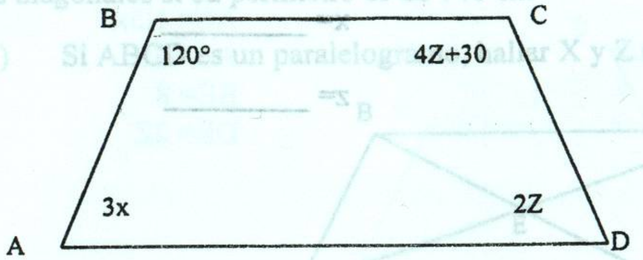
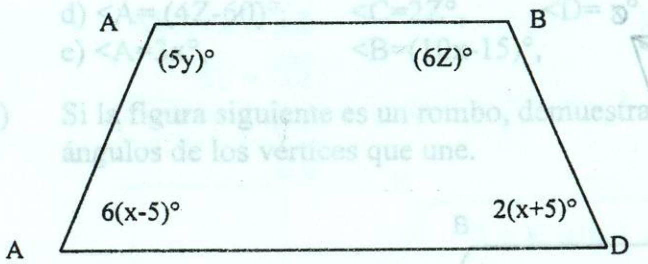
26) Si ABCD es un trapecio, hallar x y z



x= ________

Z= ________

27) Si ABCD es un trapecio isósceles, hallar y, x y z

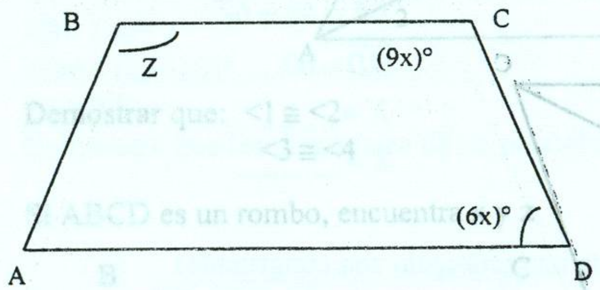


x= ________

y= ________

Z= ________

28) Si ABCD es un trapecio isósceles, hallar x y z



x= ________

Z= ________

2.8 Áreas de regiones poligonales

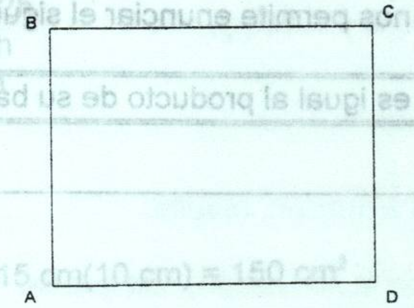
Objetivo

Calcular áreas de polígonos (rectangulares, paralelogramos, triángulos, trapecios y rombos.

A cada región poligonal se le puede relacionar un número positivo que se llama su **área.**

Para comprender este concepto comenzaremos por asumir que un cuadrado de lado de 1 unidad de longitud tiene un área de 1 unidad cuadrada de longitud ($A=1u^2$)

Supongamos que la figura siguiente ABCD sea un cuadrado cuyo lado mide 1 cm de longitud.



Así es:

La unidad de área = (unidad de longitud)^2

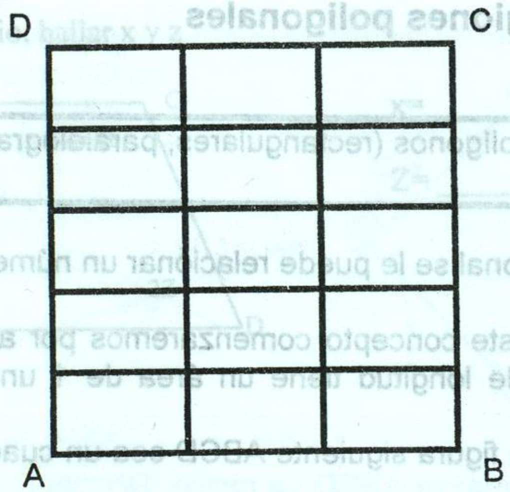
Entonces, el área de una región poligonal expresa cuantas veces está contenida la unidad de área, (es decir, el cuadrado de lado 1) en dicha región.

