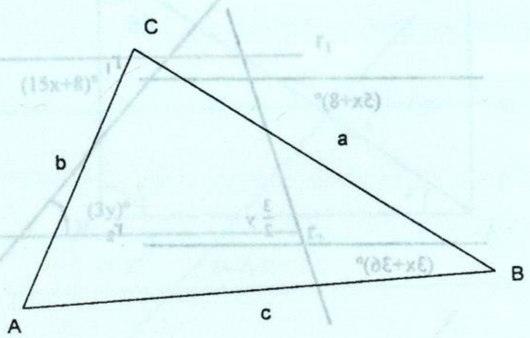
1.6 Triángulos

Objetivo

Conocer el concepto de triángulo y su propiedad definitoria y clasificar los tipos de triángulos según sus lados y sus ángulos

Sean A, B y C tres puntos no situados en una misma recta (también se dice no alineados). Cada par de puntos determinan un segmento. Estos son: AB, BC y CA. La unión de estos tres segmentos forman una figura que se llama **triángulo**, y se denota así: Δ ABC. Los puntos A, B y C se llaman **vértices del triángulo** y los segmentos AB, BC y CA se llaman **lados**, y se denotan también con letras minúsculas a, b, c. Así podemos tener una figura como la siguiente:

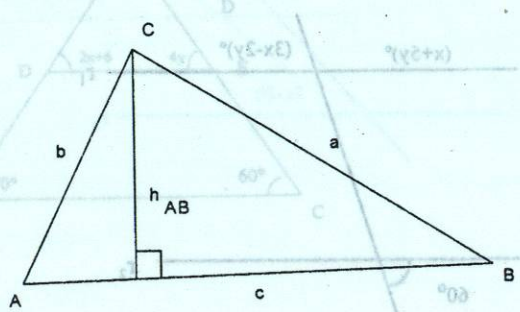


En cada triángulo hay tres **ángulos interiores**, que son en nuestro caso:

el $\angle$ ABC o simplemente $\angle$ B ,
el $\angle$ BCA o simplemente $\angle$ C y
el $\angle$ CAB o simplemente $\angle$ A.

Te presentaremos ahora algunas rectas y puntos notables en el triángulo, así como algunos resultados de gran utilidad que aceptaremos por el momento sin demostración:

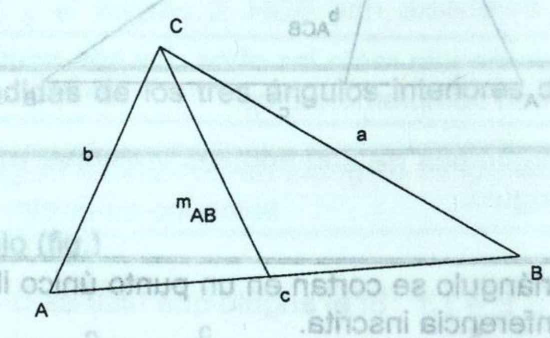
- La **altura h_{AB} respecto al lado AB** es el segmento de recta que une el vértice C (opuesto al lado AB) con al lado AB y es perpendicular a éste último.



Teorema

Las alturas de un triángulo se cortan un punto único llamado **ortocentro**.

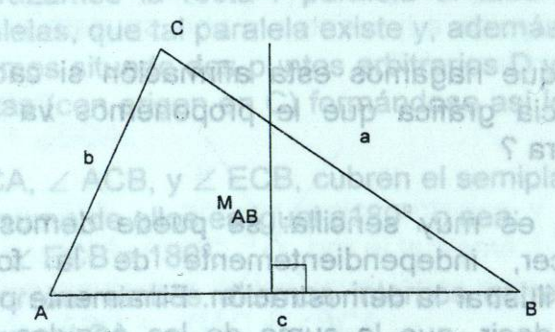
- La **mediana m_{AB} respecto al lado AB** es el segmento de recta que une el vértice C (opuesto al lado AB) con el punto medio del lado AB.



Teorema

Las medianas de un triángulo se cortan en un punto único llamado **baricentro**. El baricentro divide a cada mediana en dos segmentos cuyas longitudes representan respectivamente 1/3 y 2/3 de la longitud de la mediana.

