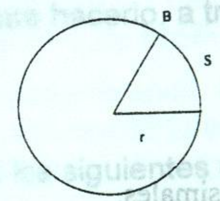
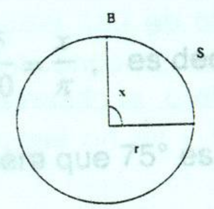
b)

r= 35.81 cm
S= 50 cm
<x= __________.



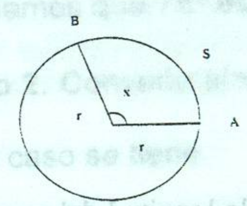
c)

r= 20 cm
S= 30 cm
<x= __________.



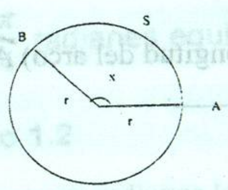
d)

r= 25 cm
S= 60 cm
<x= __________.



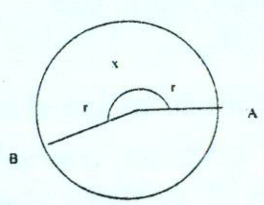
e)

r= 15 cm
S= 40 cm
<x= __________.



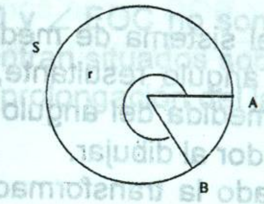
f)

S= 120 cm
r= 30 cm
<x= __________.



g)

S= 75 cm
r= 15 cm
<x= __________.



1.3. Clasificación de ángulos

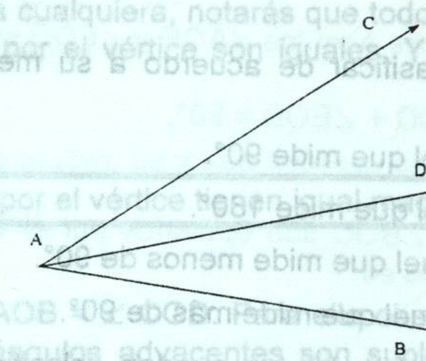
Objetivo

Clasificar los ángulos de acuerdo a su medida

Los ángulos pueden ser sumados y restados tanto analítica como geométricamente.

Sumar ángulos geométricamente implica determinar la apertura del ángulo que se forma al colocar (dibujar) un ángulo a continuación del otro, de modo que coincidan sus vértices y una de las semirrectas que los generan. Así, en la figura que se presenta a continuación se tiene:

$\angle BAD + \angle DAC = \angle BAC$.



Sumar analíticamente implica determinar la medida del ángulo que se obtuvo al sumar geométricamente. Por ejemplo, si $\angle BAD = 15°$ y $\angle DAC = 20°$, entonces se tiene que $\angle BAD + \angle DAC = 35°$.

Para ello se debe tener en cuenta que tienen que coincidir los sistemas de medición para los ángulos a ser sumados. En caso contrario se debe unificar el sistema de medición de acuerdo a la conveniencia según la tarea propuesta.

Ejemplo 1. Determine la suma de los ángulos ∠ PQR y ∠ RQS, y dibuje el ángulo resultante, si se conoce que ∠ PQR = $\frac{\pi}{4}$ y ∠ RQS = 45°.

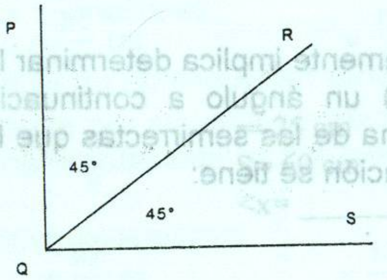
Para resolver este ejercicio resulta necesario unificar el sistema de medición de ángulos. Teniendo en cuente que se debe dibujar el ángulo resultante, resulta entonces conveniente realizar la transformación de la medida del ángulo ∠ PQR a grados sexagesimales para poder utilizar el transportador al dibujar.

