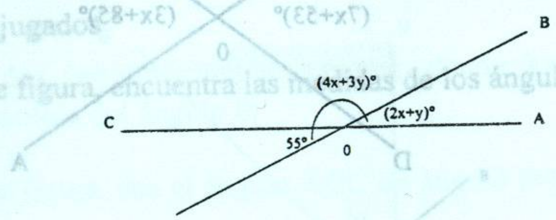
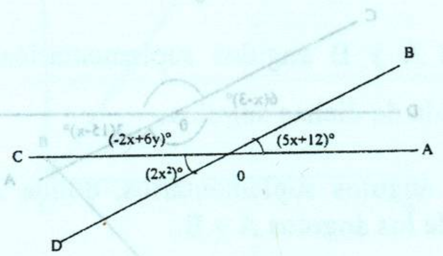
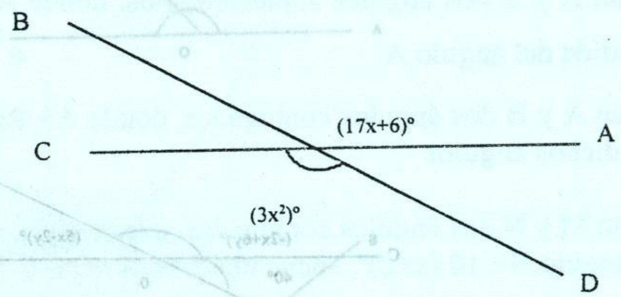
28)



29) En el siguiente problema sea x>0.



30) Sea x>0



1.4. Perpendicularidad y paralelismo

Objetivo

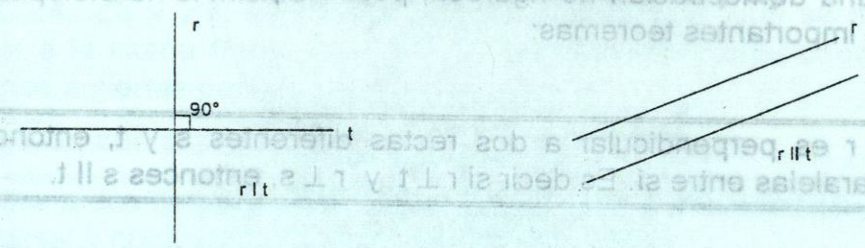
Comprender las relaciones de perpendicularidad y paralelismo de dos rectas y sus propiedades y aplicarlas a la resolución de ejercicios.

En la Geometría Plana es evidente que dos rectas r y t sólo pueden presentar dos posiciones relativas diferentes, a saber:

- se cortan en un punto, o
- no se cortan en ningún punto. En ese caso se dice que las rectas son **paralelas** y se denota $r \| t$. (ver figura)

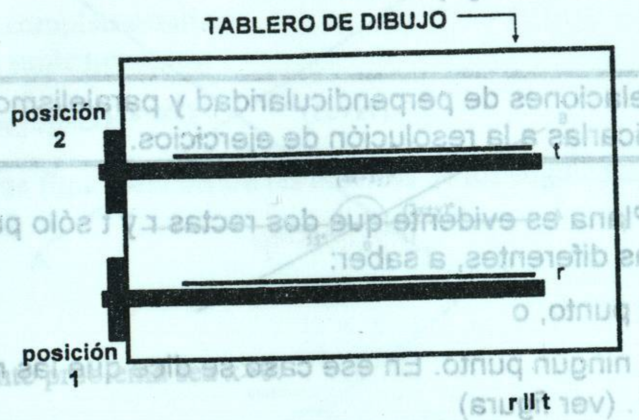
Cuando las rectas no son paralelas resulta de especial interés el caso en que ellas se cortan formando un ángulo recto.

- Entonces se dice que las rectas son **perpendiculares** y se denota $r \perp t$. (ver figura)



De seguro alguna vez haz visto una regla T. Pero, ¿sabes cómo se utiliza ? ¿y para qué sirve ? y ¿por qué ?

