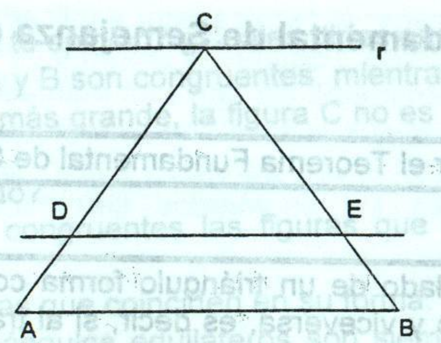


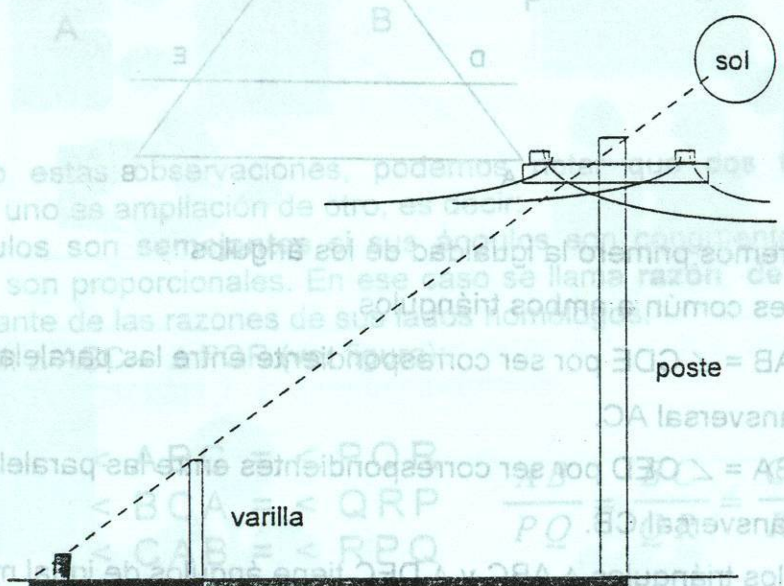
Entonces los triángulos Δ ABC y Δ DEC tienen ángulos congruentes y lados homólogos proporcionales, lo cual demuestra que

$$\Delta ABC \sim \Delta DEC .$$

■

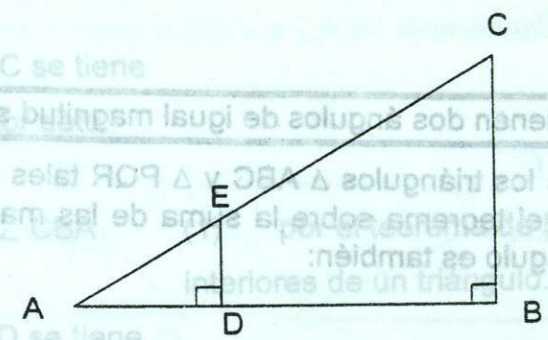
El teorema fundamental de semejanza de triángulos nos permite entonces resolver el problema que dio comienzo a este epígrafe.

Observa la figura:



Para calcular la altura del poste (que se encuentra colocado formando un ángulo recto con el suelo) aprovecharemos la sombra que este proyecta. Para ello fijaremos una varilla recta de longitud conocida en ángulo recto con el suelo de manera que el extremo de su sombra coincida con el extremo de la sombra del poste. (ver figura anterior)

De esta manera se forman dos triángulos rectángulos Δ ABC y Δ DEC, de los que se conoce que:



- DE representa la varilla por lo que su longitud es conocida.
- AD representa la sombra de la varilla y AB la sombra del poste, por lo que sus longitudes son fáciles de determinar y se pueden considerar conocidas.
- BC representa el poste del que se pretende calcular la altura, por lo que la longitud de BC es la incógnita del problema.

Resolución del problema:

Por construcción es $DE \perp AB$ y $AB \perp BC$ por lo que aplicando el teorema 1.4.1 se obtiene $DE \parallel BC$.

Entonces, el teorema fundamental de semejanza de triángulos nos asegura que:

$$\Delta ABC \sim \Delta ADE.$$

Por esta razón los lados homólogos de ambos triángulos son proporcionales, por lo que

$$\frac{CB}{AB} = \frac{DE}{AD}$$

de donde despejando CB se obtiene la fórmula para calcularlo.

$$CB = \frac{DE \bullet AB}{AD}$$

partiendo de las longitudes de DE, AB y AD que son conocidas.