En el ejemplo 2 del epígrafe anterior ya hemos realizado la transformación. Así sabemos que

$$\frac{\pi}{4} \text{ radianes} = 45°.$$

Entonces se tiene:

∠ PQS = ∠ PQR + ∠ RQS = 45° + 45° = 90°. (ver figura)



Los ángulos se pueden clasificar de acuerdo a su medida en ángulos rectos, llanos, agudos u obtusos.

- Un **ángulo recto** es aquel que mide 90°.
- Un **ángulo llano** es aquel que mide 180°.
- Un **ángulo agudo** es aquel que mide menos de 90°.
- Un **ángulo obtuso** es aquel que mide más de 90°.

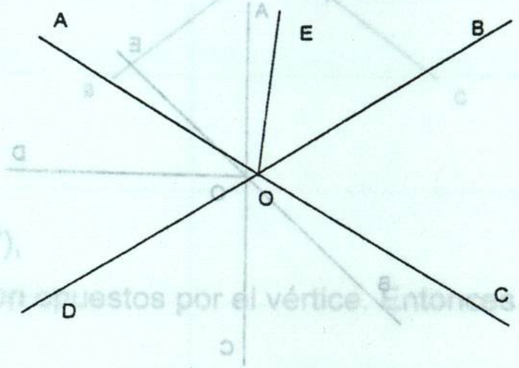
Así mismo, las parejas de ángulos se pueden clasificar en complementarios, suplementarios y conjugados, según el valor de su suma.

- Dos ángulos son **complementarios** si su suma es un ángulo recto.
- Dos ángulos son **suplementarios** si su suma es un ángulo llano.
- Dos ángulos son **conjugados** si su suma mide 360°.

De gran utilidad resulta en la práctica de la Geometría la clasificación siguiente:

Si dos rectas en un plano se cortan en un punto, ellas determinan cuatro ángulos (ver figura), que se clasifican dos a dos de acuerdo a su posición relativa en **adyacentes** (los consecutivos) y **opuestos por el vértices** (los alternos). Así po

ejemplo, en la figura son adyacentes los ángulos ∠ AOB y ∠ BOC , y son opuestos por el vértice los ángulos ∠ AOB y ∠ COD. Sin embargo, los ángulos ∠AOD y ∠ EOC no son opuestos por el vértice, pues los puntos D, O y E no se encuentran situados sobre la misma recta. Es decir, el lado OE del ángulo ∠ EOC no es prolongación del lado OD del ángulo ∠ AOD.



Como puedes observar fácilmente

Los ángulos adyacentes son a la vez suplementarios pues su suma mide 180°

Si pides a varios amigos que midan con la ayuda de un transportador los ángulos opuestos en una figura cualquiera, notarás que todos obtiene la misma respuesta: los ángulos opuestos por el vértice son iguales. Y efectivamente, eso es cierto. Demostrémoslo.

Teorema

Los ángulos opuestos por el vértice tienen igual magnitud.

Demostración:

Demostremos que ∠ AOB = ∠ COD. Para ello observemos la figura anterior. Ya hemos visto que los ángulos adyacentes son suplementarios, es decir, en este caso se tiene que

∠ AOB + ∠ BOC = 180° y ∠ BOC + ∠ COD = 180°.

De esa manera es

∠ AOB = 180° - ∠ BOC y ∠ COD = 180° - ∠ BOC,

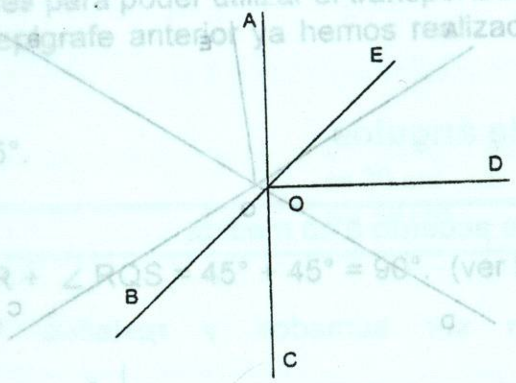
de donde igualando ambas ecuaciones se obtiene

∠ AOB = ∠ COD

que es lo que queríamos demostrar.