Para la medición de área debemos considerar los siguientes postulados:

1) Si dos polígonos son congruentes, entonces sus áreas son iguales.
2) Si una región poligonal puede dividirse en diferentes polígonos, su área es la suma de las áreas de esos polígonos.

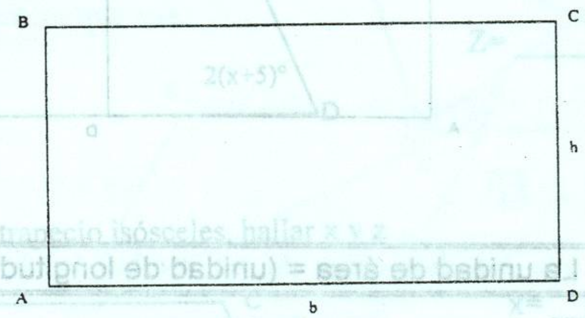
Área de un rectángulo

Si se considera que el rectángulo ABCD de la figura tiene una longitud de 3 unidades, y una altura de 5 unidades, los segmentos horizontales y verticales forman un total de 15 cuadrados. Por lo tanto, su área es de 15 unidades de área.



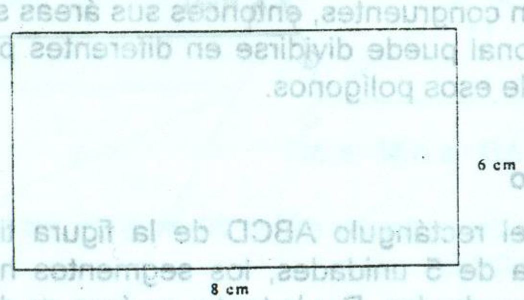
El razonamiento anterior nos permite enunciar el siguiente postulado:

El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.



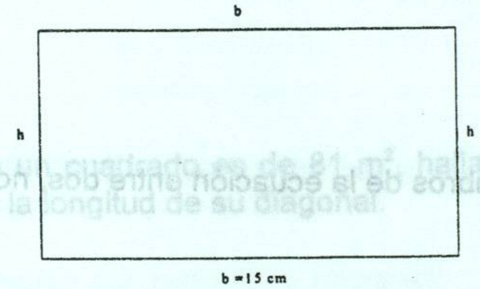
$$\boxed{A = bh}$$

Ejemplo 1. Encuentra el área del rectángulo de la figura.



A = (8 cm)(6cm)
A = 48 cm^2

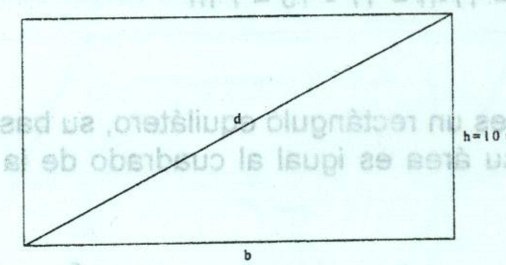
Ejemplo 2. Hallar el área de un rectángulo si su base es de 15 cm y su perímetro es de 50 cm.



A = bh
A = 15h
p = 2b+2h
50 cm = 2(15 cm)+2h
50 cm = 30 cm + 2h
2h = 50 cm - 30 cm
2h = 20 cm
h = $\frac{20cm}{2}$
h = 10 cm

Por lo tanto el área A = 15 cm(10 cm) = 150 cm^2

Ejemplo 3. Hallar el área de un rectángulo si su altura es de 10 m y su diagonal es de 26 m.



A = bh
A = b(10)
A = 10b
$d^2 = b^2 + h^2$
$d^2 - h^2 = b^2$
$b^2 = (26m)^2 - (10m)^2$
$b^2 = 676\ m^2\ \ 100\ m^2$
$b^2 = 576\ m^2$
$b = \sqrt{576m^2}$
b= 24 m

Por lo tanto: A = 10 m(24 m) = 240 m^2

Ejemplo 4. El área de un rectángulo es de 70 m² y su perímetro es de 34 m. Hallar la base y la altura.