2.4 Criterios de semejanza de triángulos

Objetivo

Dominar los criterios de semejanza de triángulos y aplicarlos en la resolución de ejercicios.

Al igual que en la congruencia, existen criterios que permiten determinar más fácilmente la semejanza de dos triángulos. Estos son:

Criterio AA

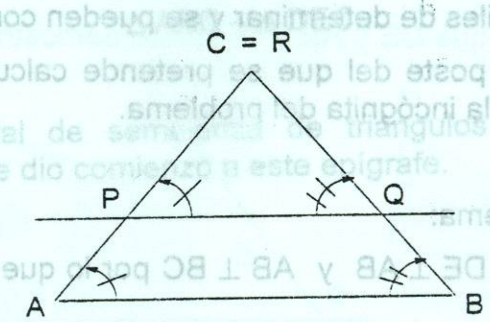
Teorema

Dos triángulos que tienen dos ángulos de igual magnitud son semejantes.

Demostración: Sean los triángulos Δ ABC y Δ PQR tales que $\angle A=\angle P$ y $\angle B=\angle Q$. Entonces aplicando el teorema sobre la suma de las magnitudes de los ángulos interiores de un triángulo es también:

$\angle C = \angle R$.

Luego, podemos transportar el triángulo Δ PQR sobre el triángulo Δ ABC, de manera que coincidan los vértices C y R y que los lados PR y QR del triángulo ΔPQR se encuentren sobre los lados AC y BC del triángulo Δ ABC. (ver figura)



Los ángulos $\angle$CAB y $\angle$CPQ son correspondientes entre las rectas PQ y AB, con la transversal CA, así como los ángulos $\angle$ABC y $\angle$PQR tomando a CB como transversal.

Pero se conoce que

$\angle RPQ = \angle CAB$

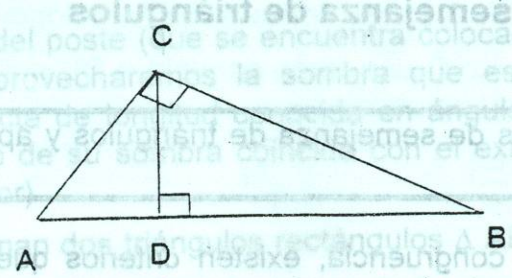
$\angle RQP = \angle CBA$.

Entonces se tiene que

PQ || AB

Y los triángulos Δ ABC y Δ PQR son semejantes. ■

Ejemplo 2: En la siguiente figura, CD es la altura del triángulo ΔABC el cual es rectángulo en C. Demuestre que $\Delta ABC \sim \Delta ACD$.



Demostración:

En el triángulo Δ ABC se tiene

$\angle ACB = 90°$ por dato.

Entonces

$\angle CAB = 90° - \angle CBA$ (1) por el teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

En el triángulo Δ ACD se tiene

$\angle ADC = 90° = \angle ACB$ (2) por dato.

Entonces

$\angle ACD = 90° - \angle CAB$ por el teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

Luego aplicando (1) se tiene

$\angle ACD = 90° - (90° - \angle CBA) = \angle CBA$ (3).

Aplicando el criterio AA y los resultados (1) y (3) se demuestra que

$\Delta ABC \sim \Delta ACD$. ■

Como ejercicio te recomendamos que demuestres los siguientes corolarios:

Corolario

Dos triángulos rectángulos con un ángulo agudo de igual magnitud son semejantes.

Corolario

Dos triángulos isósceles con un ángulo agudo de igual magnitud son semejantes.

Corolario

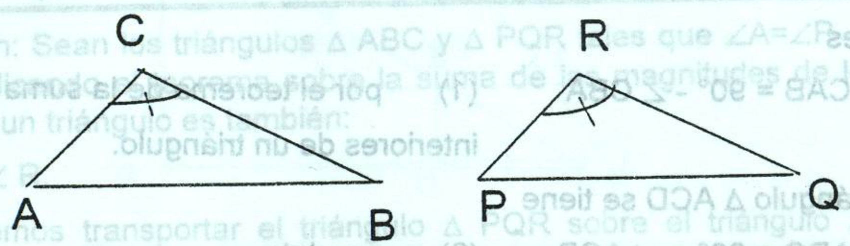
Todos los triángulos equiláteros son semejantes.