Veamos un ejemplo de la utilidad de este resultado:

Ejemplo 2. En la figura que aparece a continuación se conoce que los puntos A, O y C son colineales, al igual que los puntos B, O y E. Además se sabe que el ángulo $\angle$ AOD es recto. Determine el valor del ángulo $\angle$ BOC , si se conoce que la semirrecta de origen en O y que contiene al punto E es bisectriz del ángulo $\angle$AOD.



Para resolver este ejercicio notemos primeramente que

$\angle AOE = \angle EOD$,

por ser la semirrecta de origen en O que contiene al punto E bisectriz del ángulo $\angle$AOD. Por otra parte conocemos que

$\angle AOD = 90°$,

por ser recto. Luego, como los ángulos $\angle$AOE y $\angle$EOD son complementarios y de igual magnitud se tiene que

$\angle AOE + \angle EOD = \angle EOD + \angle EOD = 90°$,

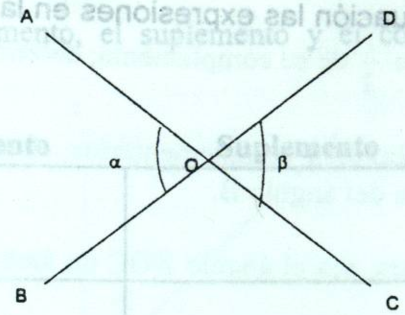
de donde

$\angle EOD = 45°$.

Pero los ángulos $\angle$AOE y $\angle$BOC son opuestos por el vértice, por lo que tienen igual magnitud. De ese modo es

$\angle BOC = 45°$.

Ejemplo 3. Determina el valor del ángulo $\angle\alpha$ en la figura, si se sabe que $\angle\alpha=6(x+4)°$ y $\angle\beta=4(x+12)°$ para un valor de x en grados sexagesimales.



Tenemos que

$6(x+4°) = 4(x+12°)$,

pues $\angle\alpha=\angle\beta$ ya que son opuestos por el vértice. Entonces es

$6x+24° = 4x+48°$

$6x - 4x = 48°-24°$

$2x = 24°$

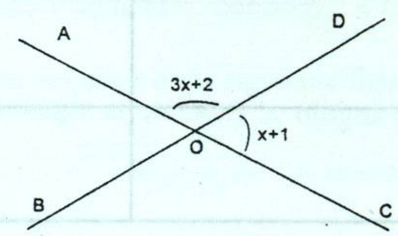
$x = 12°$.

Pero $\angle\alpha = 6(x+4°)$, es decir

$\angle\alpha = 6(12°+4°) = 6(16°) = 96°$.

Entonces el ángulo $\angle\alpha$ mide 96°.

Ejemplo 4. Determina el valor de x que aparece en la siguiente figura.



Al resolver este problema debemos tener presente que se pide el valor de x, por lo que los ángulos que esta variable representa deben ser medidos en radianes.

Como los ángulos $\angle$ AOD y $\angle$ DOC son adyacentes, su suma es un ángulo llano, cuya medida en radianes es π, es decir

$\angle AOD + \angle DOC = \pi$.

Sustituyendo en esta ecuación las expresiones en la variable x que indica la figura se obtiene la ecuación

$$(x+1) + (3x+2) = \pi,$$

de donde

$$x = \frac{\pi - 3}{4}.$$

Ejercicio 1.3

1. Determina el complemento, el suplemento y el conjugado de cada uno de los siguientes ángulos.

Ángulo	Complemento	Suplemento	Conjugado
30°			
45°			
60°			
63°48’			
24° 36’			
17°12’			
55°24’			
33°45’30”			
81°12’48”			
15° 18’6”			

2) Un ángulo y su suplemento, están a la razón de 5:4, encuentra la medida de dichos ángulos.

