesimales.

Existen diferentes sistemas de medición de ángulos. Los más utilizados y conocidos son el sistema sexagesimal y el circular, los cuales se describen a continuación:

Sistema Sexagesimal

Consideremos una circunferencia con centro en O y de radio arbitrario. Supongámosla dividida en 360 partes (es decir arcos) todos iguales, mediante puntos situados sobre la circunferencia.

Sean A y B dos puntos de división consecutivos. Si los unimos con el centro O se formará el ángulo ∠ AOB, que mide, por definición, un grado sexagesimal, y se denota: 1° (se lee: "un grado").

Consecuencia inmediata de lo anterior es que en una circunferencia completa hay 360 grados.

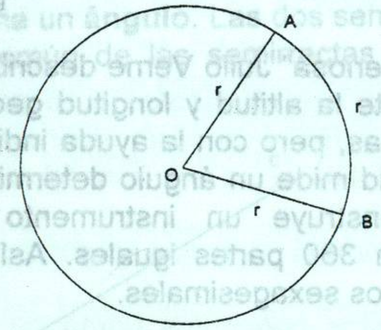
El nombre sexagesimal se debe a que cada grado se divide en 60 partes iguales que se llaman minutos, por tanto un minuto es 1/60 de grado, es decir, la sexagésima parte de un grado. Un ángulo de un minuto se designa así: 1'. A su vez, el minuto se divide en 60 partes que se llaman segundos. Un ángulo de un segundo se denota así: 1". De modo que si escribimos que un ángulo mide: 20° 15 ' 34", leemos: veinte grados, quince minutos y treinta y cuatro segundos.

El transportador es entonces una herramienta muy útil para obreros, técnicos y profesionistas, pues no sólo permite medir ángulos en grados sexagesimales, sino que también ayuda a dibujar cualquier ángulo conociendo su medida.

Sistema Circular

Veremos ahora otro sistema para medir ángulos que se emplea muy frecuentemente en Geometría y en Trigonometría, así como en Física. La unidad adoptada en este sistema es el **radian**, que se define del modo siguiente:

En una circunferencia de radio arbitrario y centro en O, sean A y B dos puntos situados sobre ella tales que uno de los arcos que tienen sus extremos en A y en B tenga una longitud igual al radio. Entonces la medida del ángulo $\angle$ AOB es, por definición, un radian.



El hecho de que el arco AB tenga longitud igual al radio lo indicamos así: $\overset{\frown}{AB} = r$.

Entonces:

$\angle$ AOB = 1 radian.

Como es lógico para poder expresar un ángulo, dado en el sistema sexagesimal en el otro sistema, o sea, en radianes, debemos tomar un ángulo de un radian y expresarlo en el sistema sexagesimal (o al revés). Para lograrlo recordemos que la longitud de la circunferencia de radio ***r*** es 2π ***r***, donde π es la letra griega pi que se usa para designar una constante cuyo valor aproximado es de 3.1416.

Si dividimos 2π ***r*** por ***r*** nos dará el número de radianes que hay en un ángulo de una vuelta completa. Es decir que 2π radianes equivale a 360°, ó

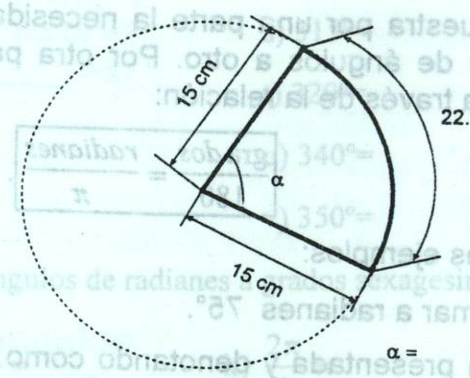
$2\pi = 360°$.