Cuando un ingeniero, o arquitecto, o dibujante técnico desea dibujar rectas paralelas o perpendiculares utiliza la regla T. Para dibujar dos rectas paralelas r y t apoya la regla en el borde lateral del tablero de dibujo y delinea la recta (r) (posición 1 de la regla T en la figura). Luego mueve la regla manteniéndola apoyada en el borde lateral del tablero hasta el lugar en que desea dibujar la otra recta (t) paralela a la primera (posición 2 de la regla T en la figura), obteniendo así el resultado esperado.



Tratemos de traducir al lenguaje de la Geometría Plana lo sucedido.

La regla T está construida de manera que la "tilde" forma un ángulo recto con la regla, y el tablero también tiene sus lados consecutivos formando ángulos rectos. De esa manera, dibujar una recta r utilizando la regla T significa trazar una recta perpendicular al borde del tablero. Entonces realmente lo que se realiza es dibujar dos rectas perpendiculares a una misma recta representada en este caso por el borde del tablero.

Esto resulta una demostración no rigurosa, pero no por ello menos aceptada de los siguientes importantes teoremas:

Teorema

Si una recta r es perpendicular a dos rectas diferentes s y t, entonces estas últimas son paralelas entre sí. Es decir si $r \perp t$ y $r \perp s$, entonces s II t.

Teorema

Si una recta r es perpendicular a una de dos rectas paralelas, entonces también es perpendicular a la otra recta. Es decir, si $r \perp t$ y t II s, entonces $r \perp s$.

Esta idea del uso de la regla T no representa otra cosa que la traslación de rectas, manteniendo el ángulo con una recta representada por el borde del tablero, y permite también asegurar que

Teorema

Dado un punto P sobre una recta r, existe una única recta t que corta a la recta en el punto P y es perpendicular a ella.

Demostración:

La existencia de la recta t puede ser demostrada mediante el mismo procedimiento utilizado en los teoremas anteriores.

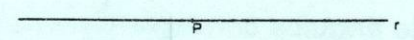
Veamos ahora que dicha recta t es la única que cumple con las condiciones impuestas por el teorema. Para ello recurriremos a la técnica clásica de las demostraciones de unicidad.
Supongamos que existe otra recta s que corta a la recta r en el punto P.
Entonces, por el Teorema 1.4.1., las rectas s y t son paralelas. Pero ambas contienen al punto P, y entonces son coincidentes.
Ello demuestra la unicidad de la recta t, y por tanto el teorema.

■

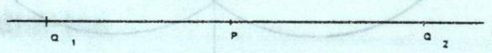
En la historia de la Geometría siempre se dedicó especial atención a las construcciones geométricas, es decir a determinar cuáles figuras geométricas poseían ser dibujadas con regla y compás y cómo hacerlo.

Ahora te mostraremos cómo dibujar una recta t que sea perpendicular a una recta r dada cortándola en un punto P.

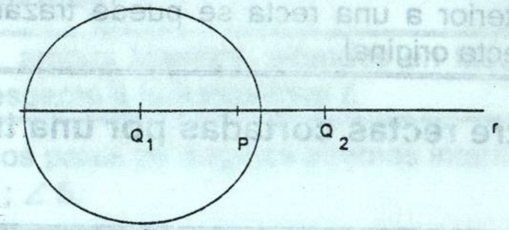
1er Paso: Dibuja la recta r y señala en ella el punto P.



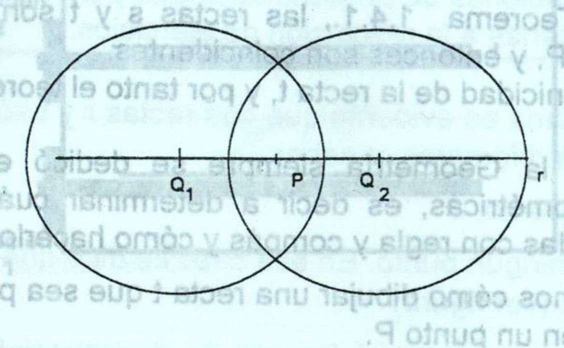
2do Paso: Coloca la punta del compás sobre el punto P y fija una abertura cualquiera en el mismo, marcando así los punto Q_1 y Q_2.