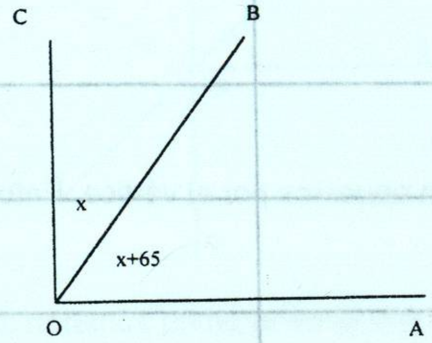
3) Un ángulo y su conjugado están a la razón de 2:1, encuentra la medida del ángulo mayor.

4) Un ángulo y su complemento están a la razón de 3:2, encuentra la medida del ángulo menor.

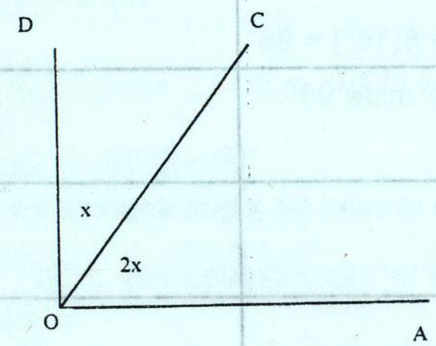
5) Un ángulo es igual a $\frac{1}{3}$ de su complemento, determina la medida de los ángulos.

6) Sean A y B dos ángulos complementarios, donde A= 4 (x+3)° y B= 7 (x-3)°. Encuentra la medida del ángulo B.

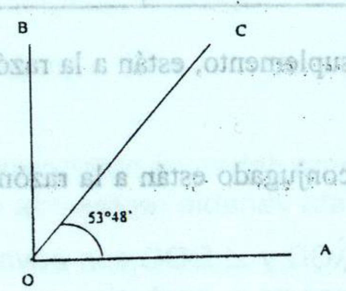
7) En la siguiente figura, sea el ángulo AOC un ángulo recto. ¿Cuánto mide el ángulo ∠AOB?



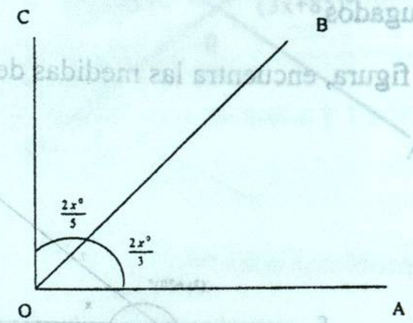
8.- En la siguiente figura sea el ángulo AOD un ángulo recto. Determina la medida del ángulo ∠COD.



9) Calcula el valor del ángulo ∠ BOC de la siguiente figura. Sea el ángulo ∠ AOB recto.



10) En la siguiente figura sea el ángulo ∠AOC, un ángulo recto. Encontrar la medida de los ángulos ∠AOB y ∠BOC.



11) Sean los ángulos A y B ángulos suplementarios, donde A= $\frac{2}{5}x°$ y B= $\frac{7}{4}x°$. Encuentra la medida de dichos ángulos.

12) Sean A y B dos ángulos suplementarios, donde A= 8(2x-3)° y B= 10 (x+3.5)°. Hallar la medida de los ángulos A y B.

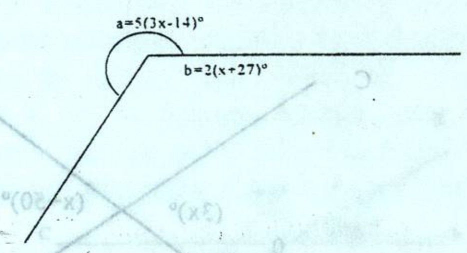
13.- Sean A y B dos ángulos suplementarios, donde A= $\frac{x^0}{2}$ y B= (x-30)°, determina la medida del ángulo A.