$A = bh$
$bh = 70\ m^2$
$2b+2h = p$
$2b+2h = 34$

Dividendo ambos miembros de la ecuación entre dos, nos queda:

$$\frac{2b+2h}{2} = \frac{34}{2}$$

$b+h = 17$

De lo anterior nos resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

1) $bh = 70$
2) $b+h = 17$

despejando *b* en la ecuación 2 y sustituyendo en la ecuación 1, resulta:

$b = 17 - h$
$(17-h)h = 70$
$17h - h^2 = 70$
$-h^2 + 17h - 70 = 0$

cambiándole los signos a la ecuación, resulta:

$h^2 - 17h + 70 = 0$

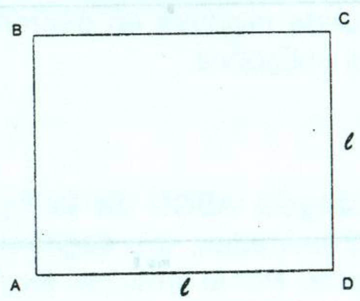
resolviendo por el método de factorización, nos queda:

$(h-7)(h-10) = 0$
$h = 7 \quad h = 10$

Si h = 7 m, la base $b = 17-h = 17-7 = 10$ m
Si h = 10 m, la base $b = 17-h = 17 - 10 = 7$ m

Área del cuadrado:

Dado que el cuadrado es un rectángulo equilátero, su base y su altura tienen igual longitud, por lo tanto su área es igual al cuadrado de la longitud de uno de sus lados.



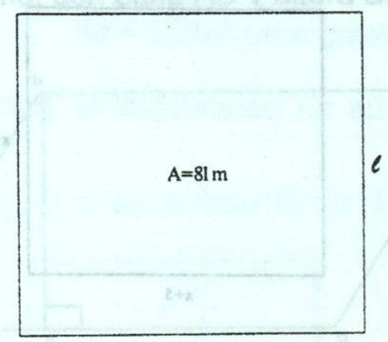
Si ABCD es un cuadrado:

$$\boxed{A = \ell^2}$$

Ejemplo 1. Hallar el área de un cuadrado, si cada uno de sus lados miden 15 cm.

$A = \ell^2$
$A = (15\ cm)^2$
$A = 225\ cm^2$

Ejemplo 2. Si el área de un cuadrado es de 81 m², hallar: a) la longitud de sus lados, b) el perímetro y c) la longitud de su diagonal.



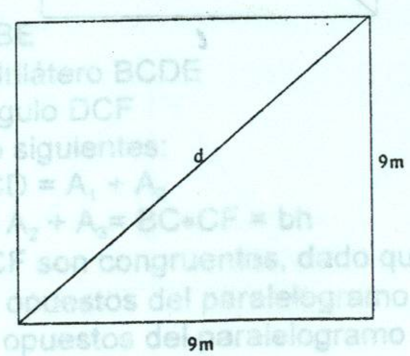
a)

$A = \ell^2$
$\ell^2 = 81\ m^2$
$\ell = \sqrt{81 m^2}$
$\ell = 9$ m

b)

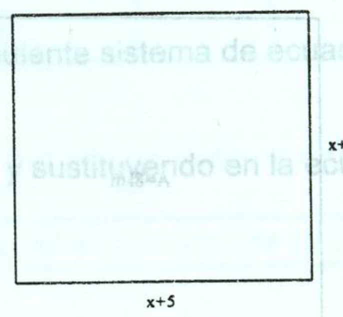
$p = 4\ell$
$p = 4(9\ m)$
$p = 36$ m

c)