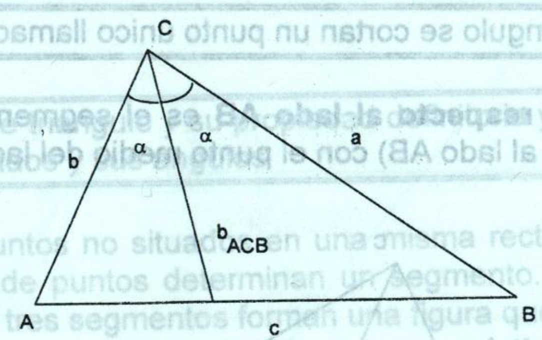
- La **mediatriz M_{AB} del lado AB** es la recta perpendicular al lado AB, que pasa por su punto medio.



Teorema

Las mediatrices de un triángulo se cortan en un punto único llamado **circuncentro**, que es el centro de la circunferencia circunscrita.

- La **bisectriz b_{ACB} del ángulo $\angle$ACB** es la recta que divide el ángulo a la mitad.



Teorema

Las bisectrices de un triángulo se cortan en un punto único llamado **incentro**, que es el centro de la circunferencia inscrita.

Antes de seguir explicándote otros aspectos referentes a los triángulos te proponemos que hagas la siguiente experiencia gráfica.

- Traza un triángulo arbitrario.
- Toma un transportador de ángulos interiores y mide la amplitud de cada uno de los ángulos interiores del triángulo.
- Suma las tres amplitudes de los mismos. Si has hecho la medición con un mínimo de cuidado, verás que la suma obtenida debe ser de 180° o muy próxima.

¿Cómo es posible que hagamos esta afirmación si cada uno de ustedes, al realizar la experiencia gráfica que le proponemos va a dibujar un triángulo arbitrario, a su manera ?

Pues la explicación es muy sencilla: se puede demostrar la afirmación que acabamos de hacer, independientemente de la forma y tamaño que seleccionemos para ilustrar la demostración. Finalmente podemos garantizar que esta propiedad (es decir, que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es constante e igual a 180°) es uno de los resultados más importantes y útiles de toda la Geometría y, francamente, sin saber aplicarlo correctamente, no se puede ir muy lejos en esta Ciencia. Afortunadamente, como verás, es muy fácil entenderlo y aplicarlo.

1.7. Suma de los ángulos interiores de un triángulo

Objetivo

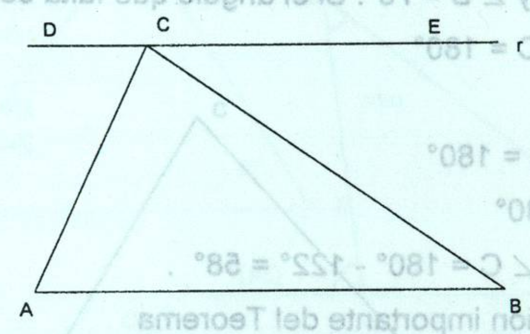
Aplicar los conceptos anteriores y el teorema sobre los ángulos interiores de un triángulo a la resolución de ejercicios prácticos y de demostraciones.

Teorema

La suma de las medidas de los tres ángulos interiores de cualquier triángulo es 180° .

Demostración:

Sea ABC un triángulo (fig.)



1. Por el punto C trazamos la recta *r* paralela al lado AB. Sabemos, por el postulado de las paralelas, que tal paralela existe y, además, que es única.
2. Sobre la recta *r* hemos situado dos puntos arbitrarios D y E, distintos de C pero en semirrectas distintas (con origen en C) formándose así los ángulos ∠ DCA y ∠ ECB.
3. Los ángulos: ∠ DCA, ∠ ACB, y ∠ ECB, cubren el semiplano inferior cuyo borde es *r*, de modo que la suma de ellos es igual a180°, o sea:
   ∠ DCA + ∠ ACB + ∠ ECB = 180°. (1)
4. ∠ DCA = ∠ A por ser ambos alternos internos entre las paralelas *r* y AB cortadas por la transversal CA.
   ∠ ACB = ∠ C (cambio de notación !)
   ∠ ECB = ∠ B por ser alternos internos entre las paralelas *r* y AB cortadas por la transversal CB.
5. Sustituyendo en (1) los ángulos ∠ DCA, ∠ ACB y ∠ ECB por ∠ A, ∠ C y ∠ B respectivamente queda:
   ∠ A + ∠ C + ∠ B = 180°,
   que es lo queríamos demostrar.

■

Corolario

En un triángulo no puede haber más que un ángulo interior obtuso.