Luego,

$$1 \text{ radian} = \frac{180}{\pi} \text{ grados.}$$

Imagina la siguiente situación:

Un ingeniero eléctrico ha diseñado una pieza metálica para un equipo de transporte eléctrico. El siguiente dibujo muestra el diseño de la vista frontal de la pieza realizado por el ingeniero:



El operario que debe elaborar la pieza dispone para ello de una pieza metálica redonda de 30 cm de diámetro, de manera que sólo necesita conocer la medida del ángulo α formado por los bordes rectos de la pieza. Pero, al observar el dibujo descubre que el ingeniero ha olvidado señalar ese dato y ya no tiene modo de localizarlo para obtener la información.

Entonces vuelve a observar detenidamente el dibujo y nota que el ángulo α corresponde a un arco de longitud l=22.5 cm en una circunferencia de radio r=15 cm. Pero el operario recuerda que un radian es la medida de un ángulo con vértice en el centro de una circunferencia de radio r, correspondiente a un arco de longitud igual al radio, es decir, de longitud r. Así obtiene rápidamente que

$$\alpha = \frac{l}{r} \text{ radianes, es decir}$$

$$\alpha = \frac{22.5}{15} = 1.5 \text{ radianes.}$$

Pero, aquí no terminan sus dificultades, pues ahora descubre con sorpresa que sólo dispone de un transportador para dibujar el ángulo sobre la pieza redonda, por lo que necesita conocer la medida del ángulo α en grados sexagesimales. De nuevo esta vez, sus conocimientos de Matemáticas Elementales lo ayudan a solucionar el problema, y piensa así:

Si conozco que 180° equivalen a π radianes, entonces, llamándole x a la medida del ángulo α en grados sexagesimales, puedo plantear la relación: "1.5 radianes es a π radianes como x grados es a 180°". Luego, tengo que

$$\frac{1.5}{\pi} = \frac{x}{180}, \text{ es decir}$$

$$x = (180)\frac{1.5}{\pi} = \frac{270}{\pi} = 85.9.$$

Entonces el ángulo α mide 85.9°.

De esa manera pudo el operario elaborar la pieza.

Este ejemplo nos muestra por una parte la necesidad de saber convertir de un sistema de medición de ángulos a otro. Por otra parte nos indica el camino a seguir para hacerlo, a través de la relación:

$$\boxed{\frac{grados}{180} = \frac{radianes}{\pi}}.$$

Veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1. Transformar a radianes 75°.

Aplicando la relación presentada y denotando como x al valor buscado, se tiene que

$$\frac{75}{180} = \frac{x}{\pi}, \text{ es decir } x = \frac{75\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}$$

De manera que 75° es igual a $\frac{5\pi}{12}$ radianes.

Es muy frecuente dar la medida de un ángulo en radianes en función de π. Pero podemos sustituir esta constante por su valor aproximado: 3.1416. En este caso obtendríamos que 75° es aproximadamente igual a 1.309 radianes.

Ejemplo 2. Convertir al sistema sexagesimal $\frac{\pi}{4}$.

En esta caso se tiene

$$\frac{x}{180} = \frac{\pi/4}{\pi}, \text{ es decir } x = \frac{180\pi}{4\pi} = 45.$$

Luego $\frac{\pi}{4}$ radianes equivale a 45°.

Ejercicio 1.2

1) Convierte en radianes los siguientes ángulos sexagesimales.

a) 15°=

b) 25°=

c) 30°=

d) 40°=

e) 100°=

f) 45°=

l) 200°=

m) 220°=

n) 225°=

o) 240°=

p) 270°=

q) 280°=

g) 90°=

h) 120°=

i) 135°=

j) 150°=

k) 180°=

r) 300°=

s) 315°=

t) 320°=

u) 340°=

v) 350°=

2) Convierte los siguientes ángulos de radianes a grados sexagesimales.

