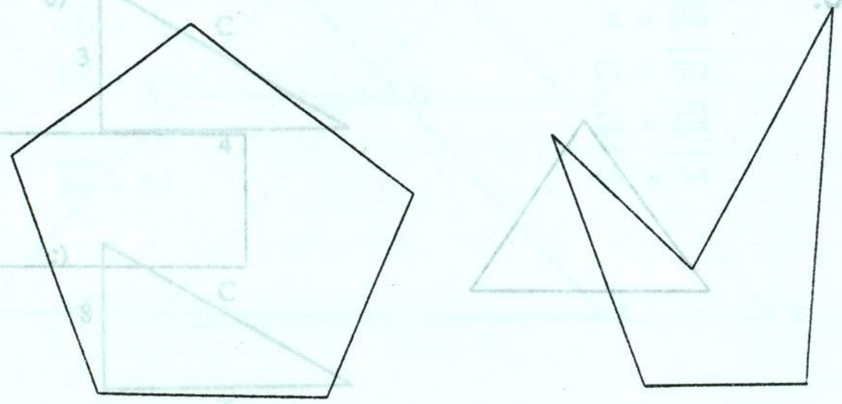
- Un **polígono regular** es aquel que tiene sus lados y sus ángulos iguales.

Además los polígonos se clasifican en polígonos convexos y cóncavos.

- Un polígono es **convexo** cuando el segmento de recta que une a cualesquiera dos de sus puntos se encuentra totalmente en su interior, en caso contrario se dice que el polígono es **cóncavo**.



polígono convexo polígono cóncavo

2.6 Elementos y propiedades de un polígono

Objetivo

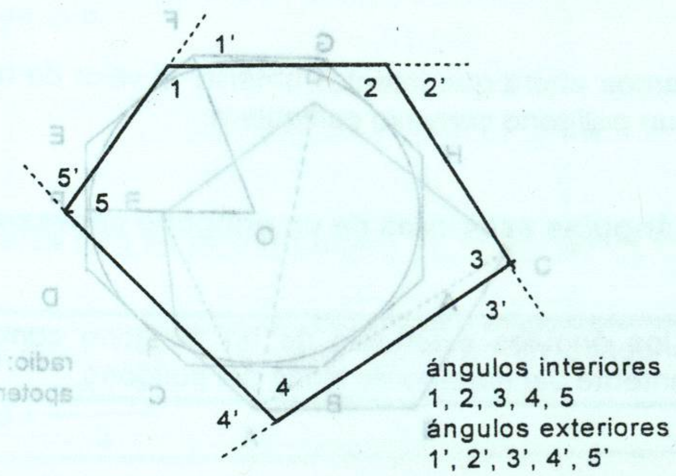
Aplicar las propiedades de los polígonos a la resolución de ejercicios.

Elementos de un polígono

En un polígono tenemos los siguientes elementos:

Ángulos interiores: Son los ángulos formados por cada dos lados consecutivos.

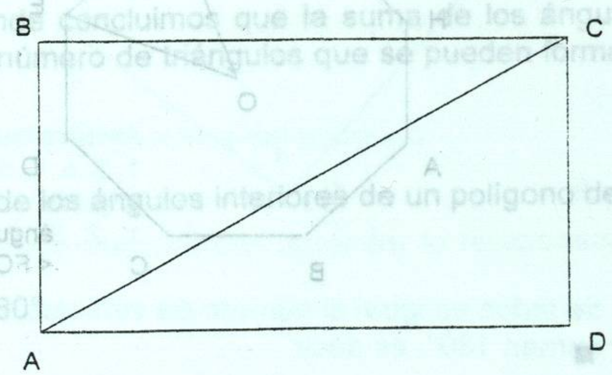
Ángulos externos: Son los ángulos adyacentes a los ángulos interiores, que se obtienen al prolongar los lados de estos.



Observa que el ángulo interno y el externo son suplementarios.