Demostración:

En efecto, si hubiera dos obtusos su suma sería mayor de 180° ; lo cual es imposible. ■

Corolario

Si en un triángulo hay un ángulo recto los otros dos son agudos y su suma es 90°. Es decir, los otros dos son complementarios.

Ejemplo 1. En un triángulo dos de sus ángulos interiores miden 49° y 73°. Hallar la amplitud del tercer ángulo.

Solución:

Tomamos $\angle A = 49°$ y $\angle B = 73°$. Si el ángulo que falta es C ; sabemos que:

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$$

Luego:

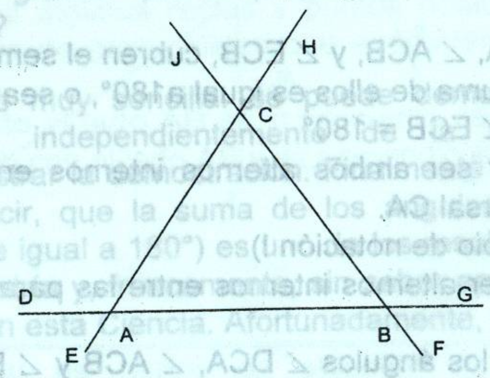
$$49° + 73° + \angle C = 180°$$

$$122° + \angle C = 180°$$

Despejando, queda: $\angle C = 180° - 122° = 58°$

Veamos otra aplicación importante del Teorema

Si se consideran las rectas determinadas por los lados de un triángulo, cada vértice determinan cuatro ángulos (ver figura). Así, a cada ángulo interior corresponden dos ángulos adyacentes y uno opuesto por el vértice, que están determinados por el mismo vértice.



- Se dice que un ángulo es **exterior** de un triángulo si este es adyacente y suplementario de un ángulo interior del triángulo. Los otros dos ángulos interiores del triángulo se llaman **ángulos internos opuestos al ángulo exterior**.

De esa manera, en la figura

- el ángulo $\angle$ GBC y el ángulo $\angle$ FBA son exteriores opuestos a los ángulos $\angle$BAC y $\angle$BCA,
- el ángulo $\angle$ EAB y el ángulo $\angle$ DAC son exteriores opuestos a los ángulos $\angle$ABC y $\angle$ACB, y
- el ángulo $\angle$ JCA y el ángulo $\angle$ HCB son exteriores opuestos a los ángulos $\angle$CBA y $\angle$CAB.

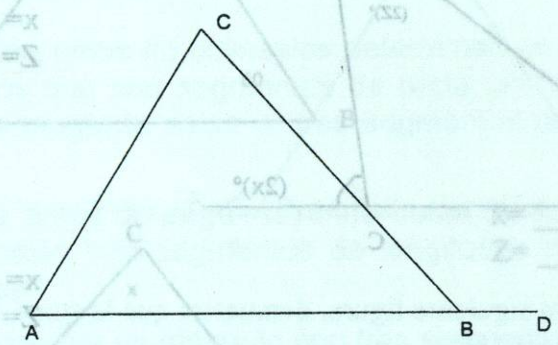
Respecto a los ángulos exteriores del un triángulo se cumple el siguiente teorema:

Teorema

La medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de sus dos ángulos interiores opuestos.

Demostración:

En la figura, el ángulo $\angle$DBC es exterior opuesto a los ángulos interiores $\angle$BAC y $\angle$BCA.



Se desea demostrar que

$$\angle DBC = \angle BAC + \angle BCA.$$

Sabemos que

$\angle DBC + \angle ABC = 180°$ por ser suplementarios, y

$\angle ABC + \angle BAC + \angle BCA = 180°$ por el teorema 1.7.1.

Igualando los miembros izquierdos de las ecuaciones anteriores es

$$\angle DBC + \angle ABC = \angle ABC + \angle BAC + \angle BCA ,$$

de donde

$$\angle DBC = \angle BAC + \angle BCA ,$$

que es lo que queríamos demostrar ■

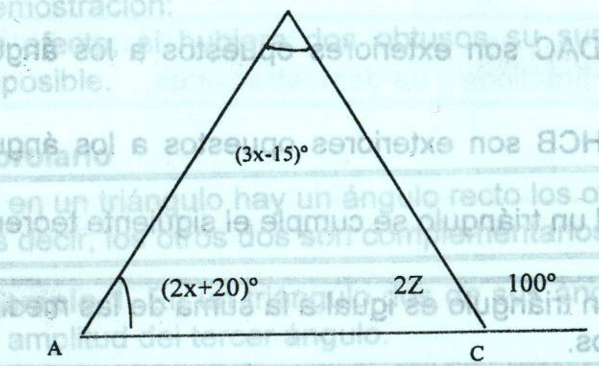
Ejemplo 2. En el triángulo del ejemplo 1, el ángulo exterior opuesto a los ángulos dados (que miden 49° y 73°) mide 49°+73°=122°.