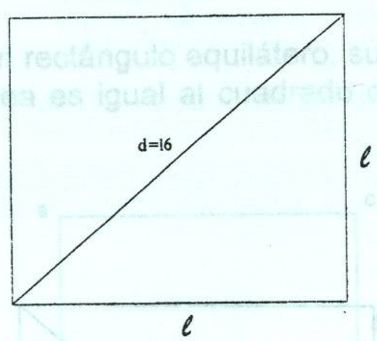
$d^2 = (9\ m^2) + (9\ m^2)$
$d^2 = (81 + 81)\ m^2$
$d^2 = 2(81) m^2$
$d = \sqrt{2(81) m^2}$
$d = 9\sqrt{2}\ m$

Ejemplo 3. El lado de un cuadrado mide (x+5)cm. Si su área es de 144 cm^2. Encuentra el valor de x.



$A = (x+5)^2$
$(x+5)^2 = 144$
$x+5 = \pm 12$ (se rechaza el número negativo)
$x = 12-5$
$x = 7$ cm

Ejemplo 4. Hallar el lado de un cuadrado cuyo diagonal es de 16 cm.



$d^2 = \ell^2 + \ell^2$

$d^2 = 2\ell^2$

$\ell^2 = \dfrac{d^2}{2}$

$\ell = \sqrt{\dfrac{d^2}{2}}$

$\ell = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$

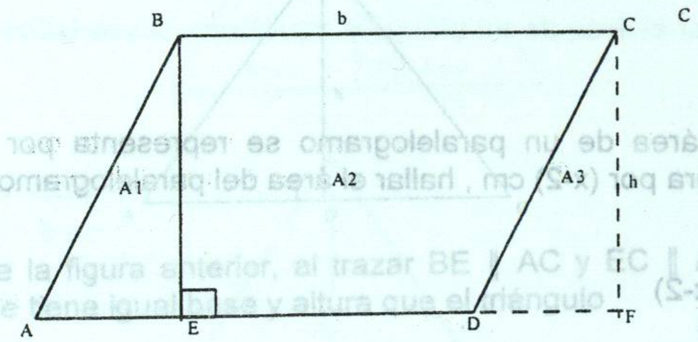
$\ell = \dfrac{16}{\sqrt{2}} \bullet \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$\ell = \dfrac{16\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}$ cm

Área de un paralelogramo.

Sea la figura un paralelogramo, con base AD y altura BE.

Al trazar por C el segmento de recta BF perpendicular a la prolongación de la base AD, se forma un rectángulo que tiene la misma base y la misma altura que el paralelogramo. Demostraremos que el área del paralelogramo ABCD, es de igual longitud que el área del rectángulo BCFE.



Sea A_1 = Área del Δ ABE
Sea A_2 = Área del cuadrilátero BCDE
Sea A_3 = Área del triángulo DCF
De lo anterior resulta lo siguientes:
Área del paralelogramo ABCD = $A_1 + A_2$
Área del rectángulo BCFE = $A_2 + A_3$ = BC•CF = bh
Los triángulos Δ ABE y Δ DCF son congruentes, dado que:
AB = DC Por ser lados opuestos del paralelogramo.
BE = CF Por ser lados opuestos del paralelogramo BCFE

Si dos triángulos rectángulos, tienen dos lados congruentes, entonces los triángulos son congruentes entre sí.
De acuerdo con lo anterior, si dos triángulos son congruentes, entonces sus áreas son iguales.

$$\boxed{A_1 = A_3}$$

Área del paralelogramo ABCD = $A_1 + A_2 = A_2 + A_3$ = Área del rectángulo BCFE

$$\boxed{A_2 + A_3 = bh}$$

por lo tanto el área del paralelogramo ABCD = bh

Ejemplo 1. Hallar el área de un paralelogramo cuya base mide 20 cm y cuya altura mide 8 cm.

A = bh
A = (20 cm)(8 cm)
A = 160 cm^2

Ejemplo 2. Hallar la base de un paralelogramo, si su área es de 45 m^2 y su altura de 15 m^2.

A = bh
45 m^2 = b(15 m)
b = $\frac{45m^2}{15m}$
b = 3 m

Ejemplo 3. El área de un paralelogramo se representa por x^2, la base por (x+3)cm y la altura por (x-2) cm , hallar el área del paralelogramo.

A = bh
$x^2 = (x+3)(x-2)$
$x^2 = x^2 + x - 6$
$x^2 - x^2 = x - 6$
$x - 6 = 0$
$x = 6$ cm

$A = x^2$
$A = (6)^2$
A = 36 cm^2

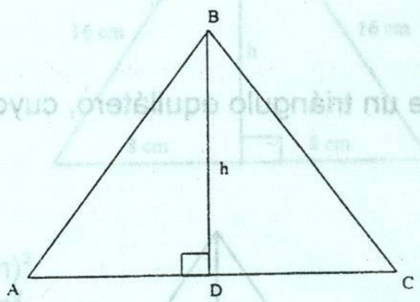
Ejemplo 4. La base de un paralelogramo se representa por (x+3)m, la altura por (x+1)m y su área es de 48 m^2 . Calcula la longitud de la base.

bh = A
(x+3)(x+1) = 48
$x^2 + 4x + 3 = 48$
$x^2 + 4x + 3 - 48 = 0$
$x^2 + 4x - 45 = 0$
Resolviendo por factorización:
(x+9)(x-5) = 0
x = -9 , x = 5, se rechaza x = -9 $\therefore$ x = 5
b= x+3
b = 5+3
b = 8 m

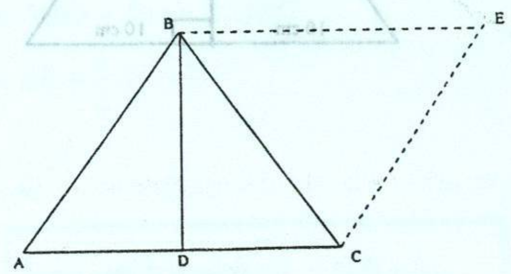
Área de un triángulo
El área de un triángulo es igual al semiproducto de la base por la altura; como lo vamos a demostrar.

$$\boxed{A = \frac{bh}{2}}$$

Sea el triángulo Δ ABC, con base AC = b y altura BD = h.



En el triángulo de la figura anterior, al trazar BE ∥ AC y EC ∥ AB, se forma un paralelogramo que tiene igual base y altura que el triángulo



Entonces BC es una diagonal que divide al paralelogramo en dos triángulos congruentes.

$\Delta ABC \cong \Delta BCE$

Por lo tanto el área del triángulo Δ ABC en la mitad del área del paralelogramo

Ejemplo 1. La base de un triángulo es de 12 cm y su altura es de 7 cm. Hallar su área.

$A = \frac{bh}{2}$

$A = \frac{(12cm)(7cm)}{2}$

$A = \frac{84cm^3}{2}$

$A = 42\ cm^2$

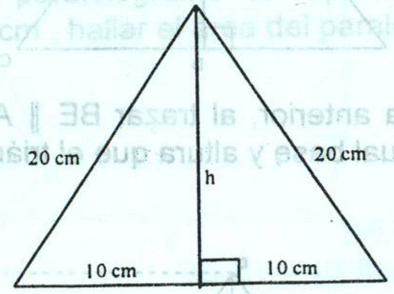
Ejemplo 2. Hallar el área de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 8 m y 12 m respectivamente.

$A = \frac{bh}{2}$

$A = \frac{(8m)(12m)}{2} = \frac{96m^2}{2}$

$A = 48\ m^2$

Ejemplo 3. Hallar el área de un triángulo equilátero, cuyos lados miden 20 cm.



$(20)^2 = h^2 + (10)^2$

$h^2 = (20)^2 - (10)^2$

$h^2 = 400 - 100$

$h^2 = 300$

$h = \sqrt{300}$

$h = \sqrt{3(100)}$

$h\ )\ 10\sqrt{3}$

$A = \frac{bh}{2}$

$A = \frac{(20cm)(10\sqrt{3})cm}{2} = 100\sqrt{3}cm$

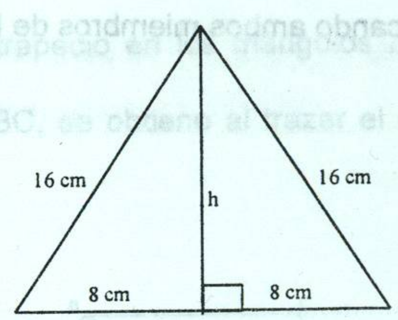
Ejemplo 4. El perímetro de un triángulo equilátero es de 48 cm. Hallar el área.

$P = 3\ell$

$3\ell = 48$ cm

$\ell = \frac{48cm}{3}$

$\ell = 16$ cm



$(16\ cm)^2 = h^2 + (8\ cm)^2$

$h^2 = 256\ cm^2 - 64\ cm^2$

$h^2 = 192\ cm^2$

$h = \sqrt{192cm^2}$

$h = \sqrt{3(64cm)^2}$

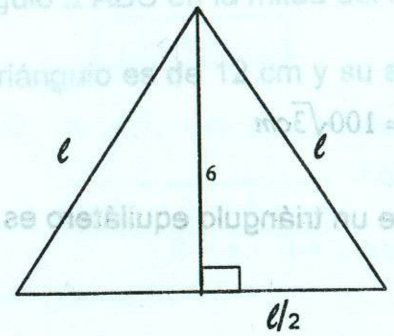
$h = 8\sqrt{3}$ cm

$A = \frac{bh}{2}$

$A = \frac{16(8\sqrt{3})}{2}$

$A = 64\sqrt{3}\ cm^2$

Ejemplo 5. Hallar el área de un triángulo equilátero si su altura es igual a 6 m.



A = $\frac{bh}{2}$

A = $3lm^2$, pero:

$\ell^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + (6)^2$

$\ell^2 = \frac{l^2}{4} + 36$ (Multiplicando ambos miembros de la ecuación por 4)

$4\ell^2 = \ell^2 + 144$

$4\ell^2 - \ell^2 = 144$

$3\ell^2 = 144$

$\ell^2 = \frac{144}{3}$

$\ell = \sqrt{\frac{144}{3}}$

$\ell = \sqrt{48} = \sqrt{16(3)} = 4\sqrt{3}$ cm

A = $\frac{bh}{2}$

A = $\frac{l}{2}(6) = 3\ell$

A = $\frac{4\sqrt{3}}{2}(6)$

A = $2\sqrt{3}(6)$

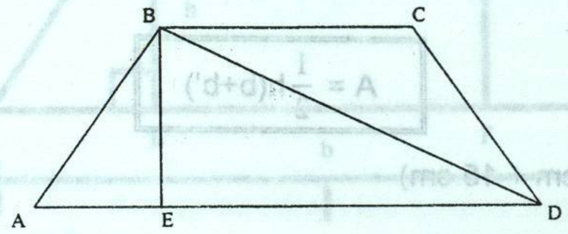
A = $12\sqrt{3}$ cm

Área de un trapecio

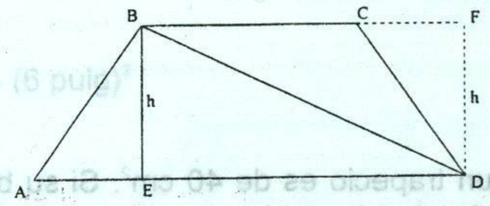
El área de un trapecio es igual a la mitad del producto de su altura por la suma de sus bases como lo vamos a demostrar.

$$\boxed{A = \frac{1}{2}(B+b)h}$$

Sea el trapecio ABCD, de altura BE =h , base AD = B y base BC = b' .



La diagonal BD, divide al trapecio en los triángulos Δ ABD y Δ DBC y ambos tienen igual altura.
La altura del triángulo Δ DBC, se obtiene al trazar el segmento DF ⊥ BC en su prolongación.



BE = FD porque son lados opuestos del paralelogramo BFDE.

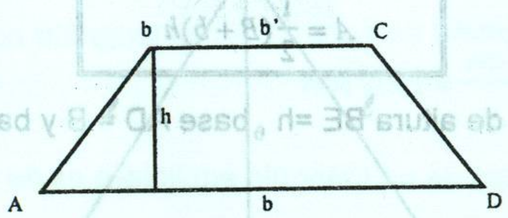
Área del trapecio = Área Δ ABD + Área Δ DBC

Área del trapecio = $\frac{1}{2}AD \bullet BE + \frac{1}{2}BC \bullet DF$

Área del trapecio = $\frac{1}{2}Bh + \frac{1}{2}bh$

$$\boxed{\text{Área del trapecio} = \frac{1}{2}h(B+b)}$$

Ejemplo 1. Hallar el área del trapecio ABCD, si b=25 cm, b'=15 cm y h= 7 cm



$$\boxed{A = \frac{1}{2}h(b+b')}$$

$A = \frac{1}{2}(7\text{ cm})(25\text{ cm} + 15\text{ cm})$

$A = 140\text{ cm}^2$

Ejemplo 2. Hallar el área de un trapecio y su paralela media mide 10 m y su altura es de 2 m.

$A = \frac{1}{2}h(b+b')$

$A = mh$

$A = 10\text{ m }(2\text{ m})$

$A = 20\text{ m}^2$

Ejemplo 3. El área de un trapecio es de 40 cm². Si su base mide 13 cm y 7 cm respectivamente, determina su altura.

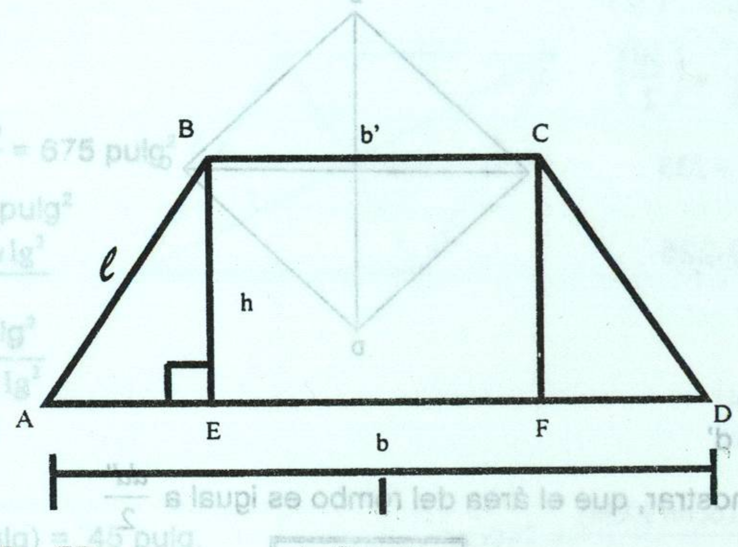
$A = \frac{1}{2}h(b+b')$

$2A = h(b+b')$

$h = \frac{2A}{(b+b')}$

$h = \frac{2(40cm^2)}{(13cm+7cm)}$

Ejemplo 4. Hallar el área del trapecio isósceles ABCD, si b'= 17 pulg, ℓ=10 pulg. y h= 7pulg.



b = AE + EF + FD

b= AE + b' + FD

b= AE + 17 + FD

Como el trapecio es isósceles, entonces AE = FD

b = 17 + 2AE

$AE^2 + h^2 = \ell^2$

$AE^2 = \ell^2 - h^2$

$AE^2 = (10\text{ pulg})^2 - (6\text{ pulg})^2$

$AE^2 = 64\text{ pulg}^2$

AE = 8 pulg.

b = 17 pulg.+2AE

b = 17 + 2(8)

b' = 33 pulg.

$A = \frac{1}{2}h(b+b')$

$A = \frac{1}{2}(6\text{ pulg})(33\text{ pulg} + 17\text{ pulg})$

$A = 150\text{ pulg}^2$