14) Sean A y B dos ángulos conjugados, donde A= 8x° y B= (2x+40)°, hallar la medida de dichos ángulos

15) Sean M y N dos ángulos conjugados, donde el ángulo M= 2 (4x-10)° y el ángulo N= 10 (x+2)°, encuentra la medida de ambos ángulos.

16) Sean B y C dos ángulos conjugados, donde B= 4 (2x+15)° y C= 2x°, encuentra la medida del ángulo B.

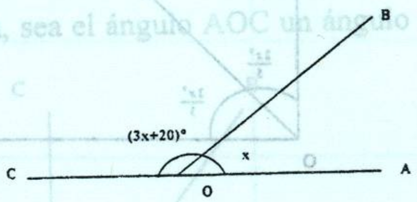
17) Encuentra la medida del ángulo b de la siguiente figura.



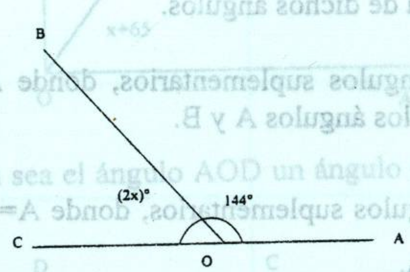
18) Sea el ángulo A= 8(x+3)° y el ángulo B= 4(12+x)°. Encuentra el valor de x si:
   a) A y B son complementarios
   b) A y B son suplementarios

19) A y B son conjugados

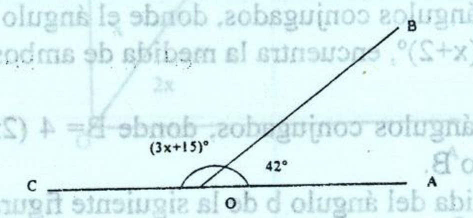
20) En la siguiente figura, encuentra las medidas de los ángulos ∠AOB y ∠BOC.



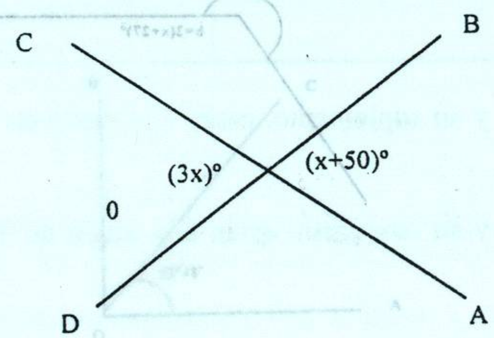
21)



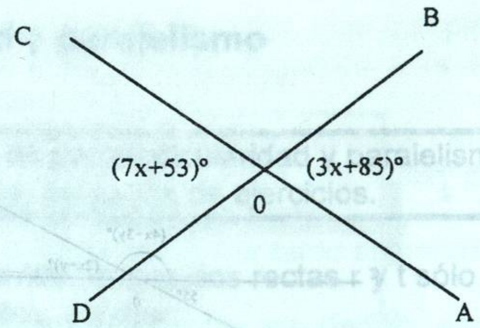
22)



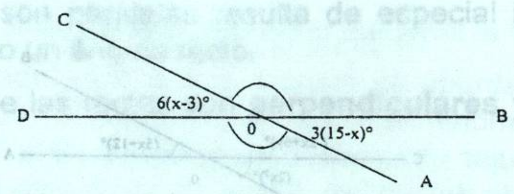
23)



24)

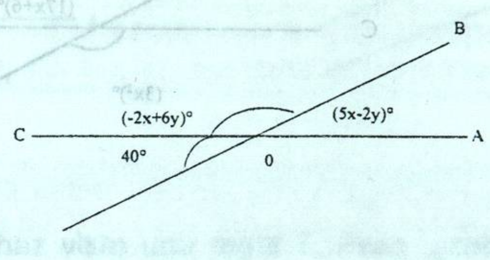


25)

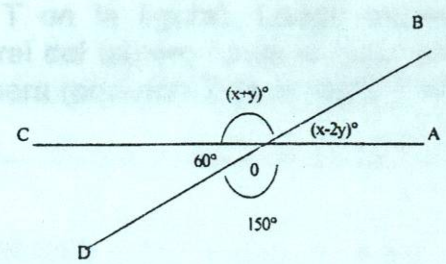


En los ejercicios del 26 al 30, encuentra el valor de *x* y *y*.

