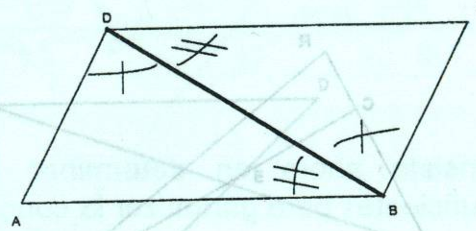
$\angle$ ADB = $\angle$ DBC (alternos internos entre las paralelas AD y BC cortadas por la transversal DB)

$\angle$ ABD = $\angle$ CDB (alternos internos entre las paralelas AB y DC cortadas por la transversal DB)

El lado DB es común a ambos triángulos.



Entonces por el criterio ALA se tiene que

Δ ABD $\cong$ Δ CDB

■

Existe un tercer criterio de congruencia de triángulos conocido como **criterio LAL**.

Teorema

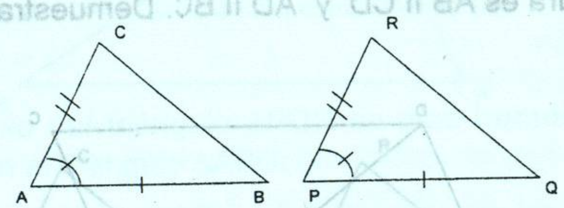
Si dos triángulos tienen dos lados con iguales longitudes y el ángulo comprendido tiene igual magnitud, entonces ellos son congruentes.

Demostración: En la figura sea

$\angle$ CAB = $\angle$ RPQ

AB = PQ

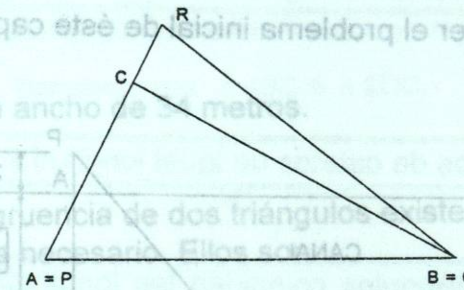
AC = PR.



Demostraremos que bajo esas hipótesis es $\angle$ ABC = $\angle$ PQR, con lo que se obtendría la congruencia de triángulos Δ ABC $\cong$ Δ PQR por el criterio ALA.

Utilicemos nuevamente la técnica de demostración por reducción al absurdo.

Supongamos que el ángulo $\angle$ ABC es menor que el ángulo $\angle$ PQR, y traslademos el triángulo ΔPQR sobre el triángulo Δ ABC de modo que coincidan los puntos A y P, y los puntos B y Q (ver figura).



Si el ángulo $\angle$ ABC es menor que el ángulo $\angle$ PQR, entonces el punto R quedará situado sobre la recta determinada por los puntos A y C, formándose un triángulo determinado por los puntos C, Q y R.

Pero entonces sería

PR = AC + CR,

lo cual contradice la hipótesis de la igualdad de las longitudes de los lados AC y PC..

Luego, tiene que ser

$\angle$ ABC $\geq$ $\angle$ PQR.

De manera análoga se demuestra que

$\angle$ ABC $\leq$ $\angle$ PQR,

siendo así

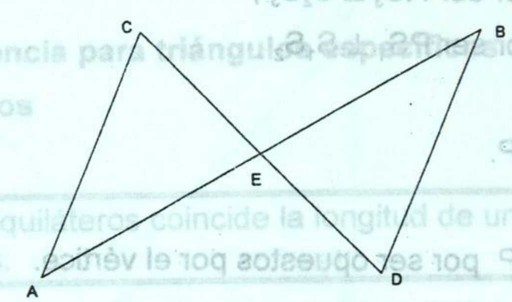
$\angle$ ABC = $\angle$ PQR.

Aplicando entonces el criterio ALA se obtiene

Δ ABC $\cong$ Δ PQR.

■

Ejemplo 3: En la figura E es punto medio de AB y de CD. Demuestra que ΔAEC$\cong$$\Delta$ BED.



Demostración: En este problema se tiene que

CE = ED por ser E punto medio de CD

AE = EB por ser E punto medio de AB

$\angle AEC = \angle BED$ por ser opuestos por el vértice.

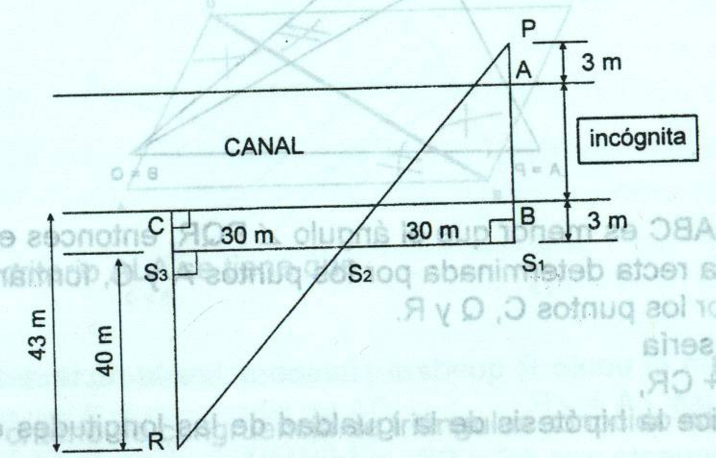
Entonces es

$\Delta AEC \cong \Delta BED$

por el criterio LAL.

■

Intentemos ahora resolver el problema inicial de éste capítulo:



Los resultados obtenidos en el análisis preliminar del problema son:

$S_1S_2 = c = 30$ m

$RS_3 = 40$ m

$RS_3 \perp S_2S_3$

$PS_1 \perp S_1S_2$

La incógnita es $AB = (PS_1 - 6)$

Analizando el problema desde el punto de vista de la congruencia de triángulos se tiene que

$\angle S_2S_3R = 90°$ por ser $RS_3 \perp S_2S_3$,

$\angle S_2S_1P = 90°$ por ser $PS_1 \perp S_1S_2$.

Entonces es

$\angle S_2S_3R = \angle S_2S_1P$.

Así mismo es

$\angle RS_2S_3 = \angle S_1S_2P$ por ser opuestos por el vértice.

Además, se conoce por dato que

$S_2S_1 = S_2S_3$ 30 m.

Entonces, por el criterio ALA se tiene que

$\Delta RS_2S_3 \cong \Delta P S_2S_1$.

De ahí que los lados homólogos PS_1 y RS_3 tengan igual longitud, es decir

$PS_1 = RS_3 = 40$ m,

y entonces es

$AB = PS_1 - 6 = 34$.

Luego, el canal tiene un ancho de 34 metros.

Resumen

Para determinar la congruencia de dos triángulos existen tres criterios que pueden ser aplicados según sea necesario. Ellos son:

Criterio	igual magnitud de
LLL	los tres lados iguales
ALA	dos ángulos y el lado comprendido de igual magnitud
LAL	dos lados y el ángulo comprendido de igual magnitud

Te recomendamos ahora que analices la posibilidad de simplificar estos criterios en el caso de triángulos específicos, por ejemplo, en los triángulos equiláteros, isósceles y rectángulos.

Inténtalo primeramente por tí mismo. Para ello puedes preguntarte si serán congruentes todos los triángulos equiláteros, o isósceles, o rectángulos ; o que condición necesitarías para poder dibujar dos triángulos congruentes del mismo tipo.

A continuación te mostramos cuáles son esos criterios y te encargamos su demostración como ejercicio.

Criterios de congruencia para triángulos específicos

Triángulos equiláteros

Corolario

Si en dos triángulos equiláteros coincide la longitud de uno de sus lados, entonces ellos son congruentes.

Triángulos isósceles

Corolario

Si en dos triángulos isósceles coinciden las magnitudes de un lado y de uno de sus ángulos, entonces ellos son congruentes.

Triángulos rectángulos

Corolario

Dos triángulos rectángulos de catetos de igual longitud son congruentes.

Corolario

Si en dos triángulos rectángulos coinciden las longitudes de la hipotenusa y de uno de sus catetos, entonces ellos son congruentes.

