2.1 Teorema de Thales

Objetivo

Recordar los conceptos de razón, proporción y el Teorema de Thales.

Imagina ahora que deseas medir la altura de uno de los postes eléctricos que se mencionan en el problema 1 del epígrafe 1.10. Es obvio que subir al poste es una estrategia demasiado peligrosa para intentarla. Por otra parte, no es fácil encontrar puntos de referencia que permitan construir triángulos congruentes, a causa de la posición vertical del poste. Sin embargo, también esta vez acude a nuestra ayuda la Geometría Plana a través de la semejanza de triángulos.

Recordemos primeramente lo que conocemos acerca de la proporcionalidad de segmentos.

- Llamamos **razón de dos números reales a y b** al cociente $\frac{a}{b}$ (b ≠ 0).
- Se llama entonces **razón de dos segmentos** AB y CD a la razón de sus longitudes $\frac{AB}{CD}$.
- Una **proporción** es una expresión numérica de la forma $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (b ≠ 0 y d ≠ 0).
- Se dice que dos pares de segmentos AB, CD y PQ, RS son **proporcionales** si es válida la proporción de sus longitudes, es decir, si $\frac{AB}{CD}=\frac{PQ}{RS}$.

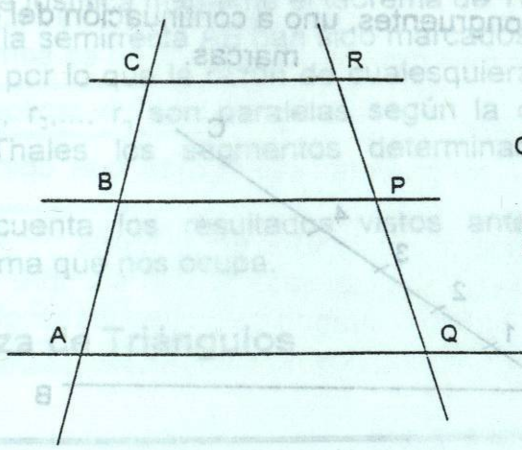
Uno de los teoremas más usados en Geometría Plana es el teorema de Thales que te recordamos a continuación.

Teorema de Thales

> Si a rectas paralelas las cortan transversales, estas determinan segmentos proporcionales.
>
> El recíproco también es válido. Es decir, si los segmentos determinados por transversales que cortan varias rectas son proporcionales, entonces estas últimas son paralelas.

Así por ejemplo en la figura se tiene

$$\frac{BC}{AC}=\frac{QR}{PR}$$



CR II BQ II AP

CA y RP son transversales

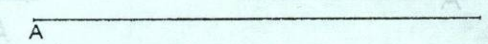
A continuación te mostramos un ejemplo práctico de este resultado.

Ejemplo 1: Partición de un segmento en la razón dada

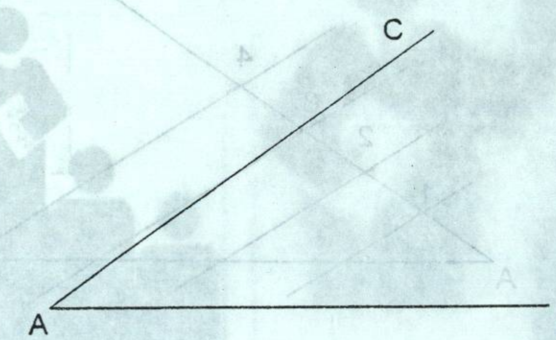
Dado un segmento AB, dividirlo en n segmentos de igual longitud, con la utilización exclusiva de regla y compás.

Te mostraremos como resolver este problema para n = 4.

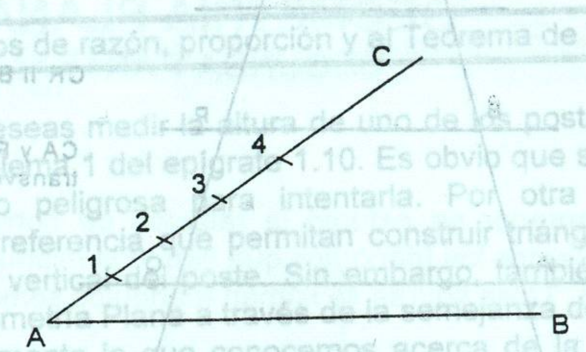
1° Paso: Dibuja el segmento AB.