Criterio LAL

Teorema

Dos triángulos que tienen un ángulo de igual magnitud comprendido entre lados proporcionales, son semejantes.

Demostración: En la figura sea

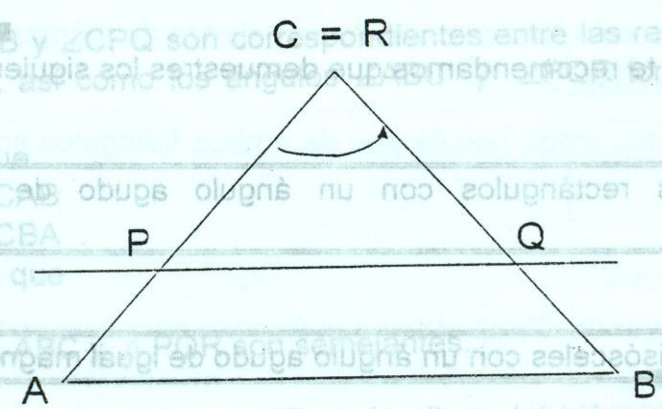


$\angle C = \angle R$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{RQ}$$

y queremos demostrar que Δ ABC ~ Δ PQR.

Transponiendo el triángulo Δ PQR sobre el triángulo Δ ABC, de manera que coincidan los vértices C y R y que los lados PR y QR del triángulo Δ PQR se encuentren sobre los lados AC y BC del triángulo Δ ABC (ver figura)



Entonces, aplicando el recíproco del Teorema de Thales se obtiene que:

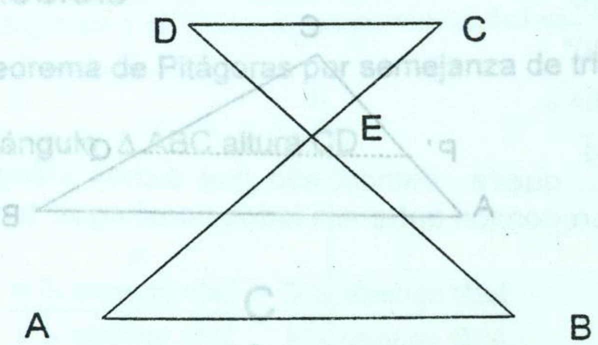
PQ || AB,

de donde es

Δ ABC ~ Δ PQR.

por el teorema fundamental de semejanza de triángulos. ■

Ejemplo 3: En la figura E corta a DB y a CA en la proporción $\frac{1}{3}$. Demostrar que Δ DEC ~ Δ BEA



Demostración:

$\angle$ DEC = $\angle$ BEA por ser opuestos por el vértice

$\frac{EC}{EA} = \frac{ED}{EB} = \frac{1}{3}$ por dato.

Entonces por el criterio LAL se tiene

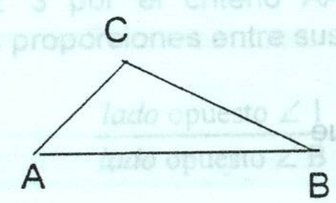
Δ DEC ~ Δ BEA

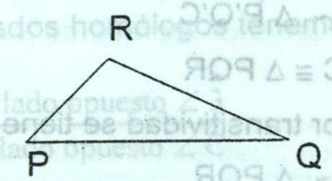
Criterio LLL

Teorema

Dos triángulos que tienen los tres lados proporcionales son semejantes.

Demostración: En la figura, sea



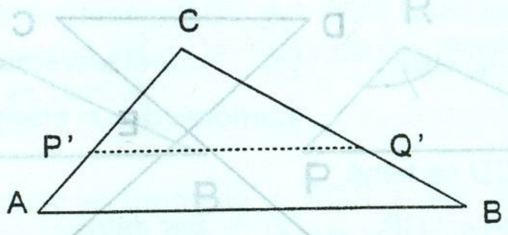


$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

y queremos demostrar que: Δ ABC ~ Δ PQR.

Sean P' y Q' puntos en CA y CB respectivamente tales que

CP' = RP y CQ' = RQ (ver figura).



Entonces

$$\frac{CA}{CP'} = \frac{CB}{CQ'}.$$

Además, el ángulo $\angle C$ es común a los triángulos Δ P'Q'C y Δ ABC, luego, se tiene que

Δ ABC ~ Δ P'Q'C por el criterio LAL.

Por otra parte se tiene

$$\frac{AB}{P'Q'} = \frac{CA}{CP'}$$ por semejanza de triángulos

$$\frac{AB}{P'Q'} = \frac{CA}{CP'}$$ por dato.

Entonces es P'Q' = PQ de donde

Δ P'Q'C $\cong$ Δ PQR.

Resulta entonces que tenemos que

Δ ABC ~ Δ P'Q'C

Δ P'Q'C $\cong$ Δ PQR

por lo que por transitividad se tiene que

Δ ABC ~ Δ PQR,

que es lo que queríamos demostrar. ■

Este criterio resulta es más útil para demostrar que:

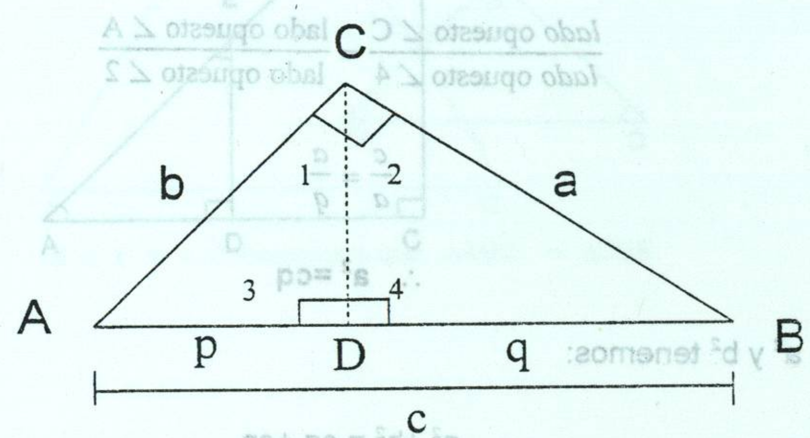
Todos los triángulos equiláteros son semejantes.

Te recomendamos que intentes obtener criterios de semejanza que te sean útiles para tipos específicos de triángulos, al igual que se procedió en el caso de la congruencia de triángulos.

TEOREMA DE PITÁGORAS

Demostración del Teorema de Pitágoras por semejanza de triángulos.

Sea el triángulo rectángulo Δ ABC altura CD



Podemos demostrar que el triángulo Δ ADC ~ Δ ACB

$\angle A + \angle 1 = 90°$

$\angle A + \angle B = 90°$

$\therefore \angle B = \angle 1$

Como $\angle$ C = $\angle$ 3 por el criterio AA se demuestra que son semejantes. Estableciendo las proporciones entre sus lados homólogos tenemos:

$$\frac{\textit{lado}\text{ opuesto } \angle 1}{\textit{lado}\text{ opuesto } \angle B} = \frac{\text{lado opuesto } \angle 3}{\text{lado opuesto } \angle C}$$

$$\frac{p}{b} = \frac{b}{c}$$

$$\therefore \mathbf{b^2 = pc}$$

así mismo demostraremos que los Δ BDC ~ Δ ACB

$\angle C = \angle 4$ (rectos)

$\angle A + \angle 1 = 90°$

$\angle 2 + \angle 1 = 90°$

$\therefore \angle A = \angle 2$

Por el criterio AA., queda demostrado que dichos triángulos son semejantes. Estableciendo la proporción entre sus lados homólogos; tenemos que:

$$\frac{lado \text{ opuesto } \angle C}{lado \text{ opuesto } \angle 4} = \frac{\text{lado opuesto } \angle A}{\text{lado opuesto } \angle 2}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{q}$$

$$\therefore \ a^2 = cq$$

Sumando a^2 y b^2 tenemos:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= cq + cp \\ &= c(q + p) \\ &= c(c) \\ &= c^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

La expresión anterior representa matemáticamente el Teorema de Pitágoras.