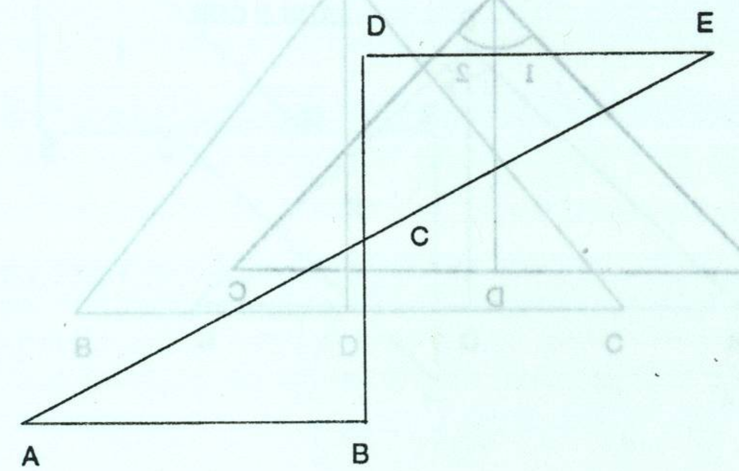
Corolario

Si en dos triángulos rectángulos coincide uno de sus ángulos agudos y la longitud de uno de sus lados, entonces ellos son congruentes.

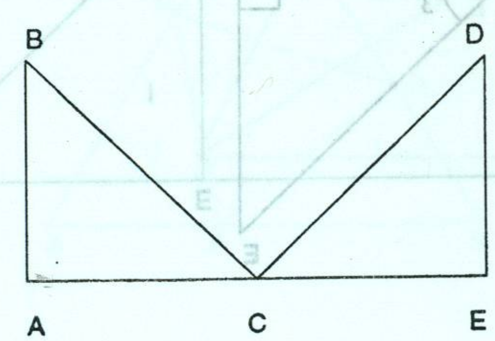
Mas adelante veremos otra aplicación importantísima de la congruencia de triángulos a la demostración del conocido Teorema de Pitágoras.

Ejercicio 1. 10

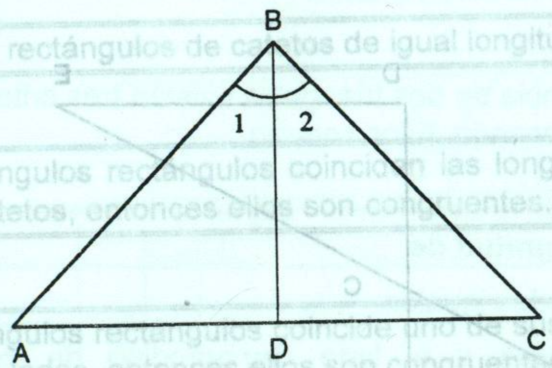
1) Si en la figura $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$ se bisectan mutuamente en C, $DE \perp BD$ y $AB \perp BD$. Demuestra que $\Delta ABC \cong \Delta EDC$.



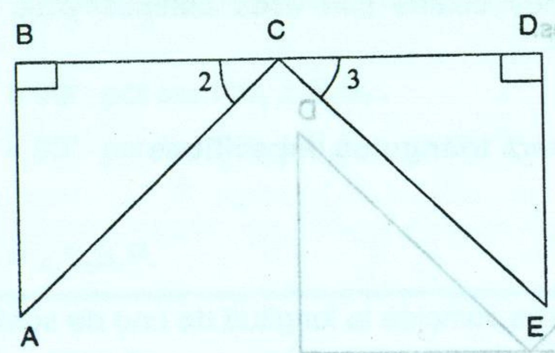
2) Si en la figura $\overline{AB} \perp \overline{AE}$; $\overline{DE} \perp \overline{AE}$, C es el punto medio de $\overline{AE}$ y $\angle ACB \cong \angle ECD$. Demuestra que los triángulos ΔACB y ΔECD son congruentes.



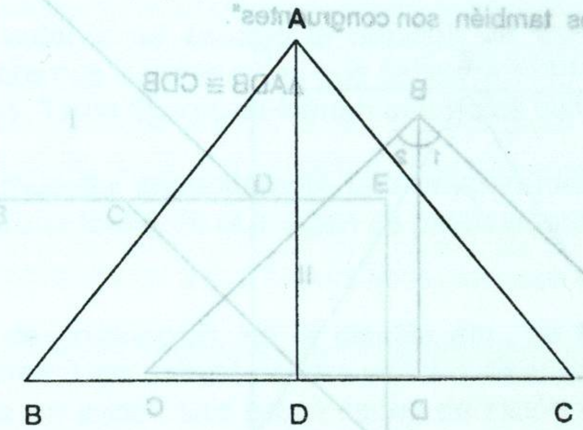
3) En la figura $\overline{BD}$ biseca a el ángulo ABC y $\overline{BD} \perp \overline{AC}$. Demuestra que los triángulos Δ ADB Δ CDB son congruentes.