Ejercicio 1.7

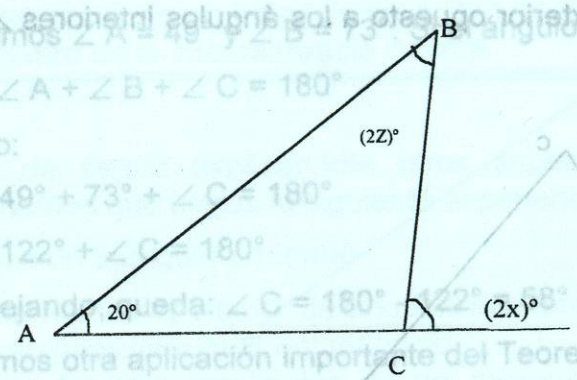
1) Para los siguientes ejercicios encuentra los valores de x y z, según los datos dados.

x= ________

Z= ________



2)



Dato:
‹ACB= (5x-30)°

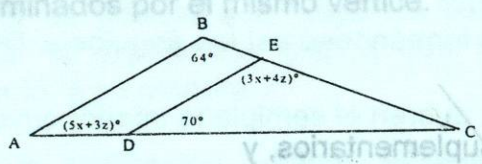
x= ________

Z= ________

3)

x= ________

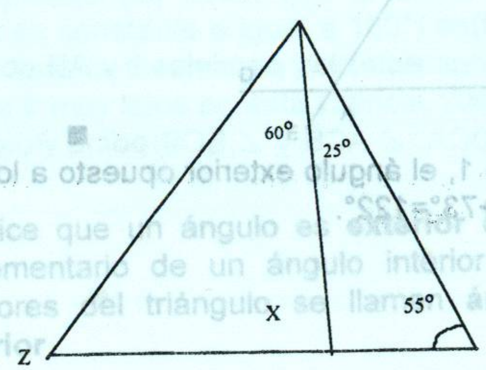
Z= ________



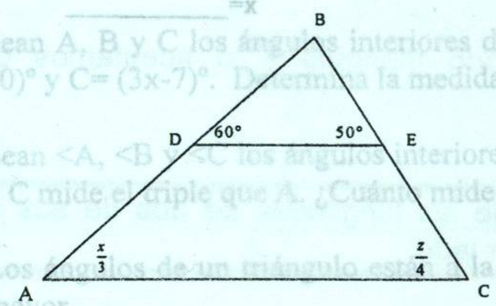
4)

x= ________

Z= ________



5)

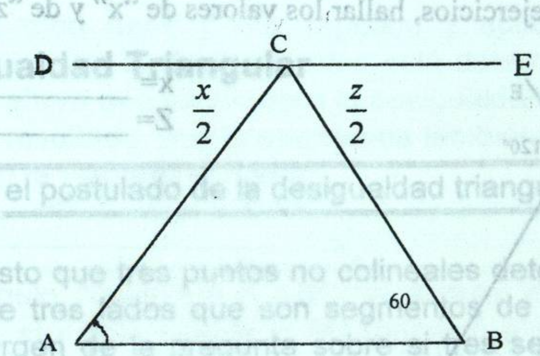


Dato: DE | | AC

x= ________

Z= ________

6)

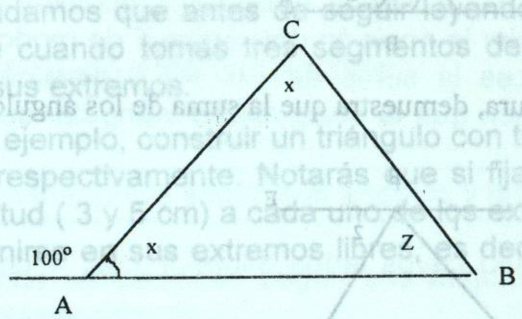


Dato: DE | | *AB*

x= ________

Z = ________

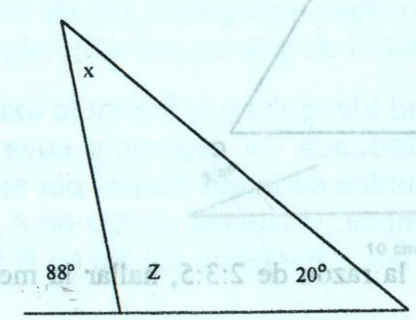
7)



x= ________

Z= ________

8)

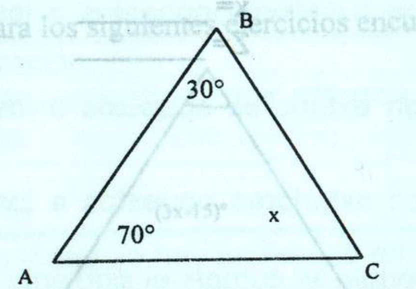


x= ________

Z= ________

9)

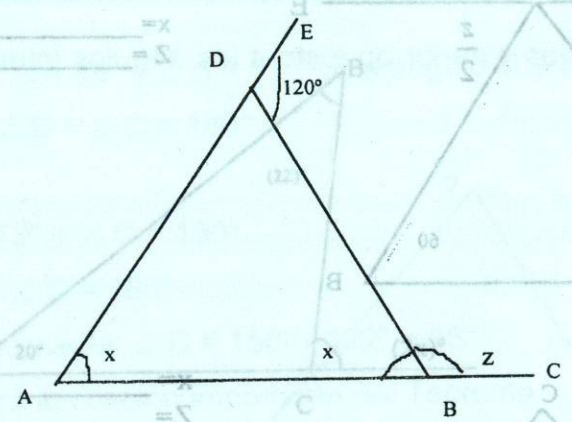
x= ____________



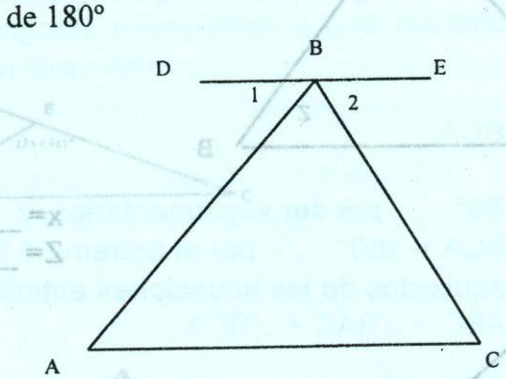
10) En cada uno de los siguientes ejercicios, hallar los valores de “x” y de “z”.

x= ____________

Z= ____________



11) Basándote en la siguiente figura, demuestra que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180°



Demostrar que <A+<B+<C= 180°

12) Los ángulos de un triángulo están a la razón de 2:3:5, hallar la medida de dichos ángulos.

13) Los ángulos de un triángulo están a la razón de 7:6:5, encuentra la medida de dichos ángulos.

14) En un triángulo rectángulo, los ángulos agudos están a la razón de 2:3. Encuentra la medida de dichos ángulos.

15) Sean A, B y C los ángulos interiores de un triángulo, donde A= (2x+35)°, B= (4x-10)° y C= (3x-7)°. Determina la medida de los ángulos.

16) Sean <A, <B y <C los ángulos interiores de un triángulo. Si B mide el doble que A y C mide el triple que A. ¿Cuánto mide cada ángulo?

17) Los ángulos de un triángulo están a la razón de 3:4:5. Hallar la medida del ángulo mayor.

1.8. Desigualdad Triangular

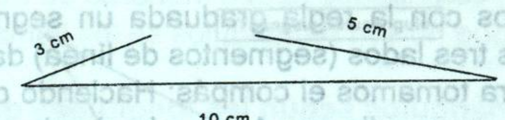
Objetivo

Comprender el postulado de la desigualdad triangular

Ya hemos visto que tres puntos no colineales determinan un triángulo, y que este siempre tiene tres lados que son segmentos de recta unidos por sus extremos. Entonces surgen de la pregunta sobre si tres segmentos de recta determinarán siempre un triángulo.

Te recomendamos que antes de seguir leyendo trates de responderla, probando qué sucede cuando tomas tres segmentos de longitudes diferentes y tratas de unirlos por sus extremos.