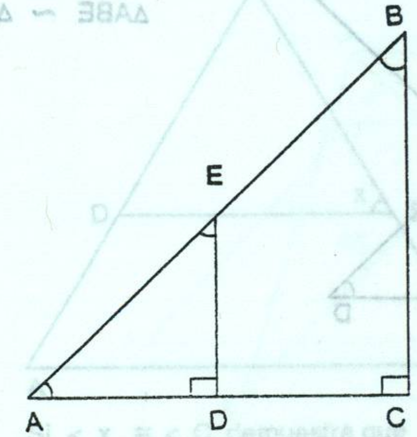
Teorema

La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Ejercicio 2.4

En cada uno de los siguientes ejercicios demuestra que los triángulos que se indican son semejantes y establece la proporcionalidad entre lados homólogos.

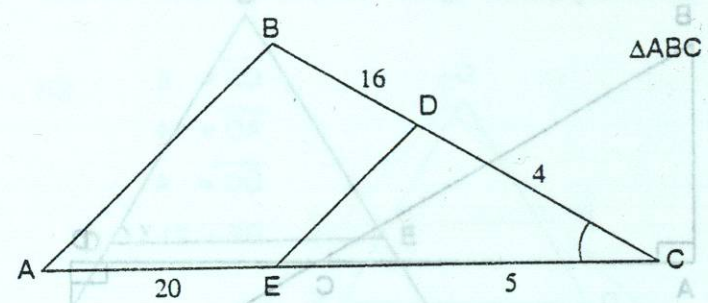
1)



$\Delta ABC \sim \Delta AED$

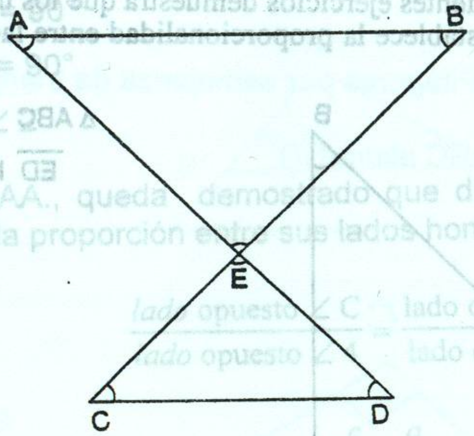
$\overline{ED} \parallel \overline{BC}$

2)



$\Delta ABC \sim \Delta EDC$

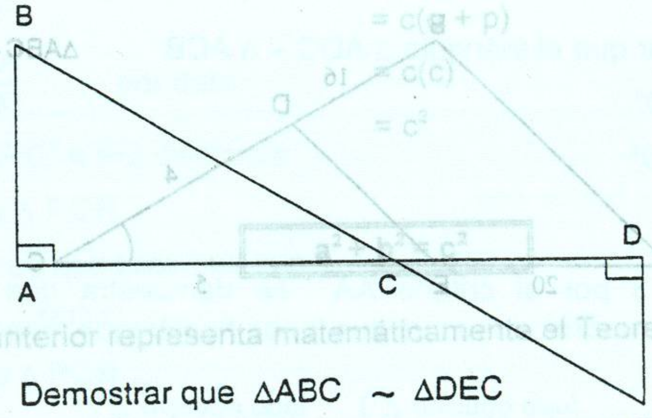
3)



$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

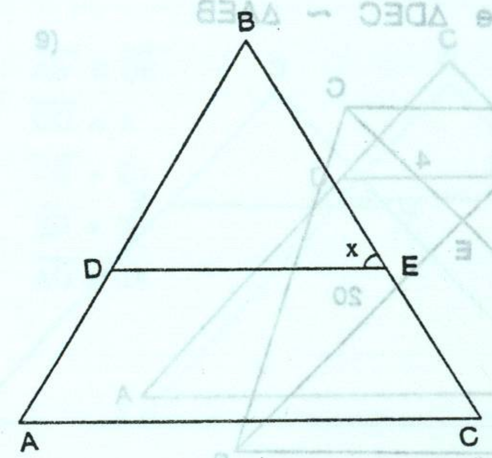
$\Delta ABE \sim \Delta CED$

4)



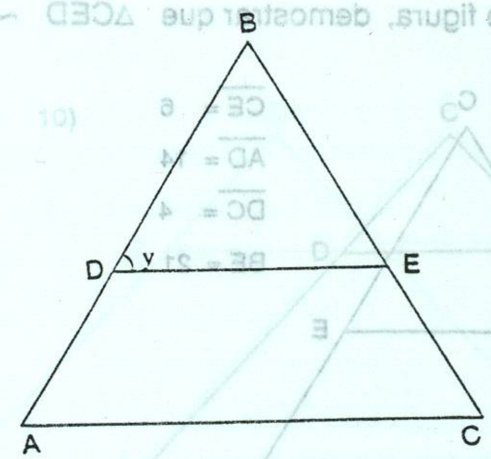
Demostrar que $\Delta ABC \sim \Delta DEC$