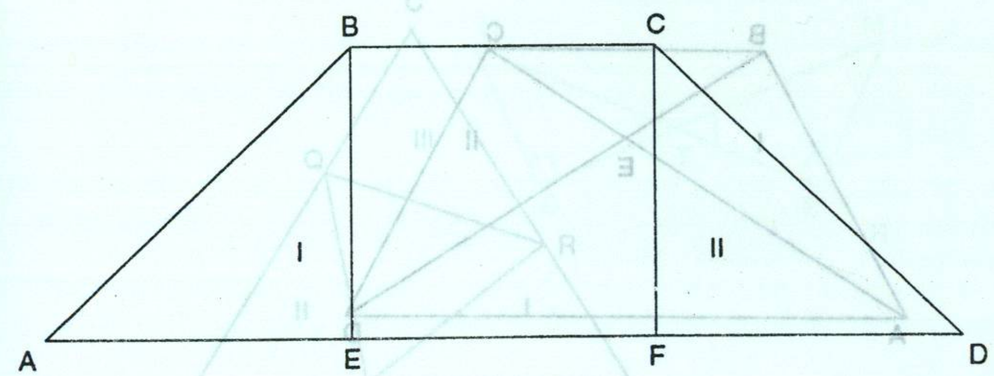
4) Si en la figura C es el punto medio de $\overline{BD}$ y $< 2 \cong < 3$, demuestra que los triángulos Δ ABC y Δ EDC son congruentes.



5) En la figura, si $AB \cong AC$ y AD es una mediana, demuestra que los triángulos ΔABD y ΔACD son congruentes.



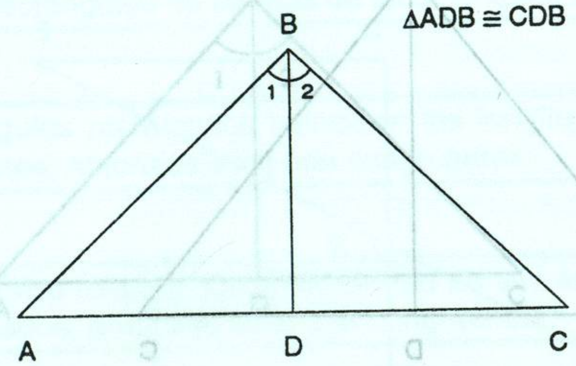
6) Si en la figura $\overline{BE} \perp AD$, $\overline{CF} \perp AD$, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ y $\overline{AD}$ está trisecado, demuestra que los triángulos I y II son congruentes.



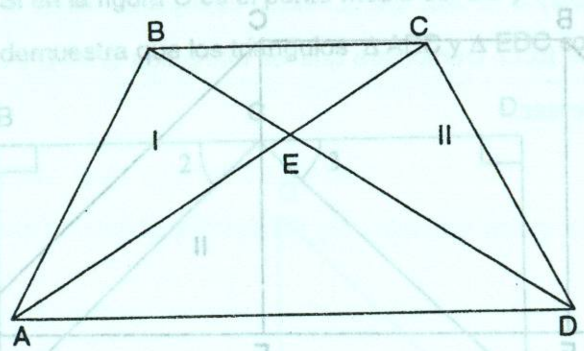
7) Sea el triángulo ΔABC isósceles, donde el segmento de recta $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, con bisectriz $\underline{BD}$, demuestra el siguiente teorema:

"Si dos lados de un triángulo son congruentes, los ángulos opuestos a ellos también son congruentes".

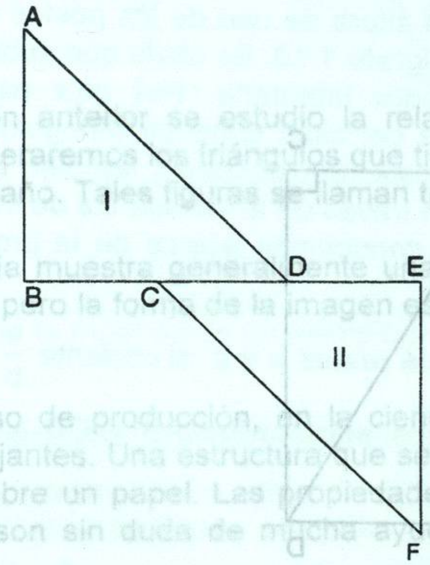
$\Delta ADB \cong CDB$



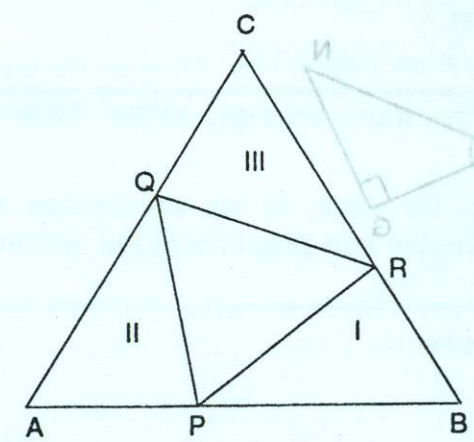
8) Si $BE \cong EC$, $\overline{AE} \cong \overline{ED}$, demostrar que $\Delta\, I \cong \overline{\Delta\, II}$.



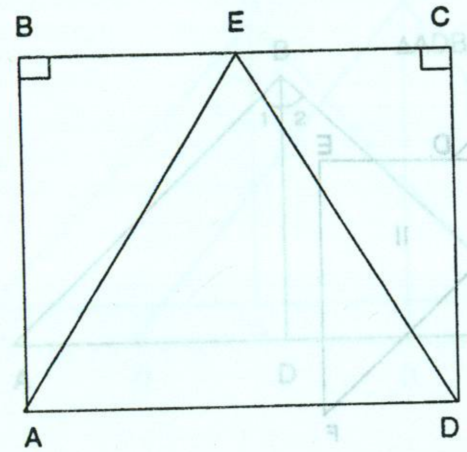
9) Si $\overline{AB} \perp BE$, $\overline{EF} \perp BE$, $\overline{BC} \cong DE$ y $\overline{AB} \cong \overline{EF}$, demostrar que los triángulos I y II son congruentes.



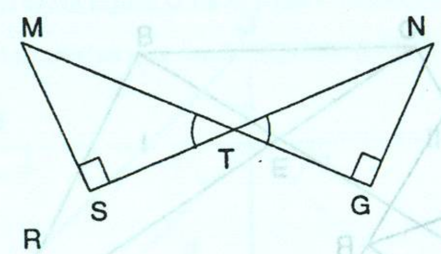
10) Sea el triángulo ΔABC equilatero con $\overline{AP} \cong \overline{CQ} \cong \overline{BR}$, demuestra que los triángulos I, II y III son congruentes.



11) Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{BC} \cong \overline{AD}$, E es el puntomedio de $\overline{BC}$, demostrar que $\Delta AEB \cong CED$.



12) Si en la figura $\overline{MS} \perp \overline{SN}$; $\overline{NG} \perp \overline{MG}$ y $\overline{ST} \cong \overline{TG}$, demostrar que los triángulo Δ STM y Δ GTN son congruentes.



CAPITULO 2

GEOMETRÍA PLANA
SEGUNDA PARTE

En la sección anterior se estudio la relación de congruencia entre triángulos. Ahora consideraremos los triángulos que tienen la misma forma , pero que pueden diferir en tamaño. Tales figuras se llaman triángulos semejantes.

Una fotografía muestra generalmente una imagen menor o mayor que el objeto fotografiado, pero la forma de la imagen es precisamente la del objeto en términos geométricos.

En el proceso de producción, en la ciencia etc., se trabaja continuamente con figuras semejantes. Una estructura que se va a diseñar, primero se traza a escala su diseño sobre un papel. Las propiedades de razón y proporción de las figuras semejantes son sin duda de mucha ayuda para resolver problemas de la vida diaria.