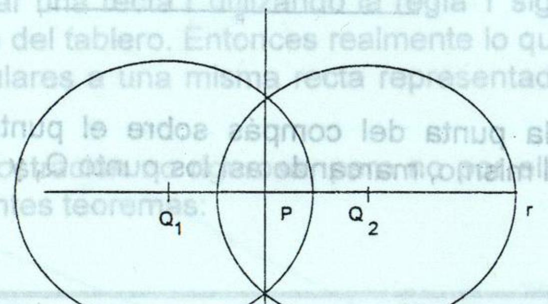
3er Paso: Apoyando la punta del compás en el punto Q_1 y con una abertura ligeramente mayor que la fijada en el segundo paso, dibuja una circunferencia.



4to Paso: Repite el tercer paso apoyando ahora la punta del compás sobre el punto Q_2.



5to Paso: Traza ahora la recta que pasa por los puntos de intersección de las circunferencias. Esta recta será perpendicular a r y pasará por el punto P.



Del mismo modo y aplicando el axioma de las paralelas, si P es un punto exterior a una recta r dada, existe una única recta t que es paralela a la recta r y contiene a P.. Pero, según el teorema anterior, por P se puede trazar una única recta que sea perpendicular a t (y por tanto también a r). Así se obtiene el siguiente

Teorema

Por un punto P exterior a una recta se puede trazar una única recta que sea perpendicular a la recta original.

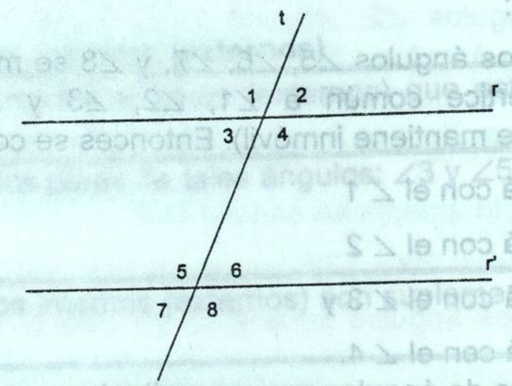
1.5. Ángulos entre rectas cortadas por una transversal.

Objetivo

Dominar la denominación de los ángulos entre rectas paralelas cortadas por un secante y las relaciones entre ellas y ser capaz de utilizar estas últimas en la resolución de ejercicios.

A continuación vamos a estudiar las relaciones que vinculan a un conjunto de ocho ángulos. Como podremos constatar muy pronto estas relaciones tienen un importante papel en muchas aplicaciones, especialmente en la demostración de un teorema mediante el cual sabremos cuánto vale la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

Sean *r* y *r'* las rectas paralelas y *t* la transversal:



Se han formado ocho ángulos que hemos designado por los números naturales del 1 al 8, tal como se ve en la figura. De estos ocho hay cuatro que son **internos**, así llamados por hallarse ubicados en la franja comprendida entre *r* y *r'*: ellos son el $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$ y $\angle 6$. Los otros cuatro son **externos**, que se hallan en la parte exterior a la citada franja. Es conveniente usar denominaciones especiales para referirnos a ciertas parejas de ángulos que son:

- **Ángulos correspondientes**

Se aplica a dos ángulos, uno interno y otro externo, situados del mismo lado de la transversal y con vértices en dos paralelas distintas.

En nuestra figura, son ángulos correspondientes los siguientes:

$\angle 1$ y $\angle 5$, $\angle 2$ y $\angle 6$,
$\angle 3$ y $\angle 7$, $\angle 4$ y $\angle 8$.

- **Ángulos alternos internos**

Son pares de ángulos, ambos internos, situados en lados distintos (es decir en semiplanos distintos) respecto a la transversal *t*.

En nuestra figura hay dos pares de ángulos alternos internos que son:
$\angle 3$; $\angle 6$ y $\angle 4$; $\angle 5$.

- **Ángulos alternos externos**

Son pares de ángulos externos situados en lados distintos respecto a *t*.