5)



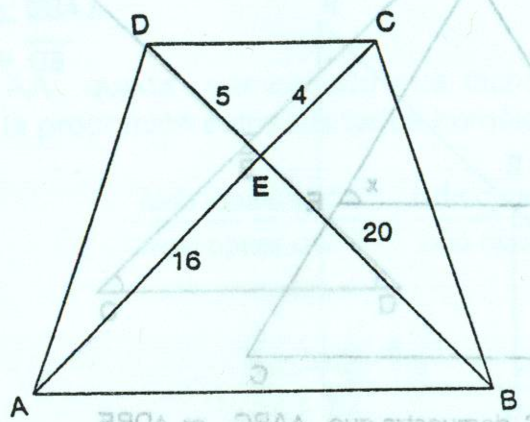
Si $\angle x \cong \angle C$, demuestre que $\Delta ABC \sim \Delta DBE$

6)

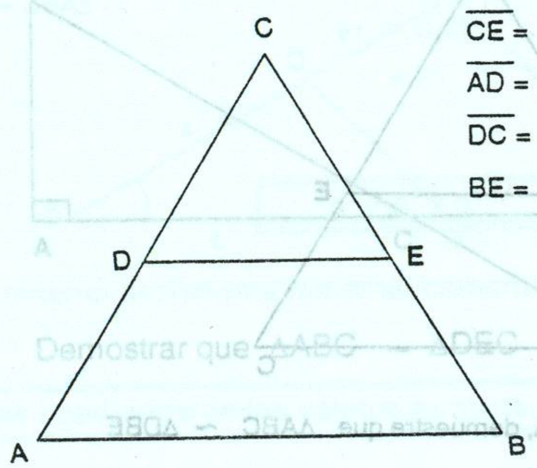


Si $\angle y \cong \angle A$, demuestre que $\Delta ABC \sim \Delta DBE$

7) Demostrar que $\Delta DEC \sim \Delta AEB$



8) En la siguiente figura, demostrar que $\Delta CED \sim \Delta CAB$



$\overline{CE} = 6$

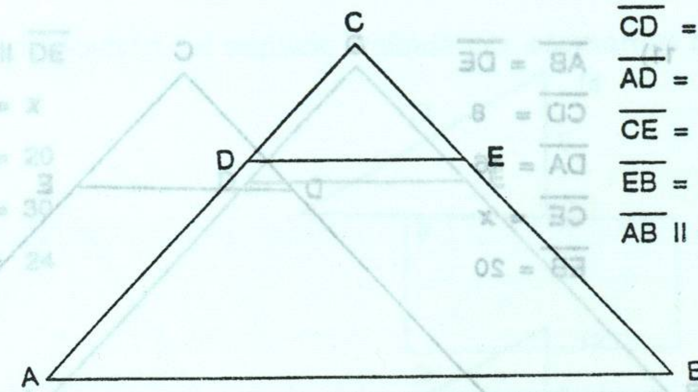
$\overline{AD} = 14$

$\overline{DC} = 4$

$BE = 21$

Hallar el valor de x en cada uno de los ejercicios

9)



$\overline{CD} = x$

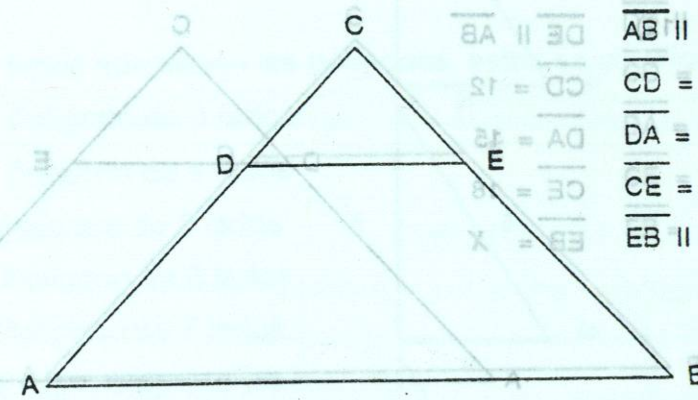
$\overline{AD} = 12$

$\overline{CE} = 9$

$\overline{EB} = 15$

$\overline{AB} \parallel DE.$

10)