Intenta, por ejemplo, construir un triángulo con tres segmentos de longitudes de 3, 5 y 10 cm respectivamente. Notarás que si fijas cada uno de los segmentos de menor longitud (3 y 5 cm) a cada uno de los extremos del segmento mayor, estos no logran unirse en sus extremos libres, es decir que resultan demasiado cortos. (ver figura)



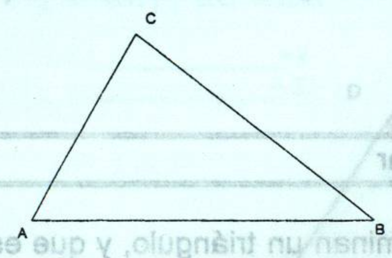
Intentémoslo de otra manera:

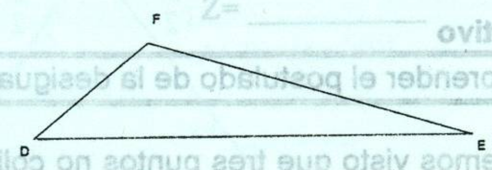
Traza un triángulo cualquiera, mide los tres lados con una regla graduada, suma las longitudes de dos de sus lados. Podemos afirmar que dicha suma es mayor que la longitud del tercer lado.
Esta desigualdad se cumple para todo triángulo y lo aceptamos como un postulado, conocido como

DESIGUALDAD TRIANGULAR

En un triángulo cualquiera, la suma de las longitudes de dos de sus lados es siempre mayor que la longitud del tercer lado.

Consideremos las siguientes figuras:





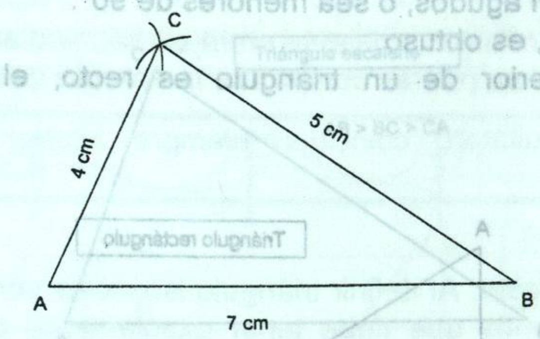
Donde: AC + CB > AB y DF + FE > DE

Observación: En el triángulo DEF podríamos hacer una modificación; dejar DE con la misma longitud, pero cambiar la posición del vértice F de modo que se sitúe muy cerca del lado DE. Entonces la suma de DF + FE disminuiría, pero se mantendría mayor que DE, es decir que la desigualdad triangular seguiría siendo válida.

Ejemplo 1.
Explica por qué existe un triángulo cuyos lados miden 7 cm., 4 cm. y 5 cm., y trázalo.

El mayor lado sería 7 cm.

Como 7 < 4 + 5, se cumple la desigualdad triangular y el triángulo existe.
Para dibujarlo trazamos con la regla graduada un segmento cuya longitud sea igual a la de uno de los tres lados (segmentos de línea) dados, por ejemplo el de 7 cm. Sea éste AB. Ahora tomamos el compás: Haciendo centro en A, trazamos un arco de circunferencia, cuyo radio sea 4 cm. y haciendo centro en B trazamos otro arco de radio 5 cm.
Los dos arcos tienen que cortarse: el punto y donde lo hacen es, precisamente, en el tercer vértice, es decir, en C.



Seguro haz oído decir y haz repetido y aplicado muchísimas veces que la distancia más corta entre dos puntos está determinado por la línea recta. Intenta demostrarlo ahora que ya conoces la desigualdad triangular.
El siguiente resultado, que aceptaremos también como postulado, resulta de gran aplicación en la Geometría Plana:

Postulado

En un triángulo cualquiera Δ ABC, el ángulo $\angle$ A tiene mayor amplitud que el ángulo $\angle$ B, sí y sólo sí el lado BC (opuesto a $\angle$ A) tiene mayor longitud que el lado AC (opuesto a $\angle$ B). Es decir, a mayor ángulo corresponde mayor lado opuesto, y viceversa.

1.9. Clasificación de triángulos

Objetivo

Clasificar los triángulos según sus ángulos y las longitudes de sus lados.

Los triángulos se clasifican según sus ángulos y según sus lados. Veamos las diferentes clasificaciones:

Clasificación de los triángulos según sus ángulos

- Si en un triángulo hay un ángulo obtuso se le llama **obtusángulo**. Así :