Para nuestra figura son ángulos alternos externos:

$\angle 1; \angle 8$ y

$\angle 2; \angle 7.$

Relación entre pares de ángulos correspondientes

Supongamos que efectuamos un movimiento de traslación a la recta *r'* con los requisitos siguientes:

El vértice común a los ángulos $\angle 5$, $\angle 6$, $\angle 7$, y $\angle 8$ se mueve a lo largo de *t* hasta coincidir con el vértice común a $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ y $\angle 4$ (en este movimiento supongamos que *r* se mantiene inmóvil). Entonces se comprende que:

el $\angle 5$ coincidirá con el $\angle 1$

el $\angle 6$ coincidirá con el $\angle 2$

el $\angle 7$ coincidirá con el $\angle 3$ y

el $\angle 8$ coincidirá con el $\angle 4$.

Es decir que los pares de ángulos correspondientes son iguales.

Comentario: El razonamiento anterior no es propiamente una demostración rigurosa de un teorema, pero es una explicación que confiamos en que será convincente. Así pues, a partir de ahora, admitiremos pues que:

Teorema

Los pares de ángulos correspondientes son iguales.

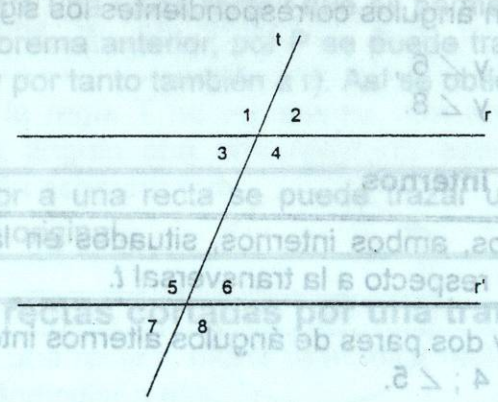
Habiendo establecido esta relación, ahora es muy sencillo demostrar el siguiente

Teorema

Dos ángulos alternos internos son iguales

Demostración:

En la siguiente figura tenemos que r II r' y deseamos demostrar que $\angle 3 = \angle 6$.



Pasos de la demostración:

$\angle 2 = \angle 6$

por ser correspondientes entre las paralelas *r* y *r'* cortadas por la transversal *t*.

$\angle 2 = \angle 3$

por ser opuestos por el vértice. De aquí que

$\angle 3 = \angle 6$

por el carácter transitivo de la igualdad. ■

Comentario: Por supuesto, de manera enteramente análoga se demuestra que $\angle 4 = \angle 5$.

- **Ángulos conjugados internos (externos)**

Se llaman así a dos ángulos internos (externos) que estén situados del mismo lado de la transversal.

En nuestra figura hay dos pares de tales ángulos: $\angle 3$ y $\angle 5$; $\angle 4$ y $\angle 6$.

Teorema

Dos ángulos conjugados internos (externos) son suplementarios (es decir, suman 180°)

Demostración:

Tomemos en cuenta la misma figura utilizada en la demostración del teorema anterior.

Ahora tomemos la pareja de ángulos $\angle 4$ y $\angle 6$.

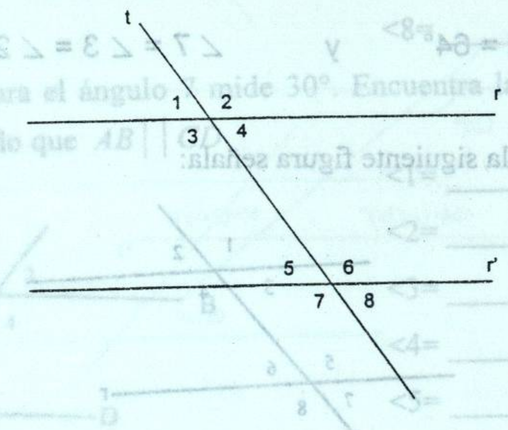
1er paso: $\angle 2 + \angle 4 = 180°$ por ser suplementarios.

2° paso: $\angle 2 = \angle 6$ por ser correspondientes entre paralelas.

3er paso: Sustituyendo $\angle 2$ por el $\angle 6$ en la primera igualdad queda:

$\angle 6 + \angle 4 = 180°.$ ■

Ejemplo 1. En la figura adjunta r II r' y el ángulo $\angle 5$ mide 73°. Hallar la amplitud de los demás ángulos que aparecen.