$\overline{AB} \parallel \overline{DE}$

$\overline{CD} = 6$

$\overline{DA} = x$

$\overline{CE} = 6$

$\overline{EB} \parallel 8.$

Hallar el valor de x en cada uno de los siguientes ejercicios

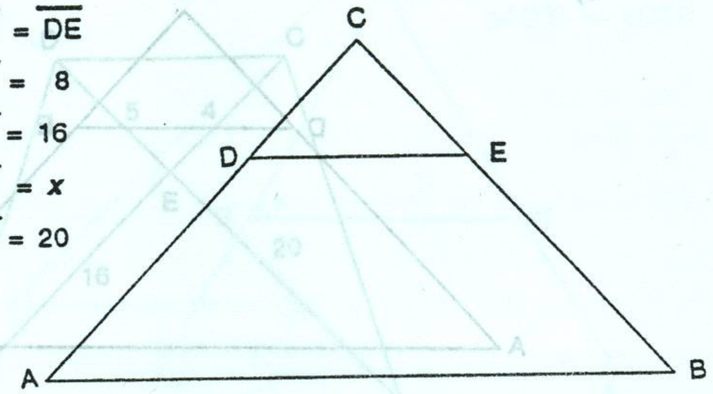
11) $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$

$\overline{CD} = 8$

$\overline{DA} = 16$

$\overline{CE} = x$

$\overline{EB} = 20$



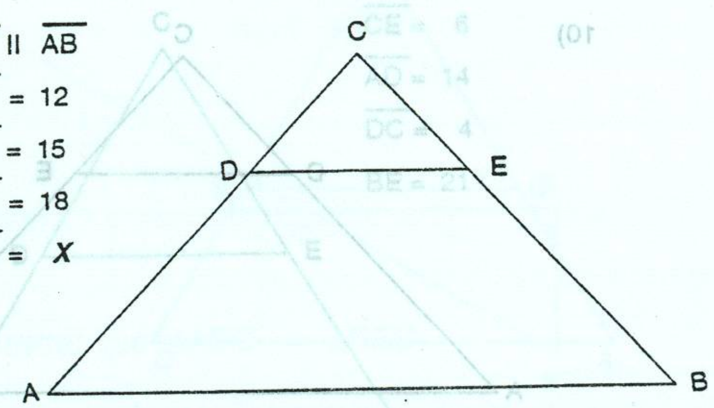
12) $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$

$\overline{CD} = 12$

$\overline{DA} = 15$

$\overline{CE} = 18$

$\overline{EB} = x$



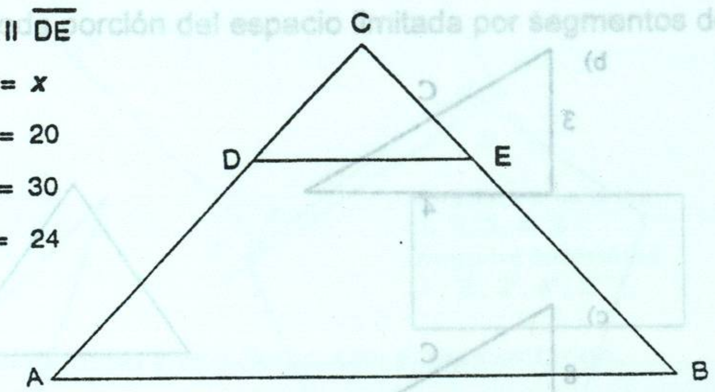
13) $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$

$\overline{CD} = x$

$\overline{CE} = 20$

$\overline{EB} = 30$

$\overline{AD} = 24$



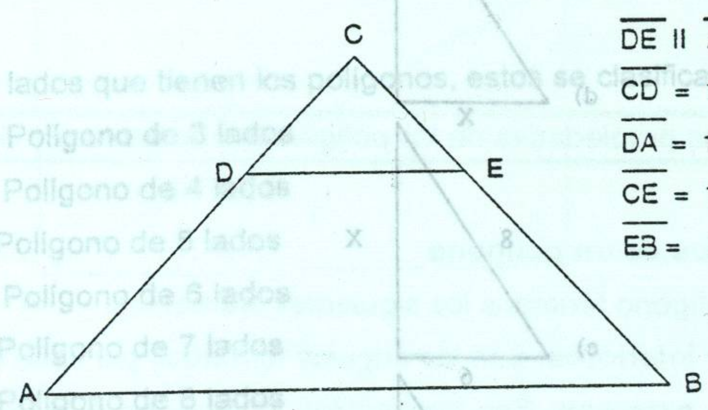
14) $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$