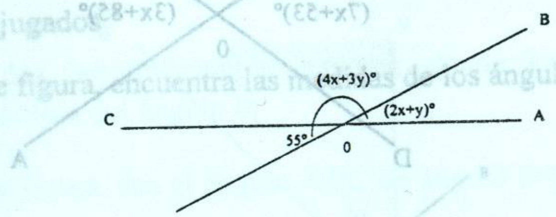
26)



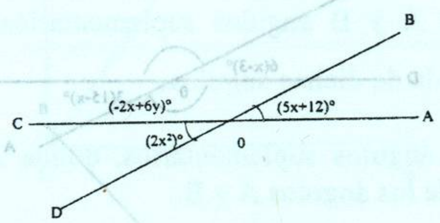
27)



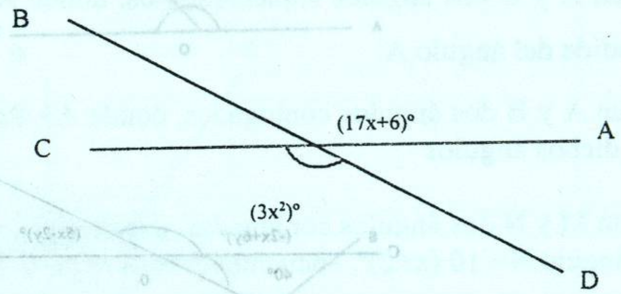
28)



29) En el siguiente problema sea x>0.



30) Sea x>0



1.4. Perpendicularidad y paralelismo

Objetivo

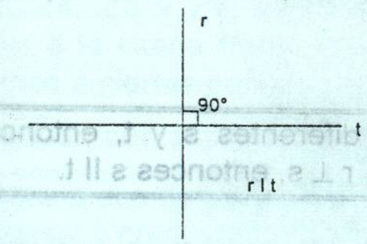
Comprender las relaciones de perpendicularidad y paralelismo de dos rectas y sus propiedades y aplicarlas a la resolución de ejercicios.

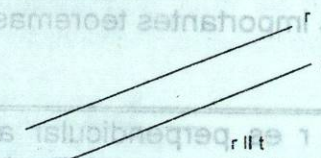
En la Geometría Plana es evidente que dos rectas r y t sólo pueden presentar dos posiciones relativas diferentes, a saber:

- se cortan en un punto, o
- no se cortan en ningún punto. En ese caso se dice que las rectas son **paralelas** y se denota $r \parallel t$. (ver figura)

Cuando las rectas no son paralelas resulta de especial interés el caso en que ellas se cortan formando un ángulo recto.

- Entonces se dice que las rectas son **perpendiculares** y se denota $r \perp t$. (ver figura)





De seguro alguna vez haz visto una regla T. Pero, ¿sabes cómo se utiliza ? ¿y para qué sirve ? y ¿por qué ?

Cuando un ingeniero, o arquitecto, o dibujante técnico desea dibujar rectas paralelas o perpendiculares utiliza la regla T. Para dibujar dos rectas paralelas r y t apoya la regla en el borde lateral del tablero de dibujo y delinea la recta (r) (posición 1 de la regla T en la figura). Luego mueve la regla manteniéndola apoyada en el borde lateral del tablero hasta el lugar en que desea dibujar la otra recta (t) paralela a la primera (posición 2 de la regla T en la figura), obteniendo así el resultado esperado.