En primer lugar, $\angle 8 = \angle 5$ por ser opuestos por el vértice. Luego, $\angle 8 = 73°$.

Pero $\angle 6 + \angle 5 = 180°$.

Luego, $\angle 6 = 180° - 73° = 107°$.

Como $\angle 3 = \angle 6$ por ser alternos internos ; entonces es $\angle 3 = 107°$ y $\angle 2 = \angle 3$ por ser opuestos por el vértice.

Por tanto: $\angle 2 = 107°$.

Resumiendo, los ángulos $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 6$ y $\angle 7$ miden 107°. Es fácil llegar a la conclusión de que los ángulos $\angle 5$, $\angle 8$, $\angle 4$ y $\angle 1$ miden cada uno 73°.

En efecto ya teníamos que: $\angle 5 = 73°$ por datos y $\angle 8 = \angle 5 = 73°$ por ser opuestos por el vértice. Pero $\angle 5 = \angle 1$ por ser correspondientes y $\angle 4 = \angle 1$ por ser opuestos.

En la figura del ejemplo anterior se conoce que

$\angle 1 = (5x - 1)°$ y $\angle 6 = (8x + 12)°$.

Halle la medida de los ángulos señalados sin que en la respuesta aparezca la variable x.

Solución:

Como $\angle 4 = \angle 1 = (5x - 1)°$ por ser ángulos opuestos por el vértice.

Pero $\angle 4 + \angle 6 = 180°$, pues el $\angle 4$ y el $\angle 6$ son conjugados internos.

Sustituyendo $\angle 4$ por $(5x - 1)°$ y $\angle 6$ por $(8x + 12)°$ en la igualdad anterior, tenemos:

$$13x = 169°$$
$$x = 13°.$$

Por tanto:

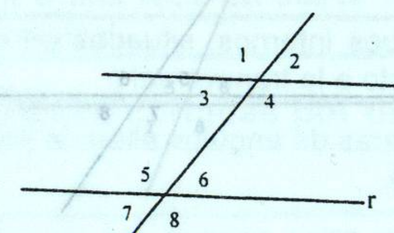
$\angle 1 = 5(13°) - 1 = 64°$ y $\angle 6 = 8(13°) + 12 = 116°$.

Y, en consecuencia:

$\angle 4 = \angle 5 = \angle 8 = 64°$ y $\angle 7 = \angle 3 = \angle 2 = 116°$.

Ejercicio 1.5

1) De acuerdo con la siguiente figura señala:



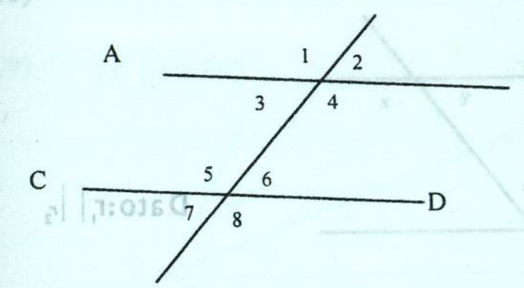
a) Los ángulos internos:
b) Los ángulos externos:
c) Los pares de ángulos que son correspondientes
d) Los ares de ángulos que son alternos-internos
e) Los pares de ángulos que son alternos-externos
f) Los pares de ángulos que son conjugados internos
g) Los pares de ángulos que son conjugados externos

2) Escribe en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponde a la respuesta correcta.

1 ( ) Si dos ángulos son correspondientes, entonces:
2 ( ) Si dos ángulos son conjugados internos, entonces:
3 ( ) Si dos ángulos son alternos internos, entonces:
4 ( ) Si dos ángulos son conjugados externos, entonces
5 ( ) Si dos ángulos son alternos externos, entonces:

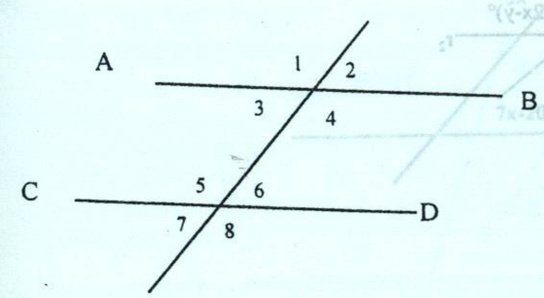
a) Son complementarios
b) Son congruentes (igual medida)
c) Son suplementarios

