Solución:

$\angle A = \angle C$ por ser ángulos opuestos del paralelogramo

$4x-30 = 3x-5$

$4x - 3x = -5+30$

$x = 25°$

$\angle A + \angle B = 180°$ por se suplementarios

$[4(25)-30]° + \angle B = 180°$

$(100-30)° + \angle B = 180°$

$70° + \angle B = 180°$

$\angle B = 180° - 70°$

$\angle B = 110°$

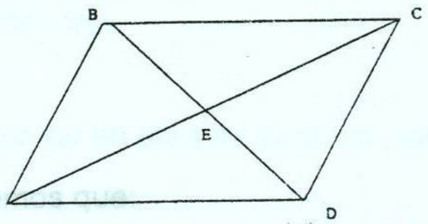
Por lo que: $(2y-18)° = 110°$

$2y - 18 = 110$

$2y = 110+18$

$y = \frac{110+18}{2} = 64$

Ejemplo 3: Si el cuadrilátero de la figura, es un paralelogramo, hallar *x* y *y*.



$AE = x+2y$

$EC = 15$

$BE = x$

$DE = 3y$

Solución:

Como las diagonales se bisecan mutuamente, entonces:

$x+2y = 15$

$x = 3y$

Resolviendo:

$3y+2y = 15$

$5y = 15$

$y = \frac{15}{5}$

$y = 3$

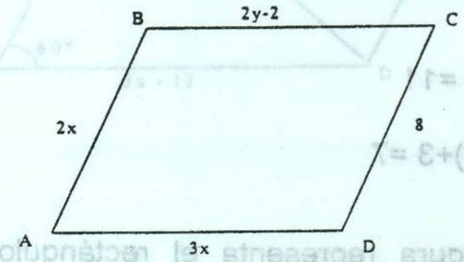
Entonces sustituyendo

$x = 3y$

$x = 3(3)$

$x = 9$

Ejemplo 4: Encuentra los valores de *x* y *y* en el siguiente paralelogramo.



AB = CD por ser lados opuestos del paralelogramo

$2x = 8$

$x = \frac{8}{2}$

$x = 4$

AD = BC por ser lados opuestos del paralelogramo

$2y-2 = 3x$

$2y-2 = 3(4)$

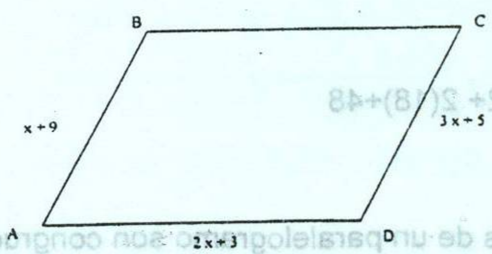
$2y = 12+2$

$2y = 14$

$y = \frac{14}{2}$

$y = 7$

Ejemplo 5. Si ABCD es un paralelogramo, encuentra la longitud de sus lados.



Solución:

AB=CD por ser lados opuestos del paralelogramo

$3x+5 = x+9$

$3x - x = 9-5$

$2x = 4$

$x = \frac{4}{2}$

$x = 2$

Por lo tanto:

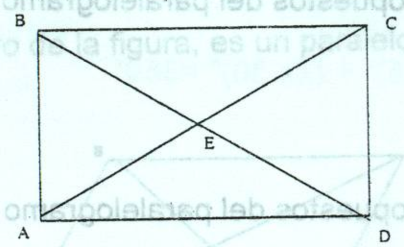
AB = x+9 =2 + 9 =11

CD = AB = 11

AD = 2x+3 = 2(2)+3 =7

BC = AD = 7

Ejemplo 6. Si la figura representa el rectángulo ABCD, encuentra BD si: AE=4x+12 y CE=2x +48



Solución:

Como las diagonales se bisecan mutuamente, entonces:

AE=CE

$4x+12 = 2x+48$

$4x-2x = 48-12$

$2x = 36$

$x = \frac{36}{2}$

$x = 18$

AC = AE+CE

AC = 4(18) +12+ 2(18)+48

AC = 84+84

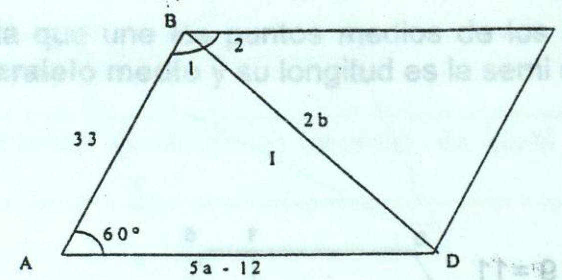
AC = 168

Como las diagonales de un paralelogramo son congruentes; entonces

BD =AC

BD = 168

Ejemplo 7. El cuadrilátero ABCD de la figura es un rombo, hallar a y b.