$\overline{CD} = 10$

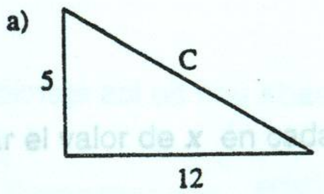
$\overline{DA} = 15$

$\overline{CE} = 12$

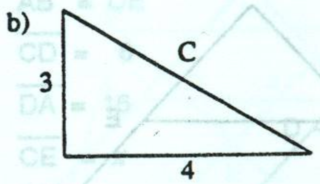
$\overline{EB} = X$



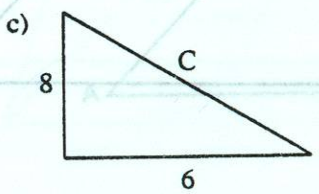
15) a)



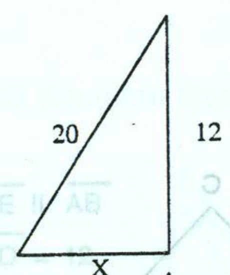
b)



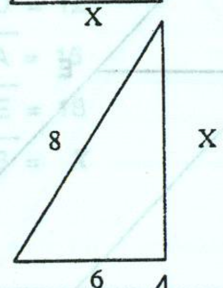
c)



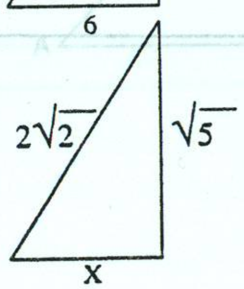
d)



e)



f)



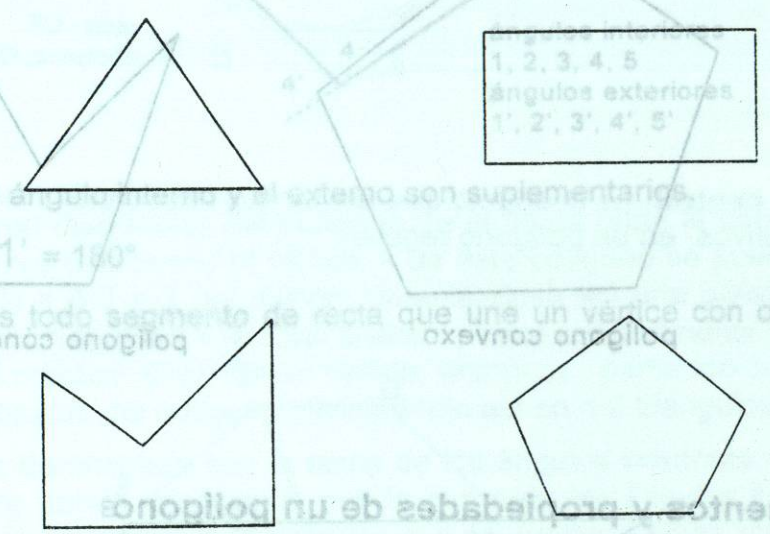
2.5 . Polígonos

Objetivo

Dominar el concepto de polígono y polígono convexo y su clasificación según sus lados y ángulos.

- Un **polígono** es toda porción del espacio limitada por segmentos de recta.

Ejemplo:



Según el número de lados que tienen los polígonos, estos se clasifican en:

- Triángulo: Polígono de 3 lados
- Cuadrilátero: Polígono de 4 lados
- Pentágono: Polígono de 5 lados
- Hexágono: Polígono de 6 lados
- Heptágono: Polígono de 7 lados
- Octágono: Polígono de 8 lados
- Nonágono: Polígono de 9 lados
- Decágono: Polígono de 10 lados
- Endecágono: Polígono de 11 lados
- Dodecágono: Polígono de 12 lados
- Pentadecágono: Polígono de 15 lados
- Icoságono: Polígono de 20 lados