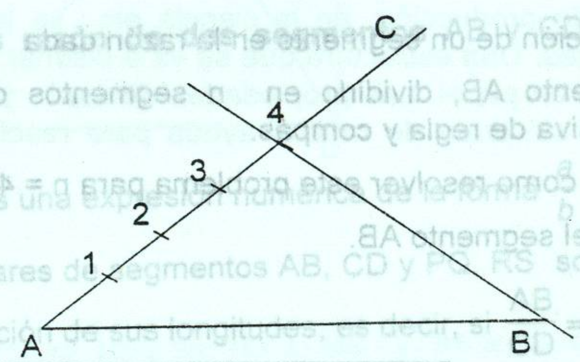
2° Paso: Dibuja un rayo AC con origen en A y formando un ángulo cualquiera con el segmento AB.



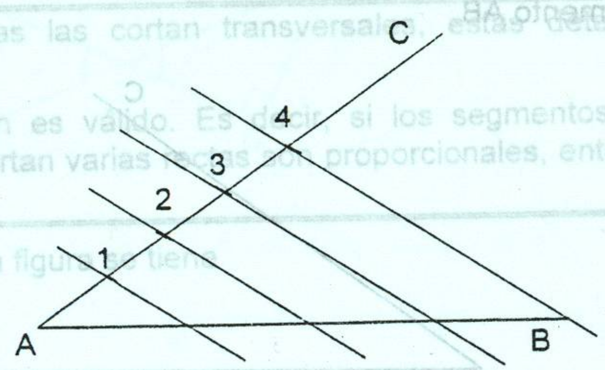
3° Paso: Con una abertura fija en el compás marca en AC (partiendo del punto A) 4 segmentos congruentes, uno a continuación del otro y numera las marcas.



4° Paso: Traza una recta que contenga al punto B y al punto numerado 4 sobre AC.



5° Paso: Traza rectas r_1, r_2, r_3, que sean paralelas a r_4 y que contengan a los puntos numerados 1, 2, 3 respectivamente.



6° Paso: Los puntos de intersección de las rectas r_1, r_2, r_3 y r_4 con el segmento AB marcan la división del segmento AB en 4 segmentos iguales.

La posibilidad de aplicar la técnica aquí explicada para dividir un segmento en n partes iguales se justifica mediante el teorema de Thales.
Nota que sobre la semirrecta AB han sido marcados n segmentos consecutivos de igual magnitud, por lo que la razón de cualesquiera de ellos es 1. Por otra parte, las rectas r_1, r_2, r_3,..., r_n son paralelas según la construcción. Luego, según el Teorema de Thales los segmentos determinados sobre AB mantienen la proporción 1.
Tomando en cuenta los resultados vistos anteriormente podemos pasar a desarrollar el tema que nos ocupa.

2.2 Semejanza de Triángulos

Objetivo

Definir el concepto de semejanza de triángulos

Observa las siguientes figuras:

