Si ya comprobaste la relación existente entre altura, mediana, mediatriz y bisectriz en un triángulo isósceles, podrás comprobar fácilmente que

En un triángulo equilátero coinciden siempre altura, mediana, mediatriz y bisectriz.

Observación importante. Al definir triángulo isósceles como aquel que tiene dos lados iguales, no dijimos que debe tener exactamente o solamente dos lados iguales. Hacemos esta aclaración porque **todo triángulo equilátero es también isósceles**, puesto que, como tiene sus tres lados iguales, es cierto que tiene también dos lados iguales.

1.10. Congruencia de triángulos

Objetivo

Dominar el concepto de congruencia de triángulos y los teoremas sobre y congruencia y ser capaces de aplicar estos últimos a la resolución de ejercicios prácticos y demostraciones.

Iniciaremos este tema planteando el siguiente ejemplo

Se desea medir el ancho de un canal en un tramo recto del mismo, y para ello se dispone de los siguientes datos:

(i) En la ribera izquierda del canal y a una distancia de 3 m de la misma se encuentra una hilera de postes eléctricos.

(ii) En la ribera derecha del canal y también a una distancia de tres metros del mismo se encuentran señaladores de camino (S_1, S_2 y S_3 en la figura) que marcan cada 30 metros la distancia que falta para llegar a una curva peligrosa. Es decir, el texto de los señalamientos dice:

S_1 : Curva peligrosa a 30 m,

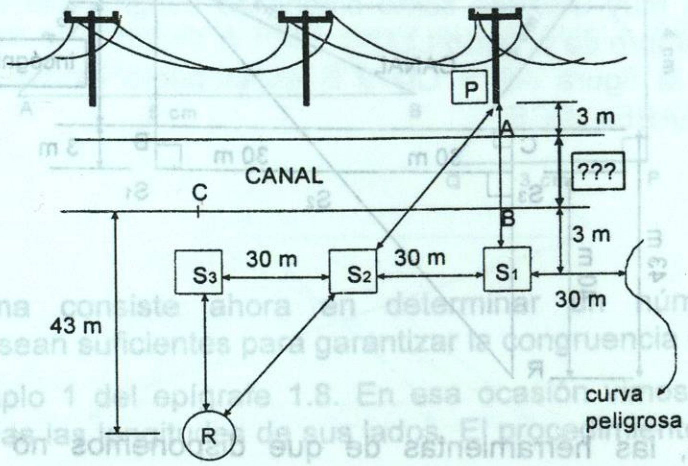
S_2 : Curva peligrosa a 60 m,

S_3 : Curva peligrosa a 90 m.

(iii) La línea recta determinada por los señalamientos S_1, S_2 y S_3 se encuentra en ángulo recto con la línea imaginaria que une al señalamiento S_1 con uno de los postes eléctricos (P en la figura) en la otra orilla del canal.

(iv) A 43 metros de la ribera derecha del río se coloca un observador (R en la figura), formando una línea imaginaria con el señalamiento S_3 , que se encuentra en ángulo recto con la línea recta determinada por los señalamientos S_1, S_2 y S_3.

(v) Al mirar hacia el poste P, el observador descubre que el señalamiento S_2 no le permite ver el poste completo, por lo que deduce que él, el señalamiento y el poste se encuentran sobre una línea recta imaginaria.

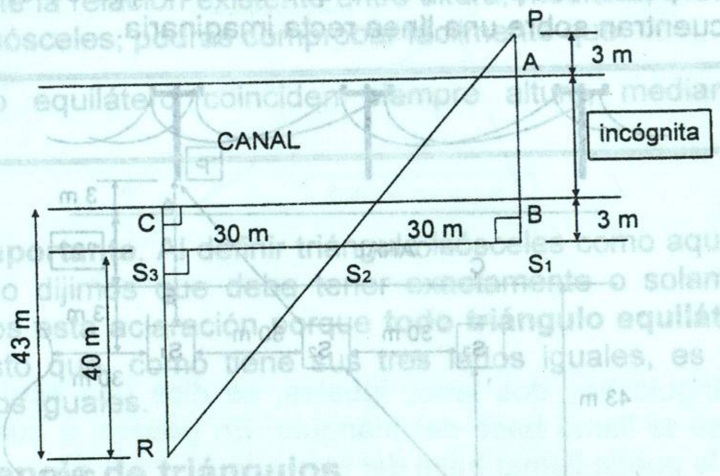


Traslademos los datos al lenguaje de la Geometría y realicemos un dibujo plano para tratar de comprender el problema.

En la figura y de acuerdo a los datos se reconoce que:

- La incógnita del problema es la longitud del segmento AB. Pero $AP = BS_1 = 3$ m (por (i) y (ii)) y
  $PS_1 = AB + AP + BS_1 = AB + 6.$
  Entonces
  $AB = PS_1 - 6.$ (1)
- Por otra parte, se conoce que
  $RC = 43$ m (por (iv)),
  $CS_3 = 3$ m (por (ii)) y
  $RC = RS_3 + S_3C$
  entonces
  $RS_3 = 40$m. (2)
- Además
  $RS_3 \perp S_3S_2$ (por (iv)) y (3)
  $S_2S_1 \perp PS_1$ (por (iii)) (4)
  entonces
  el triángulo ΔRS_3S_2 es rectángulo en S_3
  el triángulo ΔS_2S_1P es rectángulo en S_1.
- Por (v) se observa que los ángulos $\angle RS_2S_3$ y $\angle PS_2S_1$ son opuestos por el vértice. Entonces
  $\angle RS_2S_3 = \angle PS_2S_1$ (5)
- El triángulo ΔRS_3S_2 tiene catetos
  $RS_3 = 40$ m y $S_3S_2 = 30$ m, y (6)
  el triángulo ΔS_2S_1P tiene un cateto
  $S_2S_1 = 30$ m (por (ii)). (7)

1020124713



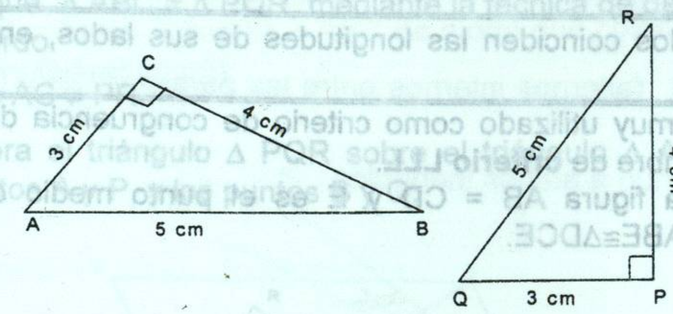
Evidentemente, las herramientas de que disponemos no nos permiten aun resolver este problema. Sin embargo, si pudiésemos encontrar una relación entre los triángulos ΔRS_3S_2 y ΔS_2S_1P que nos permitiese relacionar de alguna manera la distancia RS_3 con la distancia PS_1, seríamos capaces de encontrar la medida buscada.

Si observamos detenidamente el dibujo, vemos que los triángulos rectángulos ΔRS_3S_2 y ΔS_2S_1P "parecen ser iguales", por lo que la distancia buscada debe ser $PS_1 = 40$ m.

Veamos a continuación la teoría que nos permite solucionar este tipo de problemas:

- Si en dos triángulos cualesquiera ΔABC y ΔPQR se puede establecer una correspondencia entre sus lados y ángulos de manera que a cada lado del triángulo ΔABC corresponda uno y sólo un lado del triángulo ΔPQR de igual longitud, y a cada ángulo del triángulo ΔABC corresponda uno y sólo un lado del triángulo ΔPQR de igual medida, entonces se dice que los triángulos ΔABC y ΔPQR son **congruentes** y se denota este hecho por
- $\Delta ABC \cong \Delta PQR$.
- Cada lado o ángulo del triángulo ΔPQR se dice **homólogo** al lado o ángulo correspondiente en el triángulo ΔABC.

Así, en la figura es $\Delta ABC \cong \Delta PQR$, siendo homólogos los lados AB y QR, BC y PR, AC y PQ, y los ángulos $\angle CAB$ y $\angle PQR$, $\angle ABC$ y $\angle QRP$, $\angle ACB$ y $\angle QPR$.



Nuestro problema consiste ahora en determinar un número mínimo de condiciones que sean suficientes para garantizar la congruencia de triángulos.

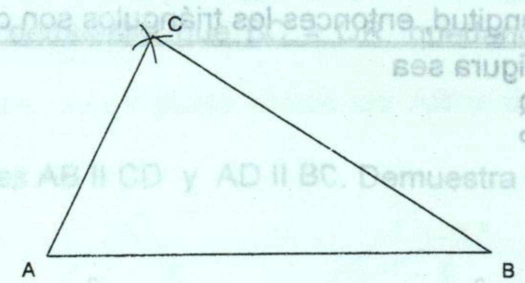
Observa el ejemplo 1 del epígrafe 1.8. En esa ocasión vimos cómo dibujar un triángulo conocidas las longitudes de sus lados. El procedimiento seguido fue (ver figura) :

1er Paso: Se traza el segmento AB de longitud conocida.

2do Paso: Con centro en A y radio igual a la longitud de AC se traza un sector de circunferencia a un lado del segmento AB.

3er Paso: Al mismo lado del segmento AB y con centro en B y radio igual a la longitud del segmento BC se traza otro sector de circunferencia.

4to Paso: Los sectores de circunferencia trazados en los pasos 2 y 3 se cortan en un punto único que corresponde al tercer vértice (C) del triángulo ΔABC.



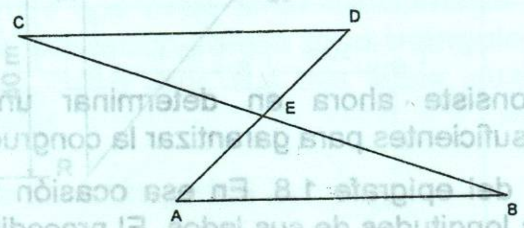
De ese modo se observa que un triángulo está totalmente determinado por las longitudes de sus lados. Por esa razón la coincidencia de las longitudes de los de los triángulos implica de modo automático la coincidencia de la medida de sus ángulos homólogos. Así, es válido el siguiente

Teorema

Si en dos triángulos coinciden las longitudes de sus lados, entonces ellos son congruentes.

Este teorema es muy utilizado como criterio de congruencia de triángulos y se conoce con el nombre de **criterio LLL**.

Ejemplo 1: En la figura AB = CD y E es el punto medio de AD y de BC. Demuestre que ΔABE≅ΔDCE.



Demostración: En este problema se tiene que

AE = ED por ser E punto medio de AD
BE = EC por ser E punto medio de BC
AB = CD por hipótesis.

Entonces por el criterio LLL es

ΔABE ≅ ΔDCE. ■

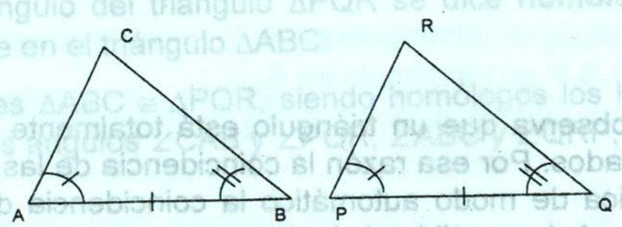
El siguiente teorema se conoce como **criterio ALA**.

Teorema

Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales y el lado comprendido entre esos ángulos es de igual longitud, entonces los triángulos son congruentes.

Demostración: En la figura sea

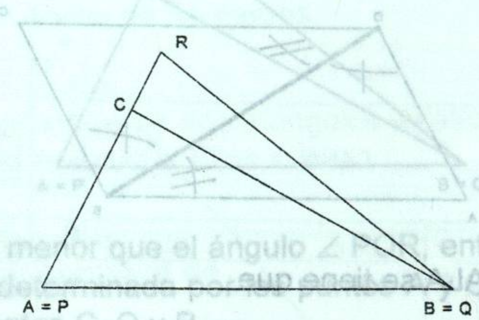
∠ CAB = ∠ RPQ
∠ CBA = ∠ RQP
AB = PQ.



Demostraremos que Δ ABC ≅ Δ PQR, mediante la técnica de demostración por reducción al absurdo.

Supongamos que AC ≠ PR.

Traslademos ahora el triángulo Δ PQR sobre el triángulo Δ ABC de modo que coincidan los puntos A y P, y los puntos B y Q.



En esta traslación el punto R quedará situado sobre la recta determinada por los puntos A y C, pues ∠A = ∠P.

Como hemos supuesto que AC ≠ PR, entonces los puntos C, Q y R determinan un triángulo, de manera que el ángulo ∠ CQR tiene una amplitud positiva (no nula).

Pero entonces es

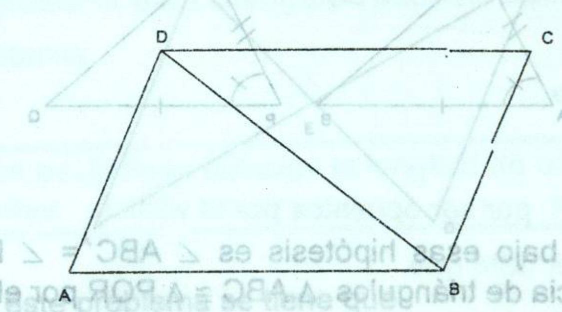
∠ PQR = ∠ ABC + ∠ CQR,

lo cual contradice la igualdad de los ángulos ∠ PQR y ∠ ABC.

Luego, tiene que ser AC = PR.

De manera análoga se demuestra que BC = QR, quedando así demostrado el teorema. ■

Ejemplo 2: En la figura es AB II CD y AD II BC. Demuestra que Δ ABD ≅ Δ CDB.



Demostración: En este problema se tiene que