3) En la siguiente figura el ángulo 4 mide 125°. Encuentra la medida de los demás ángulos considerando que $AB \,||\, CD$



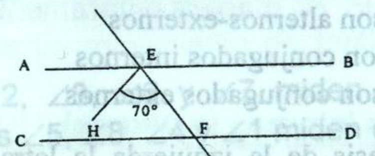
<1= ______
<2= ______
<3= ______
<5= ______
<6= ______
<7= ______
<8= ______

4) En la siguiente figura el ángulo 7 mide 30°. Encuentra las medidas de los demás ángulos considerando que $AB \,||\, CD$



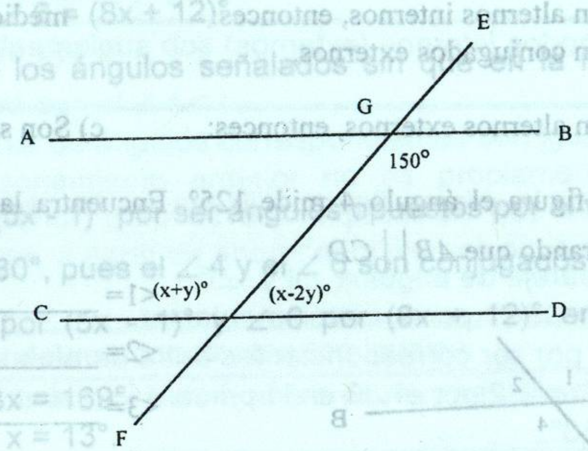
<1= ______
<2= ______
<3= ______
<4= ______
<5= ______
<6= ______
<8= ______

5) En la siguiente figura $AB \mid\mid CD$ y EH es la bisectriz del ángulo AEF. Determina el valor del ángulo F.

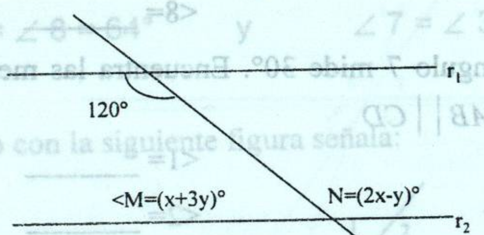


En cada una de los siguientes ejercicios encuentra los valores de x y y

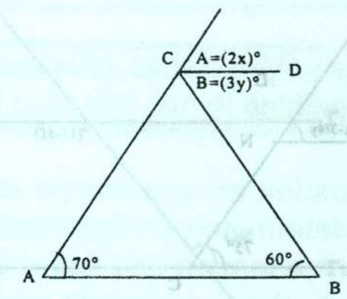
6) Dato: $AB \mid\mid CD$



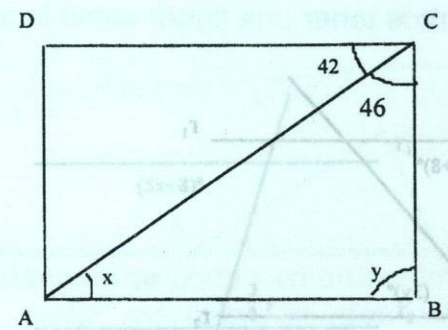
7) Dato: $r_1 \mid\mid r_2$



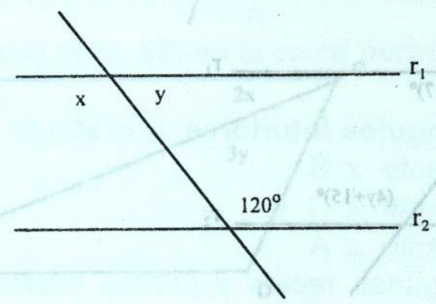
8) Dato: $AB \mid\mid CD$



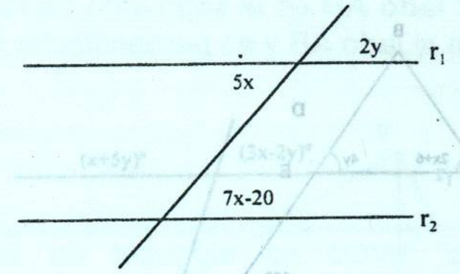
9) Datos: $AB \mid\mid CD$, $AD \mid\mid BC$