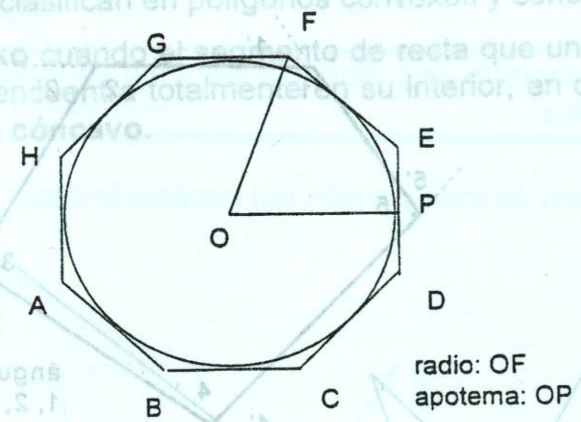
$$\angle 1 + \angle 1' = 180°$$

- **Diagonal**: Es todo segmento de recta que une un vértice con otro que no es consecutivo.

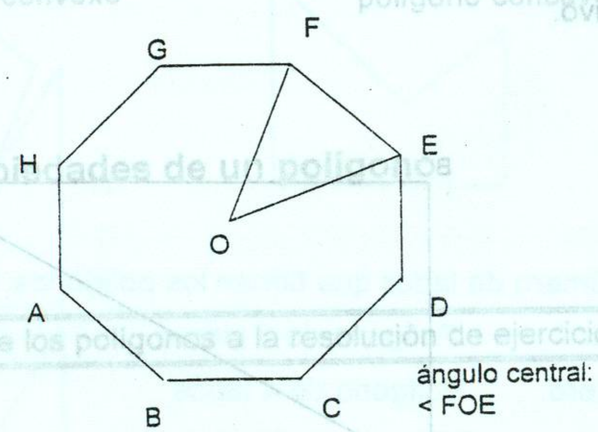


AC es una diagonal del polígono de la figura.

- **Radio**: Es el radio de la circunferencia circunscrita en un polígono regular, y se obtiene mediante el segmento de recta que une el centro de ésta última con uno de los vértices del polígono.
- **Apotema**: El segmento de recta perpendicular a cualquiera de los lados de un polígono regular, trazada desde el centro de la circunferencia inscrita en el mismo.



- **Ángulo central**: Es el ángulo que forman los radios que pasan por dos vértices consecutivos, en un polígono regular.



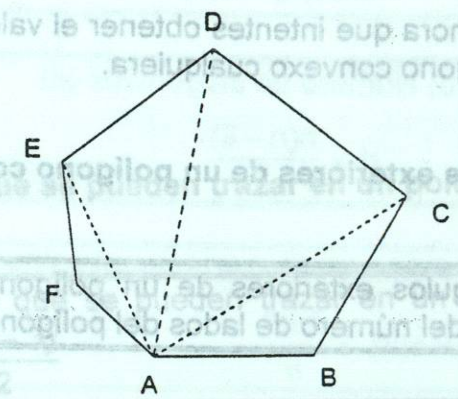
¿Recuerdas el valor de la suma de los ángulos interiores de un triángulo? Un triángulo es un polígono regular de tres lados. Intenta entonces obtener una fórmula similar para la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo cualquiera.

Suma de los ángulos interiores de un polígono convexo

Teorema

La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados es igual a (n-2)180°.

Demostración:



AC, AD y AE son diagonales del polígono de la figura (aquí la cantidad de lados es n = 6. Observa que desde el vértice A de éste polígono se pueden trazar tres diagonales (n-3) = 6-3 = 2 del mismo, obteniéndose así una división de éste en cuatro triángulos (n-2) = 6-2 = 4. Este análisis puede ser fácilmente generalizado a un polígono de n lados: Si se fija un vértice, entonces , partiendo de él se pueden trazar n-3 diagonales del polígono, dividiéndolo así en n-2 triángulos.

Pero ya hemos demostrado que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180° , de donde concluimos que la suma de los ángulos interiores de un polígono es igual al número de triángulos que se pueden formar, multiplicando por 180°.

Es decir, sea

Sai(n) = suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados.

Entonces es

Sai(n) = (n-2)180°.

■

Medida de un ángulo interior de un polígono regular

Como la suma de los ángulos interiores de un polígono regular de "n" lados está dada por la expresión Sai(n) = (n-2)180°, entonces se deduce que la medida de cada ángulo interior se obtiene dividiendo dicha suma entre el número de lados, es decir

$$\boxed{Ai(n) = \frac{Sai}{n} = \frac{(n-2)180°}{n}}$$

donde Ai(n) es la medida de cada ángulo interior de un polígono regular de n lados.

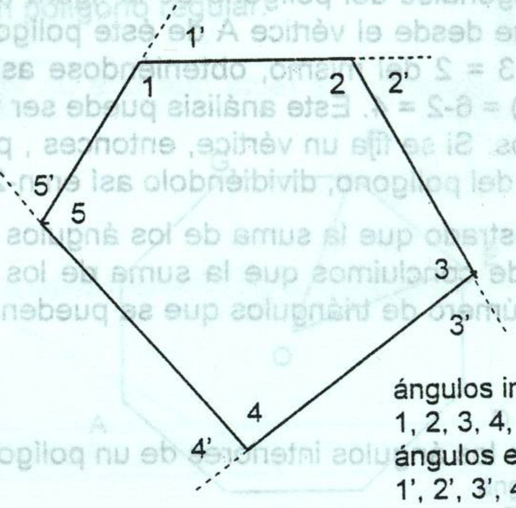
Te recomendamos ahora que intentes obtener el valor de la suma de los ángulos exteriores de un polígono convexo cualquiera.

Suma de los ángulos exteriores de un polígono convexo

Teorema

La suma de los ángulos exteriores de un polígono convexo es igual a 360°, independientemente del número de lados del polígono.

Demostración:



ángulos interiores
1, 2, 3, 4, 5
ángulos exteriores
1', 2', 3', 4', 5'

Como el número de lados es igual al número de vértices, en cada vértice el ángulo interior y exterior suman 180°, es decir

$\angle 1 + \angle 1' = 180°$.

Por lo tanto, la suma total de ángulos interiores y exteriores es de 180° multiplicado por el número de lados n.

Suma de ángulos interiores + Suma de ángulos exteriores = 180°n.

Sea Sae(n) = Suma de los ángulos exteriores, entonces es

$$Sae(n) = 180°n - Sai(n)$$

$$Sae(n) = 180°n - 180°(n-2)$$

$$Sae(n) = 180°n - 180°n + 360°.$$

De donde se concluye que:

$$Sae(n) = 360° .$$

■

Número de diagonales que se pueden trazar en un polígono convexo

Teorema

El número de diagonales que se pueden trazar en un polígono convexo de n lados es igual a: $d = \dfrac{n(n-3)}{2}$

Demostración:

Ya hemos visto que desde cada vértice del polígono se pueden trazar (n-3) diagonales. Sin embargo, cualquier diagonal trazada desde un vértice prefijado coincide con una diagonal trazada desde otro vértice. Por esa razón, si sumamos las cantidades de diagonales que se pueden trazar desde cada vértice, obtendremos el doble de la cantidad total de diagonales del polígono. Así es

$$2d = n(n-3),$$

de donde:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

siendo d es el número de diagonales del polígono.

■

Para fines de este curso nos interesa aprender lo relacionado con los polígonos regulares.

Resumen:

Si n representa el número de lados de un polígono regular, tenemos que:

a) Suma de ángulos interiores

$$Sai(n) = 180°(n-2)$$

b) Medida de cada ángulo interior

$$Ai(n) = \frac{Sai(n)}{n} = \frac{180°(n-2)}{n}$$

c) Suma de los ángulo exteriores

$$S_{ae}(n) = 360°$$

d) Número de diagonales (d)

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

e) Medida de cada ángulo exterior

$$A_e(n) = \frac{360°}{n}$$

f) El valor de un ángulo central

$$\theta(n) = \frac{360°}{n}$$

Ejemplo 1: Calcular en un octágono regular:

a) La suma de los ángulos interiores

$Sai(8) = 180°(n-2)$

$Sai(8) = 180°\ (8-2)$

$Sai(8) = 180°\ (6)$

$Sai(8) = 1080°$

b) La medida de cada ángulo interior

$$A_i(8) = \frac{Sai(8)}{8} = \frac{1080°}{8} = 135°$$

c) La medida de cada ángulo exterior

$$A_e(8) = \frac{360°}{8} = 45°$$

d) El número de diagonales

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$d = \frac{8(8-3)}{2}$$

$$d = \frac{8(5)}{2} = 20 \text{ diagonales}$$

e) El valor de cada ángulo central, expresado en radianes.

$$\theta = \frac{360°}{8} = 45°$$

$$\theta = \frac{45°\pi}{180} rad$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} rad$$

Ejemplo 2: ¿Cuántos lados tiene un polígono regular cuyos ángulos interiores suman 1260°?

$Sai(n) = 180°(n-2)$

$1260° = 180°(n-2)$

$1260° = 180°n-360°$

$1260° + 360° = 180°n$

$180°n = 1620°$

$n = \frac{1620}{180}$

$n = 9$

El polígono tiene 9 lados, es decir se trata de un nonágono.

Ejemplo 3: ¿Cuántos lados tiene un polígono regular cuyos ángulos interiores miden 108° cada uno?

$$A_i(n) = \frac{180°(n-2)}{n}$$

$$108° = \frac{180°(n-2)}{n}$$

$108°n = 180°n - 360°$

$108°n - 180°n = -360°$

$-72°n = -360°$

$n = \frac{-360°}{-72°}$

$n = 5$

Ejemplo 4: Hallar el número de lados de un polígono regular, si su ángulo externo mide 10°.

$$Ae(n) = \frac{360°}{n}$$

$$10° = \frac{360°}{n}$$

$$10°\, n = 360°$$

$$n = \frac{360°}{10°} = 36.$$

El polígono tiene 36 lados.

Ejemplo 5: Hallar el número de lados de un polígono regular, si su ángulo interno mide el triple de su ángulo externo.

$$Ai(n) + Ae(n) = 180°$$

Como $Ai(n) = 3\,Ae(n)$; tenemos:

$$3\,Ae(n) + Ae(n) = 180°$$

$$4\,Ae(n) = 180°$$

$$Ae(n) = \frac{180°}{4} = 45°$$

Como $Ae(n) = \dfrac{360°}{n}$, tenemos que:

$$45° = \frac{360°}{n}$$

$$45°n = 360°$$

$$n = \frac{360°}{45°}$$

$$n = 8$$

Ejemplo 6: Los ángulos interiores de un pentágono están representados por:

$\angle A = (x\text{-}10)°$

$\angle B = (2x\text{-}20)°$

$\angle C = (2x\text{-}10)°$

$\angle D = (2x+10)°$

$\angle E = (3x\text{-}30)°$

Encuentra la medida de cada ángulo.

- Por su parte, los **rombos** cumplen:

6) Cada diagonal de un rombo lo divide en dos triángulos congruentes e isósceles.
7) Las diagonales de un rombo se bisecan mutuamente, son congruentes y son perpendiculares entre sí.
8) Sin embargo, los ángulos interiores de un rombo en general no son rectos.

Te recomendamos que intentes demostrar cada una de estas propiedades.

Aplicaciones de las propiedades de los paralelogramos

Ejemplo 1. Hallar los ángulos interiores del cuadrilátero ABCD, si el $\angle A = (x\text{-}5)°$, $\angle B = (x+20)°$, $\angle C = (2x\text{-}45)°$ y $\angle D = (2x\text{-}30)°$

Solución :

La suma de los ángulos interiores es de 360°, por lo tanto :

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

$(x\text{-}5)° + (x+20)° + (2x\text{-}45)° + (2x\text{-}30)° = 360°$

$6x - 60 = 360°$

$6x = 360 + 60$

$6x = 420$

$x = \dfrac{420}{6}$

$x = 70$

Por lo tanto :

$\angle A = (x\text{-}5)° = (70\text{-}5)° = 65°$

$\angle B = (x+20)° = (70+20)° = 90°$

$\angle C = (2x - 45)° = [2(70)\text{-}45]° = 95°$

$\angle C = (2x\text{-}30)° = [2(70)\text{-}30]° = 110°$

Ejemplo 2. Si ABCD es un paralelogramo, encontrar *x* y *y*