AD = AB

5a-12 =33

5a = 33+12

5a =45

$a = \frac{45}{5}$

a = 9

$\angle A + \angle B = 180$ por ser ángulos consecutivos de un rombo, entonces

$\angle B = 180° - \angle A$

$\angle B = 180-60$

$\angle B = 120°$

Como BD es bisectriz de el $\angle B$

$\angle 1 = \frac{120°}{2} = 60°$

Por lo tanto el triángulo Δ ABD es equilátero, entonces:

2b =33

$b = \frac{33}{2} = 16.5$

Solución:

AB=CD por ser lados opuestos del paralelogramo

$3x+5 = x+9$

$3x - x = 9-5$

$2x = 4$

$x = \frac{4}{2}$

$x = 2$

Por lo tanto:

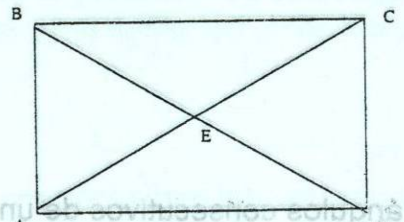
$AB = x+9 = 2 + 9 = 11$

$CD = AB = 11$

$AD = 2x+3 = 2(2)+3 = 7$

$BC = AD = 7$

Ejemplo 6. Si la figura representa el rectángulo ABCD, encuentra BD si: AE=4x+12 y CE=2x +48



Solución:

Como las diagonales se bisecan mutuamente, entonces:

$AE=CE$

$4x+12 = 2x+48$

$4x-2x = 48-12$

$2x = 36$

$x = \frac{36}{2}$

$x = 18$

$AC = AE+CE$

$AC = 4(18) +12+ 2(18)+48$

$AC = 84+84$

$AC = 168$

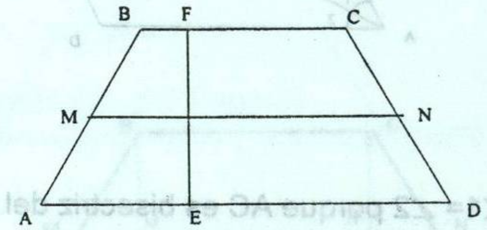
Como las diagonales de un paralelogramo son congruentes; entonces

$BD = AC$

$BD = 168$

Se llama **altura** del trapecio al segmento de recta perpendicular a las bases que determina la distancia entre estas. (h en la figura)

El segmento de recta que une los puntos medios de los lados no paralelos del trapecio se llaman **paralelo medio** y su longitud es la semi suma de sus bases.



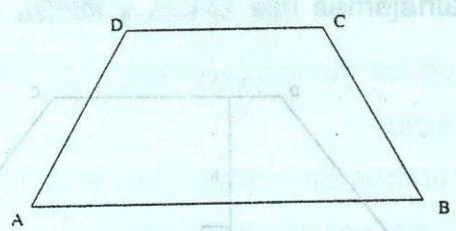
EF = Altura = h

MN = Paralela media si M y N son los puntos medios de AB y CD respectivamente, luego se puede demostrar que:

$$\boxed{MN = \frac{BC + AD}{2}}$$

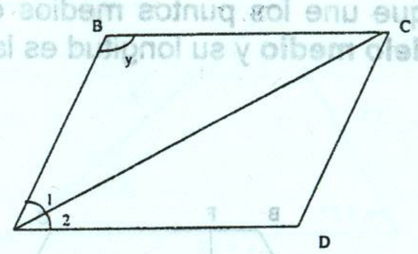
Te recomendamos que demuestres esta última afirmación.

• Un trapecio se dice **isósceles** si los lados no paralelos tienen igual longitud.



AD = BC

Ejemplo 8. Encontrar *x* y *y* en el rombo de la siguiente figura.



$\angle 1 = 7x - 10$

$\angle 2 = 3x + 18$ y $\angle 1 = \angle 2$ porque AC es bisectriz del $\angle A$, entonces

$7x - 10 = 3x + 18$
$7x - 3x = 18 + 10$
$4x = 28$
$x = 7$

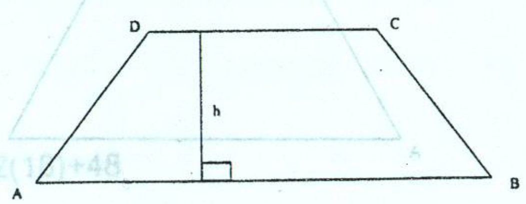
$\angle A + \angle B = 180°$ por ser ángulos consecutivos de un rombo y además

$\angle A = \angle 1 + \angle 2$ por adición de ángulos, entonces
$\angle A = 7(7) - 10 + 3(7) + 18$
$\angle A = 49 - 10 + 21 + 18$
$\angle A = 78°$

$78° + y = 180°$
$y = 180 - 78$
$y = 102°$

Trapecios

Los lados paralelos de un trapecio se llaman bases y como son de diferente longitud, una es la **base mayor** y la otra la **base menor** (generalmente se denotan como B y b respectivamente.



En la figura anterior :

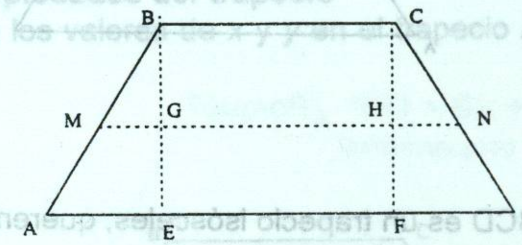
CD es la base menor (b)
AB es la base mayor (B)

Teorema

Los ángulos contiguos a cada uno de los lados no paralelos de un trapecio son suplementarios.

Teorema

La longitud de la paralela media de un trapecio, es igual a la semi suma de las bases.



Queremos demostrar que:

$$MN = \frac{BC + AD}{2}$$

En la figura tenemos que los triángulos ΔABE y ΔMBG , son semejantes, por lo que sus lados son proporcionales, como M es punto medio de AB, es

$$\frac{MG}{AE} = \frac{1}{2}$$, por lo tanto:

$$MG = \frac{AE}{2}$$

Así mismo, los triángulos ΔCHN y ΔCFD son semejantes y como N es el punto medio de CD,

$$\frac{HN}{FD} = \frac{1}{2}$$, es decir,

$$HN = \frac{FD}{2}$$

Expresando el segmento MN en términos de AE y FD resulta:

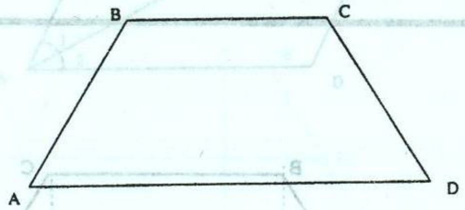
$$MN = MG + BC + HN$$

$$MN = \frac{AE}{2} + BC + \frac{FD}{2}$$

Propiedades de los trapecios

Teorema

Los ángulos de la base de un trapecio isósceles son congruentes



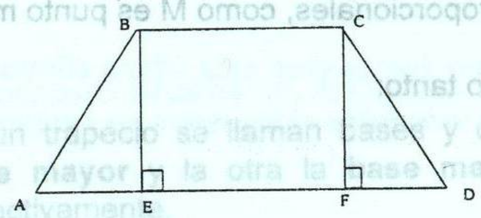
Demostración:

Si el cuadrilátero ABCD es un trapecio isósceles, queremos demostrar que :

$\angle A = \angle D$

$\angle B = \angle C$

Tracemos en la figura anterior los segmentos de recta BE y CF perpendiculares a AD, por lo que son altura del trapecio.



Podemos demostrar que los triángulos Δ ABE y Δ DCF son congruentes, pues:

AB = CD por definición,

BE = CF por ser ambos segmentos alturas del trapecio

y $\angle$ AEB = $\angle$ DFC por ser ángulos rectos.

Si dos triángulos rectángulos tienen congruente su hipotenusa y un cateto, entonces los triángulos son congruentes. Como el segmento AE es el homólogo de FD, entonces es $\angle A = \angle D$.

Así mismo, te recomendamos que demuestres que :

$$MN=\frac{AE+2BC+FD}{2}$$

Pero BC=EF , luego 2BC se puede descomponer como BC+EF, por lo que

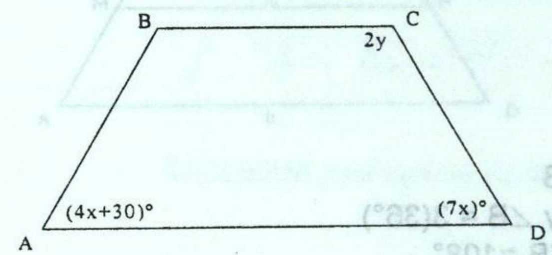
$$MN=\frac{AE+FD+BC+EF}{2}=\frac{Ae+EF+FD+BC}{2}$$

$$MN=\frac{AD+BC}{2}$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

Aplicación de las propiedades del trapecio

Ejemplo 1. Encuentra los valores de *x* y *y* en el trapecio ABCD de la figura si es isósceles.



$\angle A = \angle D$ por ser ángulos de la base de un trapecio isósceles

$4x + 30 = 7x$

$30 = 7x - 4x$

$3x = 30$

$x = \frac{30}{3}$

$x = 10°$

$\angle D + \angle C = 180$ por ser conjugados internos

$7x + 2y = 180°$

$7(10) + 2y = 180°$

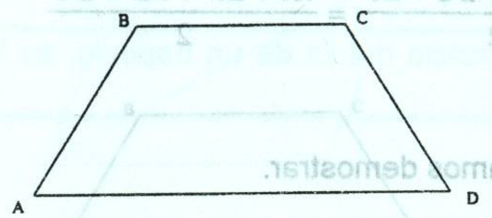
$70° + 2y = 180°$

$2y = 180° - 70°$

$2y = 110°$

$y = \frac{110°}{2} = 55°$

Ejemplo 2. Si el trapecio ABCD de la figura es isósceles, encuentra el valor de los ángulos A, B, C, y D si B y A están enrazón de 3:2



Solución:

Tenemos que el $\angle A + \angle B = 180°$ ¿Porqué?

Ahora sea x el factor proporcional,

$3x + 2x = 180°$

$5x = 180°$

$x = \frac{180°}{5}$

$x = 36°$

$\angle A = 2x$ y $\angle B$

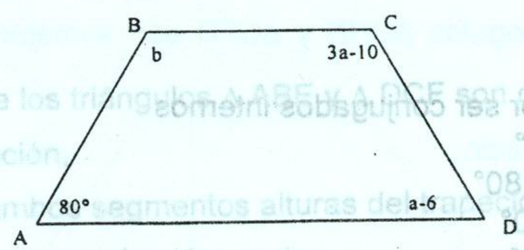
$\angle A = 2(36°)$ y $\angle B = 3(36°)$

$\angle A = 72°$ y $\angle B = 108°$

y además $\angle A = \angle D$ por ser ángulos de la base de un triángulo isósceles

y además $\angle B = \angle C$ por la misma razón.

Ejemplo 3. Encuentra los valores de *a* y *b* en el trapecio de la figura.



Solución:

$b + 80° = 180°$

$b = 180° - 80°$

$b = 100°$

$(3a-10) + (a-6) = 180°$

$4a - 16 = 180°$

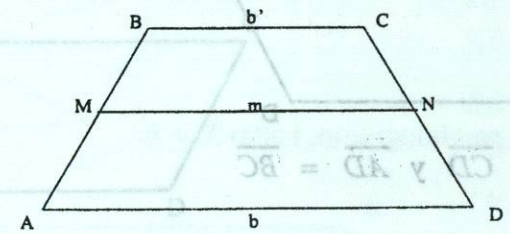
$4a = 180° + 16$

$4a = 196°$

$a = \frac{196}{4}$

$a = 49°$

Ejemplo 4. Si MN es la paralela media del siguiente trapecio ABCD, determinar los valores de m, b' y b:



a) Si b=40 y b' =30

$m = \frac{b+b'}{2} = \frac{40+30}{2} = \frac{70}{2}$

$m = 35$

b) Si b=26 y m=20

$m = \frac{b+b'}{2}$

$20(2) = 26 + b'$

$40 - 26 = b'$

$b' = 14$

c) Si b' =16 y m =30

$m = \frac{b+b'}{2}$

$30 = \frac{b+16}{2}$

$60 = b + 16$

$b = 60 - 16$

$b = 44$