a) $\frac{\pi}{12}=$ f) $\frac{11\pi}{18}=$ k) $\frac{2\pi}{9}=$

b) $\frac{3\pi}{12}=$ g) $\frac{7\pi}{9}=$ l) $\frac{4\pi}{9}=$

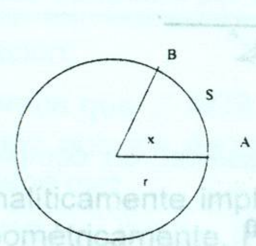
c) $\frac{\pi}{2}=$ h) $\frac{5\pi}{9}=$ m) $\frac{5\pi}{9}=$

d) $\frac{\pi}{3}=$ i) $\frac{8\pi}{3}=$ n) $\frac{\pi}{9}=$

e) $\frac{\pi}{4}=$ j) $\frac{10\pi}{9}=$ o) $\frac{5\pi}{9}=$

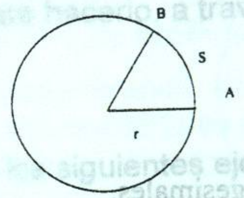
3) En cada una de las siguientes figuras, donde S representa la longitud del arco, encuentra la medida del ángulo x en radianes y grados sexagesimales.

a)



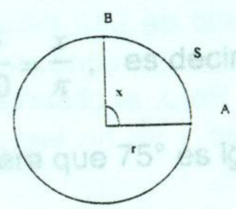
r= 20 cm
S= 20 cm (longitud del arco) $\widehat{AB}$
<x= ___________.

b)



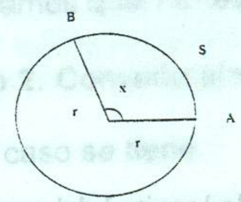
r= 35.81 cm
S= 50 cm
<x= ____________.

c)



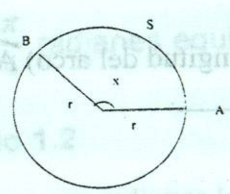
r= 20 cm
S= 30 cm
<x= ____________.

d)



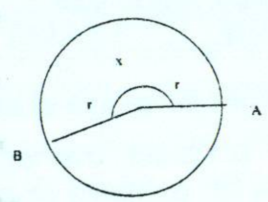
r= 25 cm
S= 60 cm
<x= ____________.

e)



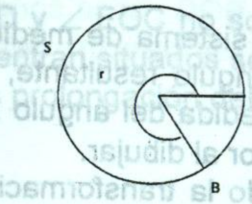
r= 15 cm
S= 40 cm
<x= ____________.

f)



S= 120 cm
r= 30 cm
<x= ____________.

g)



S= 75 cm
r= 15 cm
<x= ____________.

1.3. Clasificación de ángulos

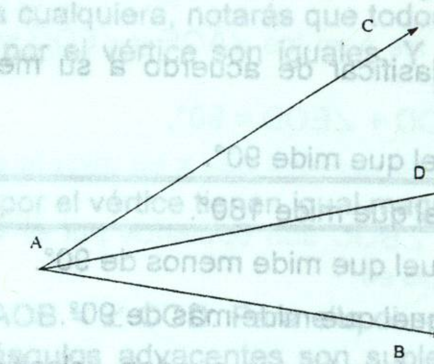
Objetivo

Clasificar los ángulos de acuerdo a su medida

Los ángulos pueden ser sumados y restados tanto analítica como geométricamente.

Sumar ángulos geométricamente implica determinar la apertura del ángulo que se forma al colocar (dibujar) un ángulo a continuación del otro, de modo que coincidan sus vértices y una de las semirrectas que los generan. Así, en la figura que se presenta a continuación se tiene:

$\angle$ BAD + $\angle$ DAC = $\angle$ BAC .



Sumar analíticamente implica determinar la medida del ángulo que se obtuvo al sumar geométricamente. Por ejemplo, si $\angle$ BAD = 15° y $\angle$ DAC = 20°, entonces se tiene que $\angle$ BAD + $\angle$ DAC = 35°.

Para ello se debe tener en cuenta que tienen que coincidir los sistemas de medición para los ángulos a ser sumados. En caso contrario se debe unificar el sistema de medición de acuerdo a la conveniencia según la tarea propuesta.