Fig A

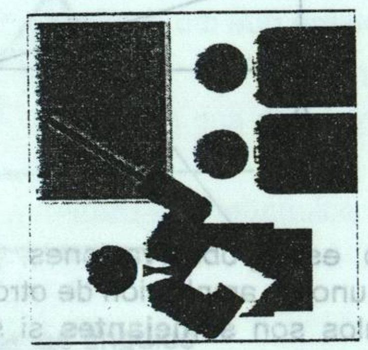


Fig. B

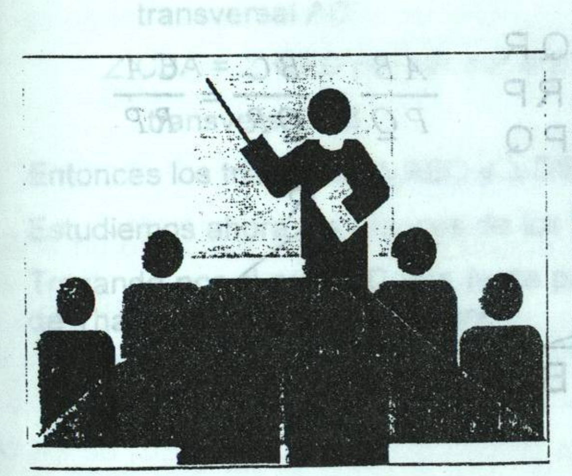


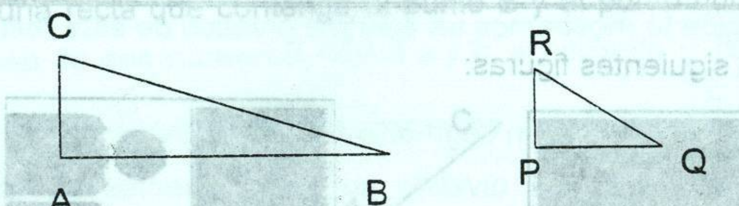
Fig. C

Fig. D

¿Cuáles son semejantes en tu opinión? ¿Cuáles dirías que son congruentes?
Efectivamente, las figuras A y B son congruentes, mientras que la figura D es sólo semejante a ellas, pues es más grande, la figura C no es semejante a ninguna de las anteriores.
¿Que criterio hemos aplicado?

- Consideramos que son congruentes las figuras que coinciden en todos sus puntos.
- Son semejantes las figuras que coinciden en su forma.

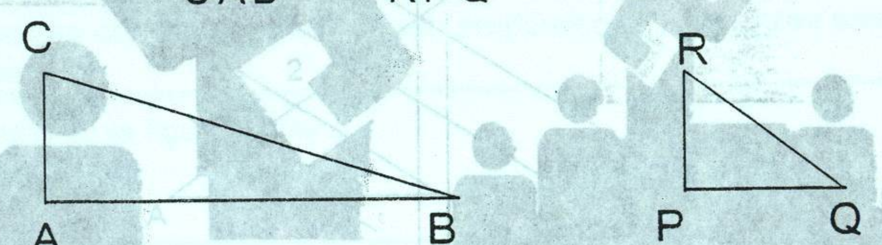
Según este criterio, dos triángulos equiláteros son siempre semejantes pero no siempre son congruentes (excepto cuando coinciden las longitudes de sus lados). Sin embargo, dos triángulos rectángulos no siempre son semejantes (ver figura).



Generalizando estas observaciones, podemos notar que dos triángulos son semejantes si uno es ampliación de otro, es decir:

* Dos triángulos son **semejantes** si sus ángulos son congruentes y los lados homólogos son proporcionales. En ese caso se llama **razón de semejanza** al valor constante de las razones de sus lados homólogos.
NOTACIÓN: $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (ver figura):

$$\angle ABC = \angle PQR \qquad \angle BCA = \angle QRP \qquad \angle CAB = \angle RPQ \qquad \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$$



$\Delta ABC \sim \Delta PQR.$

2.3 Teorema Fundamental de Semejanza de Triángulos

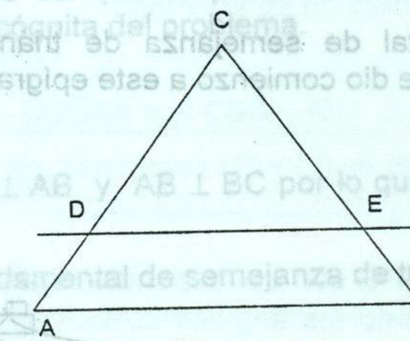
Objetivo

Comprender y aplicar el Teorema Fundamental de Semejanza de Triángulos.

Teorema

Toda paralela a un lado de un triángulo forma con los otros lados un triángulo semejante al primero y viceversa, es decir, si al trazar una recta en el interior de un triángulo se obtiene un triángulo semejante al primero entonces la recta trazada es paralela al lado del triángulo que no corta.

Demostración:
En la figura se tiene que DE || AB y se quiere demostrar que $\Delta ABC \sim \Delta DEC$.



Demostraremos primero la igualdad de los ángulos

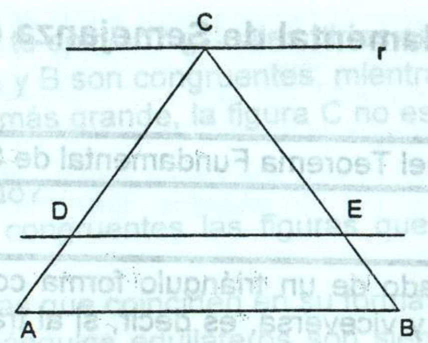
$\angle C$ es común a ambos triángulos

$\angle CAB = \angle CDE$ por ser correspondiente entre las paralelas AB y CD con la transversal AC.

$\angle CBA = \angle CED$ por ser correspondientes entre las paralelas AB y CD con la transversal CB.