10) Dato: $r_1 \mid\mid r_2$

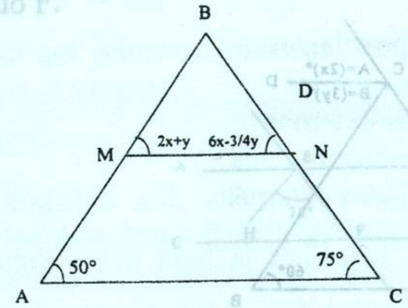


11) Dato: $r_1 \mid\mid r_2$



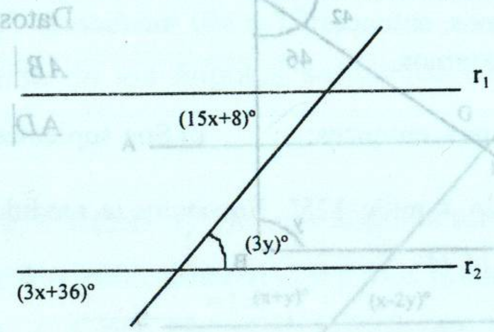
13)

Dato: $MN \mid\mid AC$



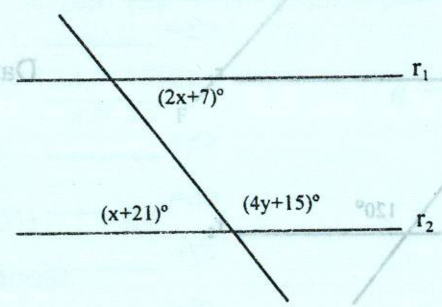
14)

Dato: $r_1 \mid\mid r_2$



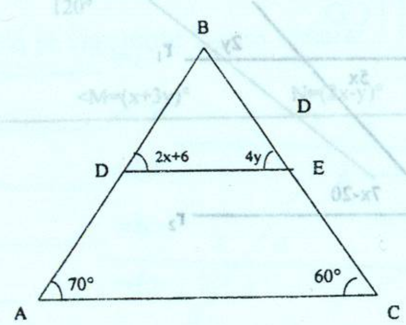
15)

Dato: $r_1 \mid\mid r_2$



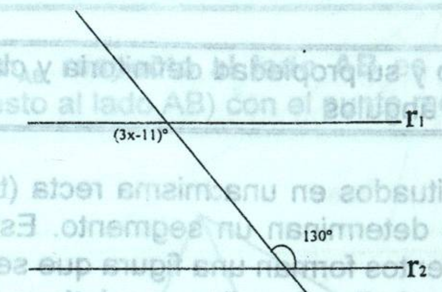
16)

Dato: $DE \mid\mid AC$



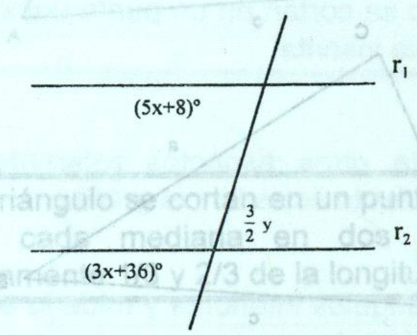
17)

Dato: $r_1 \mid\mid r_2$



18)

Dato: $r_1 \mid\mid r_2$

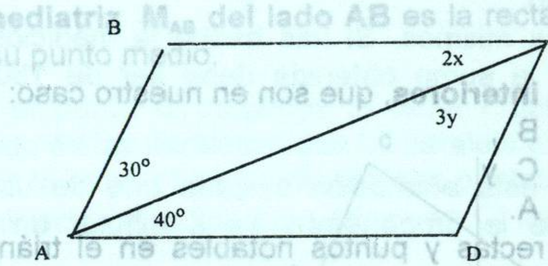


19)

Datos:

$AB \mid\mid CD$

$BC \mid\mid AD$



20)

Dato:

$r_1 \mid\mid r_2$ $r_1 \mid\mid r_2$