Entonces los triángulos ΔABC y ΔDEC tiene ángulos de igual magnitud.
Estudiemos ahora las razones de los lados homólogos de los triángulos.
Trazando por el punto C una recta paralela a DE y a AB y aplicando el Teorema de Thales (ver figura) se obtiene

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB}$$



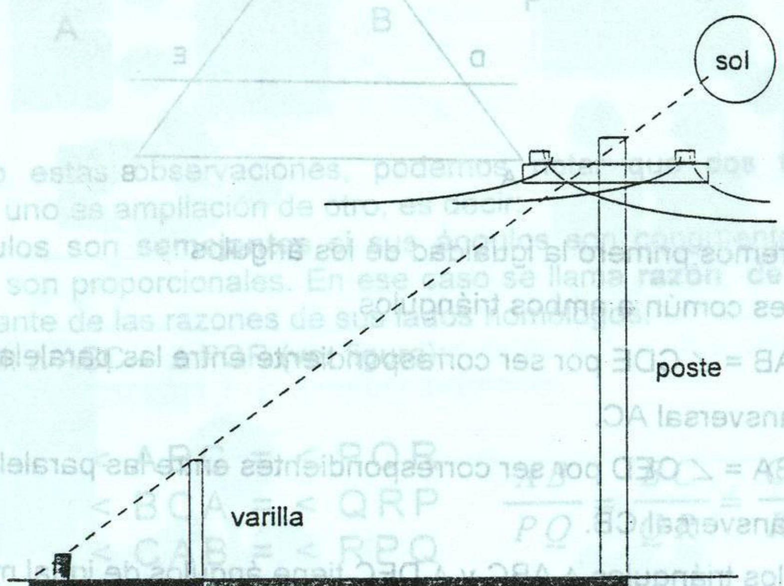
Entonces los triángulos Δ ABC y Δ DEC tienen ángulos congruentes y lados homólogos proporcionales, lo cual demuestra que

$$\Delta ABC \sim \Delta DEC \;.$$

■

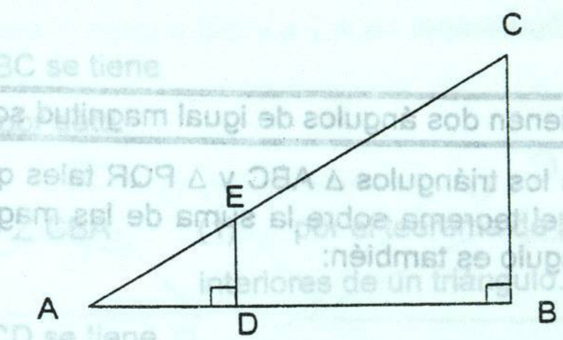
El teorema fundamental de semejanza de triángulos nos permite entonces resolver el problema que dio comienzo a este epígrafe.

Observa la figura:



Para calcular la altura del poste (que se encuentra colocado formando un ángulo recto con el suelo) aprovecharemos la sombra que este proyecta. Para ello fijaremos una varilla recta de longitud conocida en ángulo recto con el suelo de manera que el extremo de su sombra coincida con el extremo de la sombra del poste. (ver figura anterior)

De esta manera se forman dos triángulos rectángulos Δ ABC y Δ DEC, de los que se conoce que:



- DE representa la varilla por lo que su longitud es conocida.
- AD representa la sombra de la varilla y AB la sombra del poste, por lo que sus longitudes son fáciles de determinar y se pueden considerar conocidas.
- BC representa el poste del que se pretende calcular la altura, por lo que la longitud de BC es la incógnita del problema.

Resolución del problema:

Por construcción es $DE \perp AB$ y $AB \perp BC$ por lo que aplicando el teorema 1.4.1 se obtiene $DE \parallel BC$.

Entonces, el teorema fundamental de semejanza de triángulos nos asegura que:

$$\Delta ABC \sim \Delta ADE.$$

Por esta razón los lados homólogos de ambos triángulos son proporcionales, por lo que

$$\frac{CB}{AB} = \frac{DE}{AD}$$

de donde despejando CB se obtiene la fórmula para calcularlo.

$$CB = \frac{DE \bullet AB}{AD}$$

partiendo de las longitudes de DE, AB y AD que son conocidas.

2.4 Criterios de semejanza de triángulos

Objetivo

Dominar los criterios de semejanza de triángulos y aplicarlos en la resolución de ejercicios.

Al igual que en la congruencia, existen criterios que permiten determinar más fácilmente la semejanza de dos triángulos. Estos son: