M3

SEGUNDA PARTE

MATEMATICAS, SEGUNDA EDICION 1997

m

Matemáticas

CAPÍTULO 3

TRIGONOMETRÍA
PRIMERA PARTE

La trigonometría se considera como la rama de la geometría métrica que, como lo inica su nombre, estudia las relaciones matemáticas entre las longitudes de los lados y los ángulos de los triángulos; aunque sus aplicaciones se extienden a funciones y ángulos en general. También se les ha definido como la ciencia de las medidas "indirectas", ya que es útil para calcular longitudes, distancias y ángulos, los cuales de otra forma no podrían ser medidos directamente; como la profundidad de un precipicio, la altura de una montaña, la distancia de la tierra a la luna, etc.

En la tecnología moderna, la trigonometría desempeña un papel importante en la ingeniería, navegación, mecánica, en las aplicaciones de los vectores, movimientos ondulatorios, funciones periódicas, sonido, luz, electricidad, etc.

En este capítulo sólo verás la trigonometría aplicada a la geometría plana, ya que es un medio muy importante para el estudio de los fenómenos físicos, así como también para estudios más avanzados de las matemáticas.

3.1 Funciones trigonométricas de un ángulo agudo

Objetivo

Con respecto a cualquiera de los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo definir las seis funciones trigonométricas y sus relaciones y utilizarlas para encontrar el valor de las otras cinco si se conoce el valor de una de ellas

Actualmente la trigonometría tiene muchas aplicaciones que nada tienen que ver con triángulos, pero los conceptos básicos se entienden mejor todavía en relación con el triángulo rectángulo.

Iniciamos nuestro estudio de la trigonometría con un breve análisis del ∠A del triángulo rectángulo de la figura 3.1

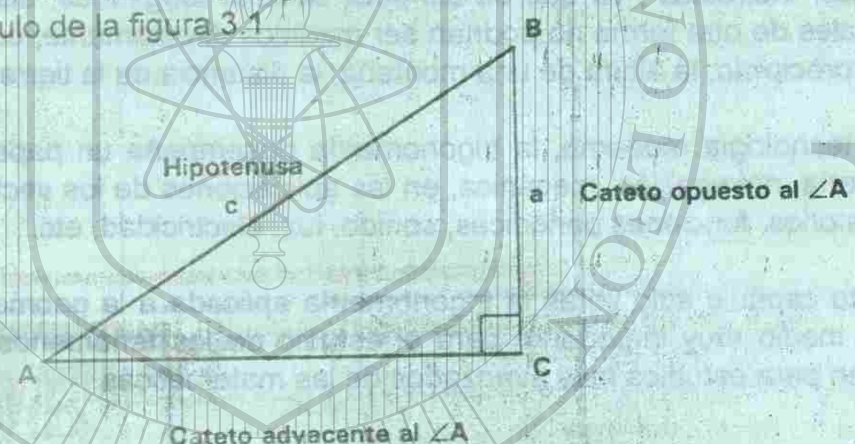


Fig. 3.1

Frecuentemente los lados de un triángulo rectángulo son referidos a uno de los dos ángulos agudos. Por ejemplo, el lado de longitud "a" se denomina "cateto opuesto" al ∠A, el lado de longitud "b" se denomina "cateto adyacente" al ∠A, y el lado de longitud "c" se denomina "hipotenusa".

Por inspección puedes ver que pueden formarse seis relaciones diferentes con los lados del triángulo rectángulo:

$$\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{c}{a}$$

Las seis razones son independientes del tamaño del triángulo, pero son dependientes de la magnitud del ángulo agudo. (Esta propiedad ya la conocías, cuando calculaste pendientes de rectas). estas relaciones son funciones del ∠A y por lo tanto se les llaman "funciones trigonométricas". Para facilitar su análisis, cada una recibe un nombre en especial, como se indica en la siguiente definición.

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

seno del ∠A = $\dfrac{\text{cateto opuesto al } \angle A}{\text{hipotenusa}}$ → $\operatorname{sen} A = \dfrac{a}{c}$ (abreviado)

coseno del ∠A = $\dfrac{\text{cateto opuesto al } \angle A}{\text{hipotenusa}}$ → $\cos A = \dfrac{b}{c}$ (abreviado)

tangente del ∠A = $\dfrac{\text{cateto opuesto al } \angle A}{\text{hipotenusa}}$ → $\tan A = \dfrac{a}{b}$ (abreviado)

cotangente del ∠A= $\dfrac{\text{cateto opuesto al } \angle A}{\text{hipotenusa}}$ → $\cot A = \dfrac{b}{a}$ (abreviado)

secante del ∠A = $\dfrac{\text{cateto opuesto al } \angle A}{\text{hipotenusa}}$ → $\sec A = \dfrac{c}{b}$ (abreviado)

cosecante del ∠A = $\dfrac{\text{cateto opuesto al } \angle A}{\text{hipotenusa}}$ → $\csc A = \dfrac{c}{a}$ (abreviado)

Deberás tomarte el tiempo necesario para memorizarte la definición de cada una de las funciones trigonométricas, puesto que son las piedras angulares de la trigonometría. Deberás conocerlas tan bien, que cuando alguien mencione "sen θ", automáticamente pienses en "opuesto a θ sobre hipotenusa".

Como consecuencia inmediata de estas definiciones, se pueden observar algunas relaciones entre las funciones trigonométricas. Por ejemplo, observa que los ángulos agudos (∠A y ∠B) del ΔABC son complementarios, es decir, ∠A + ∠B = 90°

La tabla 2 muestra las definiciones de las funciones trigonométricas para los dos ángulos agudos del ΔABC de la figura 3.1

sen A =	$\dfrac{\text{op al } \angle A}{\text{hip}} = \dfrac{a}{c}$	sen B =	$\dfrac{\text{op al } \angle B}{\text{hip}} = \dfrac{b}{c}$
cos A =	$\dfrac{\text{op al } \angle A}{\text{hip}} = \dfrac{b}{c}$	cos B =	$\dfrac{\text{op al } \angle B}{\text{hip}} = \dfrac{a}{c}$
tan A =	$\dfrac{\text{op al } \angle A}{\text{hip}} = \dfrac{a}{b}$	Tan B =	$\dfrac{\text{op al } \angle B}{\text{hip}} = \dfrac{b}{a}$
cot A =	$\dfrac{\text{op al } \angle A}{\text{hip}} = \dfrac{b}{a}$	cot B =	$\dfrac{\text{op al } \angle B}{\text{hip}} = \dfrac{a}{b}$
sec A =	$\dfrac{\text{op al } \angle A}{\text{hip}} = \dfrac{c}{b}$	sec B =	$\dfrac{\text{op al } \angle B}{\text{hip}} = \dfrac{c}{a}$
csc A =	$\dfrac{\text{op al } \angle A}{\text{hip}} = \dfrac{c}{a}$	csc B =	$\dfrac{\text{op al } \angle B}{\text{hip}} = \dfrac{c}{b}$

Por inspección puedes observar que
sen A = cos B
cos A = sen B
tan A = cot B
cot A = tan B
sec A = csc B
csc A = sec B

Pero como B= 90° - A se define que

COFUNCIONES
sen A = cos (90° - A)
tan A = cot (90° - A)
sec A = csc (90° - A)

El prefijo "co" indica que el coseno de un ángulo es igual al seno de su complemento y viceversa; que la cotangente es igual a la tangente de su complemento; y que la cosecante a la secante de su complemento y viceversa. Así toda función de un ángulo agudo es igual a la cofunción correspondiente de su ángulo complementario.

Ejemplo 1

Si $\tan\theta = \cot 51°$; encuentra el valor de θ

Solución

Como la cofunción de la tangente es la cotangente, los dos ángulos deben de ser complementarios:

$\theta + 51° = 90°$

$\theta = 90° - 51°$

$\theta = 39°$

Observa también que por cada función hay una "función recíproca" (recuerda que el producto de dos recíprocos es igual a 1). Considera las funciones seno y cosecante del ∠A de la figura 3.1

$\text{sen } A = \frac{a}{c}$ y $\csc A = \frac{c}{a}$

Si multiplicas: (sen A) (csc A), obtienes

$$(\text{sen } A)(\csc A) = \left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{ac}{ca} = 1$$

Así el seno y cosecante son funciones recíprocas, es decir:

$$\text{sen } A = \frac{1}{\csc A} \quad \text{ó} \quad \csc A = \frac{1}{\text{sen} A}$$

Análogamente, el coseno y la secante y la tangente y la cotangente son recíprocas.

RELACIONES RECIPROCAS

$$\text{sen } A = \frac{1}{\csc A} \qquad \csc A = \frac{1}{\text{sen} A}$$

$$\cos A = \frac{1}{\sec A} \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A}$$

$$\tan A = \frac{1}{\cot A} \qquad \cot A = \frac{1}{\tan A}$$

Debido a estas relaciones recíprocas, se utiliza más frecuentemente una función de cada par de funciones trigonométricas recíprocas. Las funciones trigonométricas que se utilizan con más frecuencia son el seno, el coseno y la tangente.

Ejemplo 2

Si $\cos\theta = \frac{2}{3}$, encuentra el valor de $\sec\theta$

Solución

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ relaciones recíprocas

$\sec\theta = \frac{1}{2/3}$

$\sec\theta = \frac{3}{2}$

Otras relaciones que son de considerable importancia son las resultantes de dividir funciones trigonométricas. Por ejemplo, considera las funciones seno y coseno del $\angle A$ de la figura 3.1

$$\text{sen}A = \frac{a}{c} \qquad \text{y} \quad \cos A = \frac{b}{c}$$

Si divides: $\dfrac{\text{sen}A}{\cos A}$; obtienes:

$$\frac{\text{sen}A}{\cos A} = \frac{a/b}{b/c} = \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \qquad \text{(que es la definición de tan A)}$$

es decir, en términos de funciones trigonométricas

$$\frac{\text{sen}A}{\cos A} = \tan A$$

y como la tangente y la cotangente son funciones recíprocas, se sigue también que

$$\cot A = \frac{\cos A}{\text{sen}A}$$

RELACIONES EN FORMA DE COCIENTE
$\tan A = \dfrac{\text{sen}A}{\cos A}$ y $\cot A = \dfrac{\cos A}{\text{sen}A}$

Ejemplo 3

Si $\text{sen}\theta = 3/5$ y $\cos\theta = 4/5$, encuentra $\tan\theta$ y $\cot\theta$

Solución

$\tan\theta = \dfrac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}$ por relaciones en forma de cociente

$\tan\theta = \dfrac{3/5}{4/5} = \dfrac{(3)(5)}{(4)(5)}$ y por lo tanto

$\tan\theta = \dfrac{3}{4}$ relaciones recíprocas

$\cot\theta = \dfrac{4}{3}$

Finalmente con la ayuda del teorema de Pitágoras derivaremos las siguientes relaciones muy importantes también. Para el $\angle A$ del triángulo rectángulo de la figura 3.1, se cumple que
$(\text{cateto op.})^2 + (\text{cateto ady.})^2 = (\text{hip})^2$
o sea

$$a^2+b^2=c^2$$

Si divides ambos miembros de esta ecuación entre c^2, obtienes

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \left(\frac{c}{c}\right)^2$$

es decir, en términos de las funciones trigonométricas
$(\text{sen}A)^2 + (\cos A)^2 = 1$

Se acostumbra escribir $(\text{sen}A)^2$ y $(\cos A)^2$ en la forma sen^2A y $\cos^2A$, respectivamente. Entonces la ecuación se expresa como:

$$\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$$

Similarmente se pueden derivar otras dos fórmulas dividiendo la ecuación original entre b^2 y a^2, respectivamente tenemos :

$$\tan^2A+1 = \sec^2A \qquad \text{y} \qquad \cot^2A+1=\csc^2A$$

RELACIONES PITAGORICAS
$\text{sen}^2A+\cos^2A=1$
$\tan^2A+1=\sec^2A$
$\cot^2A+1=\csc^2A$

Ejemplo 4

Si $\text{sen}\,\theta = \dfrac{15}{17}$; encuentra el valor de las otras cinco funciones del $\angle\theta$.

Solución
Resolviendo la primera relación pitagórica para $\cos\theta$, tenemos:

$$\cos\theta = \sqrt{1-\text{sen}^2\theta}$$

Sustituyendo

$$\cos\theta = \sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{225}{289}\right)} = \sqrt{\frac{64}{289}}$$

$\cos\theta = \dfrac{8}{17}$ (tomando solamente la raíz positiva, pues el $\angle\theta$ es agudo)

Ahora, utilizando las relaciones en forma de cociente

$$\tan\theta = \frac{\text{senq}}{\text{cosq}}$$

nos queda

$$\tan\theta = \frac{15/17}{8/17} = \frac{15}{8}$$

Por lo tanto,

$\cot\theta = 8/15$ (relaciones recíprocas)

$\sec\theta = 17/8$

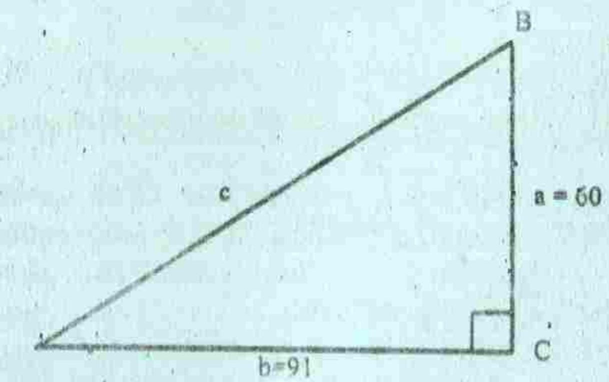
$\csc\theta = 17/15$

Las relaciones recíprocas, las en forma de cociente y las pitagóricas que hemos encontrado en esta sección se refieren a funciones de un sólo ángulo, no pudiéndose utilizar estas fórmulas con dos ángulos diferentes a la vez. Así por ejemplo, no se puede decir que senA/cosB sea igual a tan A o a tan B, ni que $\text{sen}^2X + \cos^2Y$ sea igual a 1, sino tan sólo que para un ángulo cualquiera X, sen X/cos X = tanX, $\text{sen}^2X+\cos^2X=1$, etc.

En general, puedes determinar el valor de las funciones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo si sólo conoces el valor de una de ellas (como el ejemplo 4) o bien, si conoces al menos la longitud de dos de los lados del triángulo rectángulo, utilizando el teorema de Pitágoras y las definiciones de las funciones trigonométricas.

Ejemplo 5

Determina el valor de cada una de las funciones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo rectángulo ABC de la siguiente figura, si los catetos a y b miden 60 cm y 91 cm, respectivamente.



Solución

Por medio del teorema de Pitágoras se puede encontrar el tercer lado de un triángulo rectángulo conocidos los otros dos: si se conocen los catetos, la fórmula que da la hipotenusa es

$$c^2 = a^2+b^2$$

si se conocen la hipotenusa y uno de los catetos y se desconoce el otro cateto, este se puede encontrar a partir de la fórmula anterior trasponiendo términos. Entonces, resulta que

$$a^2 = c^2-b^2 \quad \text{o bien } b^2 = c^2-a^2$$

Por consiguiente, conocidos los catetos y valiéndonos de la primera de estas fórmulas encontraremos primero c de la siguiente manera:

$$c^2=a^2+b^2=(60)^2+(91)^2=3600+8281=11881$$

por lo tanto, c=109 cm

Ya tenemos ahora los tres lados a=60, b=91 y c=109; entonces podemos calcular inmediatamente las funciones trigonométricas de los ángulos A y B, puesto que $\angle C=90°$, mediante las definiciones de las funciones:

$$\text{sen}A = \frac{a}{c} = \frac{60}{109}$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{91}{109}$$

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{60}{91}$$

$$\cot A = \frac{b}{a} = \frac{91}{60}$$

$$\sec A = \frac{c}{b} = \frac{109}{91}$$

$$\cos A = \frac{c}{a} = \frac{109}{60}$$

Después de hallar senA=60/109 y cosA=91/109, se podría, desde luego, utilizar las relaciones en forma de cociente y las recíprocas y calcular tan A, cotA, secA y cscA de la manera siguiente:

$$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{1}{60/91} = \frac{91}{60}$$

o también

$$\cot A = \frac{\cos A}{\text{sen}A} = \frac{91/109}{60/109} = \frac{91}{60}$$

y

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{91/109} = \frac{109}{91}$$

$$\csc A = \frac{1}{\text{sen}A} = \frac{1}{60/109} = \frac{109}{60}$$

En la práctica el seno y el coseno se calculan por determinados métodos especiales y después se aplica este método para el cálculo de las demás funciones. Sin embargo, para familiarizarse con las definiciones de las funciones trigonométricas con los elementos del triángulo, es preferible calcular las funciones directamente a partir del triángulo en vez de hacerlo valiéndose de las relaciones que ligan a las funciones entre sí. Una vez determinadas las funciones por cálculo directo, es útil, sin embargo, utilizar estas relaciones como comprobación.

Para determinar el valor de las funciones trigonométricas correspondientes al ∠B del triángulo rectángulo de la figura anterior, se puede utilizar la relación que liga a las funciones de los ángulos complementarios A y B y escribir las funciones y cofunciones de B deducidas de las correspondientes respectivas cofunciones y funciones del ∠A ya encontradas. Esto será un ejercicio muy instructivo para ti, pero aquí calcularemos todas las funciones de ∠B directamente a partir del triángulo:

$$\text{sen}B = \frac{b}{c} = \frac{91}{109}$$

$$\cos B = \frac{a}{c} = \frac{60}{109}$$

$$\tan B = \frac{b}{a} = \frac{91}{60}$$

$$\cot B = \frac{a}{b} = \frac{60}{91}$$

$$\sec B = \frac{c}{a} = \frac{109}{60}$$

$$\cos B = \frac{c}{b} = \frac{109}{91}$$

En todas las fracciones que dan las doce funciones de A y de B, tanto el numerador como el denominado están expresados en las mismas unidades. El valor de una función es pues, sencillamente, un "número" que no va expresado en ninguna clase de unidad. Lo mismo da por consiguiente, que los lados 60, 91, 109 de la figura anterior, estén expresados en centímetros, en pulgadas, en metros, en pies, en millas o en otra unidad cualquiera que ésta sea, con tal de que se emplee la misma unidad para medir los tres lados. Así, por ejemplo, si nos dicen que "a" mide 0.6 m, "b" mide 91 cm y "c" mide 1.09 m, hay que empezar por expresar las longitudes en centímetros o las tres en metros, ya que con cualquiera de esas unidades se obtiene el mismo valor de la función "para el mismo ángulo".

Ejercicio 3.1

Utiliza las relaciones fundamentales para encontrar el valor exacto de la función trigonométrica indicada. Considera que el ángulo indicado es agudo.

1. $\text{sen}\,\theta = \frac{3}{8}$, encuentra $\csc\theta$
2. $\cos\phi = \frac{3}{5}$, encuentra $\sec\phi$
3. $\tan\beta = 4$, encuentra $\cot\beta$
4. $\sec\delta = \frac{10}{7}$, encuentra $\cos\delta$
5. $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}$, encuentra $\cos\alpha$
6. $\text{sen}\,w = \frac{1}{2}, \cos w = \frac{\sqrt{3}}{2}$ encuentra $\tan w$
7. $\csc\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$, encuentra $\tan\theta$
8. $\cos\phi = \frac{3}{5}$, encuentra las otras cinco
9. $\text{sen}\,\beta = \frac{5}{13}$, encuentra las otras cinco
10. $\tan\delta = \frac{21}{20}$, encuentra las otras cinco

Utiliza las relaciones fundamentales y una calculadora para encontrar las funciones trigonométricas indicadas.

11. sen θ = 0.4313, encuentra csc θ
12. cos θ = 0.1155, encuentra sec θ
13. tan β = 2.397, encuentra cot β
14. csc A = 1.902, encuentra sen A
15. sec B = 2.03, encuentra tan B

En los siguientes ejercicios "c" representa la hipotenusa y las otras dos letras los catetos de un triángulo rectángulo. Dibuja una figura para cada uno, indicando los ángulos opuestos a los lados respectivos por las correspondientes letras mayúsculas. Partiendo de los dos lados que se dan como datos, en cada caso, hallar el tercero y calcular después las seis funciones trigonométricas de cada ángulo agudo del triángulo.

16. a=28, b=45, c=
17. p=36, q=77, c=
18. c=37, m=35, n=
19. c=73, f=48, g=
20. c=41, x=9, y=

3.2 Valores de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo

Objetivo

Utilizando las tablas trigonométricas o la calculadora, encontrar los valores aproximados de las funciones trigonométricas de ángulos agudos o encontrar un ángulo agudo a partir del valor de una función trigonométrica. Encontrar los valores exactos de las seis funciones trigonométricas, si la medida del ángulo es 30°, 45° ó 60°.

Hasta esta parte del capítulo se han calculado los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo utilizando las longitudes de los lados del triángulo rectángulo. Sin embargo, como se dijo anteriormente, los valores de las funciones trigonométricas dependen únicamente de la magnitud del ángulo y no del tamaño del triángulo; así, para encontrar el valor de una función trigonométrica sólo se necesita la medida del ángulo.

Los valores de las funciones trigonométricas las necesitarás principalmente para resolver los problemas de aplicación propuestos en las próximas secciones, y los puedes encontrar generalmente enlistados en forma de tablas trigonométricas, o bien, utilizando una calculadora. Se han elaborado tablas trigonométricas adaptadas a diferentes fines, que dan los valores de las funciones con ocho o diez cifras decimales y para ángulos dados a intervalos de un minuto y hasta de un segundo, por ejemplo, como las utilizadas en Astronomía y Topografía. Estas tablas se imprimen en formas muy diversas; algunas muestran las diferentes funciones en sitios separados de la tabla, impresos en páginas distintas.

En la parte final del texto se incluye una tabla de funciones trigonométricas con una aproximación de cuatro cifras decimales para ángulos de 0° a 90° a intervalos de cada 10 minutos, en la que el procedimiento para su uso se resume a continuación:

i)	Para encontrar los valores de las funciones trigonométricas para ángulos entre 0° y 45°, localiza el ángulo al lado izquierdo de la tabla y el nombre de la función en la parte superior de la columna.
ii)	Para encontrar los valores de las funciones trigonométricas para ángulos entre 45° y 90°, localiza el ángulo en el lado derecho de la tabla y el nombre de la función en la parte inferior de la columna.
iii)	En cada renglón la suma de los ángulos de la columna izquierda con los de la derecha es de 90°, pues las tablas están basadas en la igualdad de las cofunciones de ángulos complementarios. Así, sen 57°=cos(90°-57°)=cos33°
iv)	Para encontrar el ángulo agudo teniendo como dato el valor de la función trigonométrica, busca en las dos columnas cuyo encabezado sea la función correspondiente hasta encontrar el valor dado. Si el encabezado de la función se encuentra arriba de la columna, la respuesta es el ángulo de la izquierda; si el encabezado de la función se encuentra en la parte de abajo de la columna, la respuesta es el ángulo de la derecha.

En este capítulo y en el próximo, puedes utilizar la tabla anterior para encontrar los valores de las funciones trigonométricas leyendo el valor directamente de las tablas, siempre que utilices una solución manual del problema.

Ejemplo 1

Encuentra el valor de las siguientes funciones:

a) sen 34°40' c) tan 55°20'
b) cos 72° d) cot 41°50'

Solución

a) Localiza 24°40' en la columna de la izquierda (ya que, 24°40'<45°) y lee el valor contenido en la casilla que coincide con el "sen" de la parte superior de la tabla:
sen 24°40' = 0.4173

b) Localiza 72° en la columna de la derecha (ya que 72°>45°) y lee el valor contenido en la casilla que coincide con el "cos" en la parte inferior de la tabla:
cos 72° = 0.3090

c) Tan 55°20' = 1.4460. Dado que 55°20'>45°, se lee la función en la parte inferior de la tabla.

d) Cot 41°50' = 1.1171. Lee en la parte superior de la tabla dado que 41°50'<45°

Ejemplo 2

Dado el valor de la función encuentra el ángulo correspondiente

a) sen A = 0.2924 c) sec C = 1.8361
b) tan B = 2.7725 e) cos D= 0.8886

Solución

El procedimiento es el inverso al que se expreso en el ejemplo anterior:

a) Si sen A = 0.2924 ---> A = 17°
b) Si tan B = 2.7725 ---> B = 70°10'
c) Si sec C = 1.8361 ---> C = 57°
d) Si cos D = 0.8886 ---> D = 27°30'

Para determinar el valor aproximado de una función trigonométrica de un ángulo medido en minutos que no es múltiple de 10' como en sen 24°43', se obtiene una proporción entre los valores de los dos ángulos mas cercanos (24°40' y 45°50') utilizando el método de "interpolación lineal". Este proceso se muestra en los ejemplos siguientes

Ejemplo 3

Encuentra el valor de: sen 24°43'

Solucion

El valor de sen 24°43' debe ser un valor que este entre sen 24°40' y sen 24°50'

Se escriben los valores de los tres ángulos en orden ascendente; se buscan los valores de sen 24°40' y sen 24°50' en la tabla y se plantea una proporción directa:

sen 24°40' = 0.4173
sen 24°43' =
sen 24°50' = 0.4200

$$x = \frac{3(0.0027)}{10}$$

Así, la corrección es x=0.0008

A medida que el ángulo aumenta, aumenta también el seno del ángulo:

sen 24°43' = 0.4173 + 0.0008
sen 24°43' = 0.4181

(**NOTA**: cuando se interpola de un ángulo menor a otro mayor, como en el ejemplo anterior, la corrección se suma para el valor del ángulo menor para encontrar el seno, la tangente y la secante; pero se resta al mayor para encontrar el coseno, la cotangente y la cosecante, pues el valor de estas funciones decrecen cuando el ángulo agudo aumenta).

Ejemplo 4

Encuentra A, si cot A = 0.6345

Solución
El valor de 0.6345 esta entre los valores de cot 57°30' y cot 57°40'.

cot 57°30' = 0.6371
cot A = 0.6345
cot 57°40' = 0.6330

$$\frac{x}{10} = \frac{0.0015}{0.0041}$$

$$x = \frac{0.0015}{0.0041}(10')$$

Así, la corrección es x=4' (redondeando al minuto mas cercano). Al restar la corrección (dado que la función es cotangente) se tiene que:

A=57°40'-4'
A=57°36'

Hoy día el uso de las calculadoras proporciona el medio mas conveniente para encontrar los valores específicos de las funciones trigonométricas.

Cuando la utilices para encontrar el valor de alguna función trigonométrica, debes asegurarte de seguir el procedimiento indicado por el manual de la calculadora . En general, el procedimiento es el siguiente:

i) Asegúrate de que la calculadora este en el modo de grados (degree mode)
ii) Introduce el valor del ángulo en grados.
iii) Presiona la tecla de la función trigonométrica deseada (para las funciones cotangente, secante y cosecante se utiliza el reciproco de la función correspondiente).
iv) Lee el valor de la función desplegado en la pantalla.

Al utilizar la calculadora para encontrar un ángulo agudo, cuando se conoce el valor de la función trigonométrica, se utiliza la operación inversa, tecla INV o la tecla de las segundas funciones (2nd). Se introduce el valor de la función, después se presiona la tecla INV o la segunda función (2nd) y se presiona la tecla de la función trigonométrica deseada. Se utiliza el modo de grados para obtener el resultado en grados.

Ejemplo 5

Utilizando la calculadora encuentra el valor de las siguientes funciones trigonométricas:
a) tan 48°23'
b) cot 37°20'

Solución

a) i) La calculadora debe estar en modo grados (degree mode)

$$\tan 48°23' = \tan\left(48+\frac{23}{60}\right)^{\circ}$$

ii) Introduce el 48, presiona la tecla (+), introduce el 23, presiona la tecla (÷), introduce 60, presiona la tecla (=).

iii) Presiona la tecla (tan)

iv) tan 48°23' = 1.1257 redondeando a 4 cifras decimales

b) i) La calculadora debe estar en modo grados (degree mode)

$$\cot 37°20' = \cot\left(37+\frac{20}{60}\right)^{\circ}$$

ii) Introduce el 37, presiona la tecla (+), introduce el 20, presiona la tecla (÷), introduce el 60, presiona la tecla (=).

iii) Presiona la tecla (tan)

iv) Presiona la tecla (1/x) o divide 1 entre el valor de tan 37°20'

v) cot 37°20' = 1.3111 redondeando a 4 cifras decimales

Dado el valor de una función trigonométrica, el valor del ángulo se puede encontrar fácilmente en grados y decimales mediante el uso de una calculadora. Si los ángulos se desean en minutos, se toma la parte decimal y se multiplica por 60', redondeando el resultado según se requiera.

Ejemplo 6

Encuentra A, si
a) sen A = 0.4234
b) sec A = 3.4172

Solución

a)
- i) La calculadora debe estar en modo grados (degree mode).
- ii) Introduce 0.4234, presiona la tecla (INV) y la tecla (Sen)
- iii) A=25.05° (al centésimo mas cercano)
- iv) Recuerda el numero entero de grados, 25°
- v) Presiona la tecla (-), introduce 25, presiona la tecla (=), presiona la tecla (x), introduce 60 y presiona la tecla (=).
- vi) El valor redondeado al minuto mas cercano es 3'
- vii) A=25°3'

b)
- i) La calculadora debe estar en modo grados (degree mode)
- ii) Introduce 3.4172, presiona la tecla (1/x), o bien introduce 1, presiona (÷), introduce 3.4172 y presiona la tecla (=)
- iii) Presiona la tecla (INV) y la tecla (Cos)
- iv) A=72.98° al centésimo mas cercano, o bien
- v) Recuerda el numero entero de grados, 72°
- vi) Presiona la tecla (-), introduce 72, presiona la tecla (=), presiona la tecla (x), introduce 60 y presiona la tecla (=)
- vii) El valor redondeado al minuto mas cercano es 59'
- viii) A=72°59'

Los ángulos de 30°, 45° y 60°, por sus propiedades geométricas, aparecen tan frecuentemente que a veces se les llama "ángulos especiales". Es relativamente fácil determinar los valores exactos de las funciones trigonométricas de estos ángulos sin la necesidad de usar una calculadora o las tablas. El procedimiento para determinar estos valores se muestra a continuación.

Si en el cuadrado ABCD de la figura 3.2 se traza la diagonal AB, se obtienen dos triángulos rectángulos iguales, y puesto que los catetos de esos triángulos son iguales por ser lados de un cuadrado, resulta que los dos ángulos agudos de cada triángulo serán iguales a la mitad de 90°, o sea, 45°. Por consiguiente,

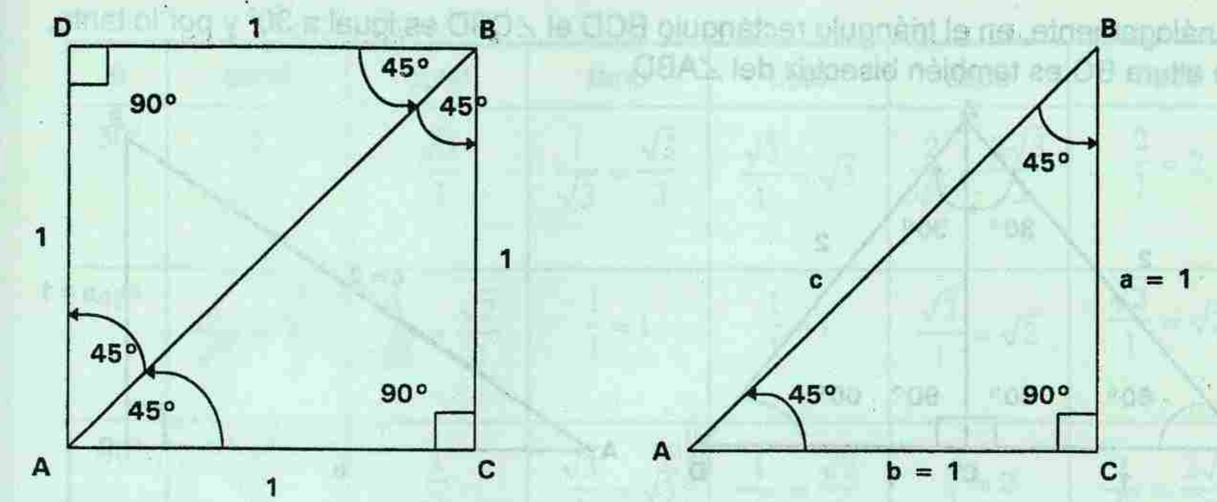


Fig. 3.2

si tomamos los lados del cuadrado iguales a una unidad, cualquiera que esta sea, y dibujamos separadamente el triángulo rectángulo ABC (fig. 3.2), por el teorema de Pitágoras, obtendremos que:

$c^2=a^2+b^2$
$c^2=1^2+1^2$
$c^2=2$

Por lo tanto c= $\sqrt{2}$

y las funciones trigonométricas del ∠A = ∠B = 45°

$$\text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \csc 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sec 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\tan 45° = \frac{1}{1} = 1 \qquad \cot 45° = \frac{1}{1} = 1$$

Ya hemos dicho que el triángulo equilátero es también equiangular midiendo cada ángulo 60° (∠A=∠B=∠C=60°). En el triángulo equilátero ABD de la figura 3.3, se ha trazado por el vértice B la altura BC que es perpendicular a la base AD, y por consiguiente, los dos ángulos en C son rectos. Los dos triángulos ABC y BCD son pues, rectángulos. Entonces, como en el triángulo rectángulo ABC, la suma de los ángulos A y ABC es igual a 90° y ∠A=60°, por lo tanto ∠ABC es igual a 30°.

Análogamente, en el triángulo rectángulo BCD el ∠CBD es igual a 30° y por lo tanto, la altura BC es también bisectriz del ∠ABD.

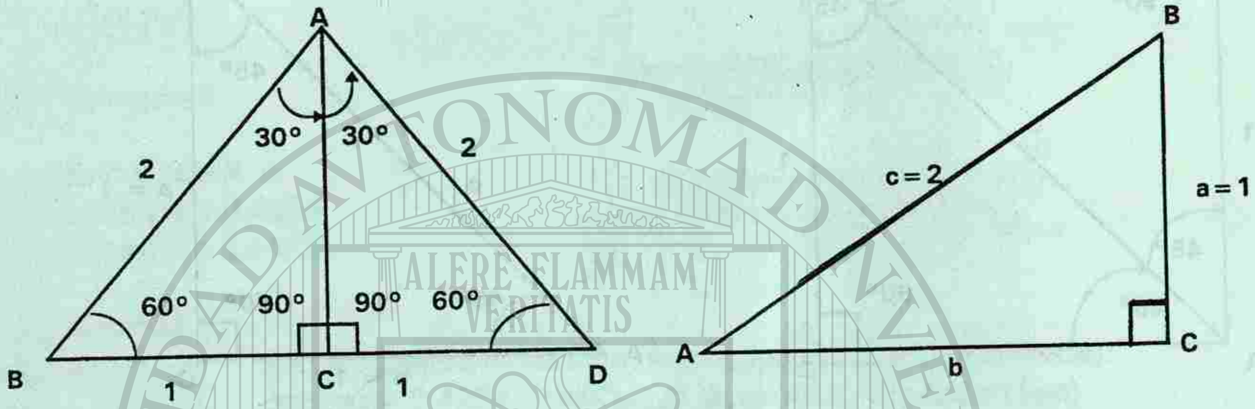


Fig. 3.3

Por tener los triángulos rectángulos ABC y BCD ángulos iguales, hipotenusas iguales, y un cateto BC igual, son iguales, y por lo tanto, lo son los catetos correspondientes AC y CD. La altura BC también bisecta a la base. Si tomamos los lados del _ABD iguales a dos unidades, tendremos que AC=CD=1, y el triángulo rectángulo ABC dibujado separadamente queda tal como se ilustra en la fig. 3.3. En este triángulo, por el teorema de Pitágoras, se tiene:

$a^2+b^2=c^2$
$a^2=c^2-b^2$
$a^2=2^2-1^2=4-1$
$a^2=3$
$a=\sqrt{3}$

Por lo tanto, de acuerdo al △ABC de la fig. 3.3, las funciones trigonométricas de 30° y 60° son:

$\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$ $\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 60° = \frac{1}{2}$

$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

$\cot 30° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ $\cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\sec 60° = \frac{2}{1} = 2$

$\csc 30° = \frac{2}{1} = 2$ $\csc 60° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Los resultados de la discusión anterior se pueden resumir en la tabla 3

θ	senθ	cosθ	tanθ	cotθ	secθ	cscθ
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2}{1} = 2$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2}{1} = 2$	$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Tabla 3

Los triángulos rectángulos con ángulos agudos de 45° y de 30° y 60° son muy importantes y conviene aprenderse de memoria los valores de las funciones trigonométricas de estos ángulos. Existe una manera muy sencilla para recordar los valores de las tres principales funciones escribiéndolas en forma radical:

θ	**senθ**	**cosθ**	**tanθ**
0°	$\sqrt{\frac{0}{4}}$	$\sqrt{\frac{4}{4}}$	$\sqrt{\frac{0}{4}}$
30°	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$
45°	$\sqrt{\frac{2}{4}}$	$\sqrt{\frac{2}{4}}$	$\sqrt{\frac{2}{2}}$
60°	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{3}{1}}$
90°	$\sqrt{\frac{4}{4}}$	$\sqrt{\frac{0}{4}}$	$\sqrt{\frac{4}{0}}$

Ejercicio 3.2

En los problemas del 1 al 10, encuentra el valor de cada una de las siguientes funciones, utilizando las tablas trigonométricas o una calculadora y redondeando el resultado con cuatro cifras decimales.

1. sen 76°
2. csc 64°14'
3. tan 18°
4. sen 40.4°
5. cos 32°10'
6. cos 55.5°
7. sec 28°40'
8. tan 62.6°
9. cot 54°30'
10. cot 37.7°

En los problemas del 11 al 20, utilizando las tablas trigonométricas o una calculadora, encuentra la medida del ángulo agudo θ en grados decimales y en grados y minutos.

11. $\operatorname{sen}\theta = 0.3907$
12. $\csc\theta = 1.4897$
13. $\cos\theta = 0.4695$
14. $\operatorname{sen}\theta = 0.2686$
15. $\tan\theta = 0.6787$
16. $\cos\theta = 0.9258$
17. $\cot\theta = 0.3185$
18. $\tan\theta = 2.9460$
19. $\sec\theta = 1.1890$
20. $\csc\theta = 3.0150$

En los problemas del 21 al 30, utilizando los valores exactos de las funciones 30°, 45° y 60°, demuestra que le miembro de la izquierda es igual al miembro de la derecha.

21. $\csc 45° = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 45°}$
22. $\sec^2 60° - \tan^2 60° = 1$
23. $\sec 30° = \csc 60°$
24. $\operatorname{sen} 30° \cos 60° + \operatorname{sen} 60° \cos 30° = 1$
25. $\cot 60° = \dfrac{\cos 60°}{\operatorname{sen} 60°}$
26. $\cos 30° \cos 60° - \operatorname{sen} 30° \operatorname{sen} 60° = 0$
27. $\tan 45° = \dfrac{\operatorname{sen} 45°}{\cos 45°}$
28. $\operatorname{sen} 60° = 2 \operatorname{sen} 30° \cos 30°$
29. $\operatorname{sen}^2 45° + \cos^2 45° = 1$
30. $\operatorname{sen} 30° = \sqrt{\dfrac{1-\cos 60°}{2}}$

3.3 Relaciones Fundamentales e Identidades

Objetivo

Usar las relaciones: recíprocas, de cocientes, pitagóras, de la suma y diferencia de dos ángulos, del ángulo doble y de la mitad del ángulo para simplificar espresiones, o bien, para demostrar que una ecuación trigonométrica dada es o no es una identidad.

En las secciones anteriores hemos tenido la ocasión de aprovechar con frecuencia las relaciones que desarrollamos en la sección 3.1 entre las funciones trigonométricas de un ángulo. Esas fórmulas y otras relaciones análogas tienen mucha aplicación en la parte de la trigonometría que constituye el llamado "Análisis trigonométrico", y en algunas otras ramas de las matemáticas superiores, como por ejemplo, en el "Cálculo infinitesimal". Son además sumamente útiles para la elaboración de las tablas trigonométricas y su deducción presenta un gran interés de tipo teórico.

Por estas razones damos en esta sección una breve introducción al Análisis trigonométrico, desarrollando algunas de las relaciones que ligan a las funciones trigonométricas de un ángulo y de más de un ángulo.

Hay once relaciones "fundamentales" que ya debes de estar familiarizado con ellas, pues las estudiaste en la sección 3.1, pero éstas se enlistan aquí para integridad:

RELACIONES RECIPROCAS

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\csc\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

RELACIONES DE COCIENTES

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

RELACIONES PITAGORICAS

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Estas once relaciones se llaman "identidades fundamentales" de la trigonometría y son válidas para todos los valores de θ para los cuales tienen significado las funciones en la expresión.

Las fórmulas anteriores nos permiten resolver el siguiente problema: conocida una de las funciones trigonométricas de un ángulo, determinar en función de ella todas las demás. Así, por ejemplo, para expresar todas las funciones trigonométricas en función del seno, se tiene:

$sen\theta = sen\theta$

según la relación pitagórica: $sen^2\theta+\cos^2\theta=1$

$$\cos^2\theta=1-sen^2\theta$$

por lo tanto, $\cos\theta=\sqrt{1-sen^2\theta}$

Según la relación de cocientes: $\tan\theta=\dfrac{sen\,\theta}{\cos\theta}$

por lo tanto, $\tan\theta=\dfrac{sen\,\theta}{\sqrt{1-sen^2\theta}}$

Para ser $\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$ **, resulta:**

$$\cot\theta=\frac{\sqrt{1-sen^2\theta}}{sen\,\theta}$$

Análogamente, de $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$ **y de** $\cos\theta=\sqrt{1-sen^2\theta}$ **se deduce:**

$$\sec\theta=\frac{1}{\sqrt{1-sen^2\theta}}$$

y finalmente, según ya hemos visto:

$$\csc\theta=\frac{1}{sen\,\theta}$$

Las fórmulas anteriores expresan todas las funciones en términos de sen θ. De manera semejante se pueden expresar todas, en función de cos θ, etc. (Te recomendamos que lo hagas como ejercicio).

Pero el objetivo más importante de esta sección es el que aprendas cómo simplificar o alterar la forma de expresiones trigonométricas usando las relaciones trigonométricas fundamentales.

Se pueden obtener varias formas equivalentes de las identidades fundamentales mediante la manipulación algebraica. Dichas formas alternas se dan en la siguiente tabla:

IDENTIDAD FUNDAMENTAL	FORMAS	EQUIVALENTES
Recíprocas		
$sen\,\theta=\dfrac{1}{\csc\theta}$	$\csc\theta=\dfrac{1}{sen\,\theta}$	**sen θ csc θ = 1**
$\cos\theta=\dfrac{1}{\sec\theta}$	$\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$	**cos θ sec θ = 1**
$\tan\theta=\dfrac{1}{\cot\theta}$	$\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$	**tan θ cot θ = 1**
Cocientes		
$\tan\theta=\dfrac{sen\,\theta}{\cos\theta}$	**senθ=tanθcosθ**	$\cos\theta=\dfrac{sen\,\theta}{\tan\theta}$
$\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{sen\,\theta}$	**cosθ=cotθsenθ**	$sen\,\theta=\dfrac{\cos\theta}{\cot\theta}$
Pitagóricas		
$sen^2\theta+\cos^2\theta=1$	**$sen^2\theta=1-\cos^2\theta$**	**$\cos^2\theta=1-sen^2\theta$**
$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$	**$\tan^2\theta=\sec^2\theta-1$**	**$\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$**
$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$	**$\cot^2\theta=\csc^2\theta-1$**	**$\csc^2\theta-\cot^2\theta=1$**

Tabla 4

Las once identidades fundamentales y sus formas equivalentes se pueden aplicar para simplificar expresiones que contienen funciones trigonométricas. Simplificar quiere decir reducir el número de términos de la expresión o el número de funciones trigonométricas distintas que se usan. O también, se pueden utilizar para demostrar que ciertas ecuaciones relativamente complicadas también son identidades. Una demostración lógica puede requerir:

a) la transformación de uno de los miembros de la ecuación, o bien;
b) la transformación de ambos miembros de la ecuación.

En todo caso, no hay que pasar ningún término de un lado a otro de la ecuación, pues es incorrecto verificar una identidad empezando con la suposición de que "es" una identidad.

Una o más de las siguientes sugerencias te pueden ayudar a simplificar expresiones trigonométricas o a verificar identidades:

1) Conocer las once relaciones fundamentales y reconocer las formas equivalentes de cada una.
2) Conocer los procedimientos de adición, sustracción y reducción de fracciones en fracciones más simples.
3) Conocer las técnicas de factorización y de los productos especiales.
4) Usar sustituciones para cambiar todas las funciones trigonométricas en expresiones que contengan únicamente senos y cosenos, y entonces simplificar.
5) evitar sustituciones que introduzcan expresiones con radicales.

Ejemplo 1

Simplifica cada una de las siguientes expresiones:

a) (secθ+tanθ(1-senθ)   c) $\dfrac{\cot^3\theta - \tan^3\theta}{\cot\theta - \tan\theta} - \sec^2\theta$

b) $\cos^2\theta - \cos^4\theta + sen^4\theta$ d) $\dfrac{\cos\theta}{1 - sen\,\theta} - \dfrac{1 + sen\,\theta}{\cos\theta}$

Solución

a) Escribimos cada una de las funciones en términos de seno y coseno

$$(\sec\theta+\tan\theta)(1-sen\theta) = \left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{sen\,\theta}{\cos\theta}\right)(1-sen\theta)$$

Sumamos las fracciones del primer factor

$$= \left(\frac{1 + sen\,\theta}{\cos\theta}\right)(1-sen\theta)$$

$$= \frac{(1 + sen\,\theta)(1 - sen\,\theta)}{\cos\theta}$$

Multiplicamos los factores del numerador de la fracción resultante

$$= \frac{1 - sen^2\theta}{\cos\theta}$$

Usamos la relación pitagórica equivalente $1-sen^2\theta=\cos^2\theta$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta}$$

$= \cos\theta$

b) Agrupamos los primeros dos términos y factorizamos

$$\cos^2\theta-\cos^4\theta+sen^4\theta=(\cos^2\theta-\cos^4\theta)+sen^4\theta$$

$$= \cos^2\theta(1-\cos^2\theta)+sen^4\theta$$

Usamos la relación pitagórica equivalente $1-\cos^2\theta=sen^2\theta$

$= \cos^2\theta sen^2\theta+sen^4\theta$

Factorizamos y usamos la relación pitagórica $sen^2\theta+\cos^2\theta=1$

$$= sen^2\theta(\cos^2\theta+sen^2\theta)$$
$$= sen^2\theta(1)$$
$$= sen^2\theta$$

c) Factorizamos el numerador de la fracción (diferencia de dos cubos)

$$\frac{\cot^3\theta - \tan^3\theta}{\cot\theta - \tan\theta} - \sec^2\theta = \frac{(\cot\theta - \tan\theta)(\cot^2\theta + \cot\theta\tan\theta + \tan^2\theta)}{(\cot\theta - \tan\theta)} - \sec^2\theta$$

Se simplifica la fracción

$= \cot^2\theta + \cot\theta\tan\theta + \tan^2\theta - \sec^2\theta$

Usamos la relación recíproca equivalente $\tan\theta\cot\theta = 1$

$= \cot^2\theta + 1 + \tan^2\theta - \sec^2\theta$

Luego la relación pitagórica $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$ y simplificamos

$= \cot^2\theta + \sec^2\theta - \sec^2\theta$

$= \cot^2\theta$

d) Restamos las fracciones

$$\frac{\cos\theta}{1 - sen\theta} - \frac{1 + sen\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos^2\theta - (1 + sen\theta)(1 - sen\theta)}{(1 - sen\theta)\cos\theta}$$

Efectuamos las operaciones indicadas en el numerador

$$= \frac{\cos^2\theta - (1 - sen^2\theta)}{(1 - sen\theta)\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta - \cos^2\theta}{(1 - sen\theta)\cos\theta} \qquad \text{relación pitagórica } (1 - sen^2\theta = \cos^2\theta)$$

$$= \frac{0}{(1 - sen\theta)\cos\theta}$$

$= 0$

Como puedes ver por el ejemplo anterior, una gran parte del proceso es algebraico. La serie de pasos usados en los procedimientos de simplificación no es única. La experiencia con el uso de las relaciones fundamentales y sus formas equivalentes al simplificar expresiones trigonométricas te dará alguna facilidad para escoger un procedimiento adecuado.

Ejemplo 2

Demuestra que cada una de las siguientes ecuaciones son identidades

a) $$\frac{sen^4\theta - \cos^4\theta}{sen^2\theta - \cos^2\theta} + \cot^2\theta = csc^2\theta$$

b) $$\frac{csc\theta}{\cos\theta} - sen\theta\sec\theta = \frac{\tan\theta\, csc^2\theta}{1 + \tan^2\theta}$$

Solución

a) **Aquí, simplificaremos el lado izquierdo de la ecuación, factorizando el numerador de la fracción.**

$$\frac{(sen^2\theta + \cos^2\theta)(sen^2\theta - \cos^2\theta)}{(sen^2\theta - \cos^2\theta)} + \cot^2\theta = csc^2\theta$$

$(sen^2\theta + \cos^2\theta) + \cot^2\theta = csc^2\theta$ **simplificando la fracción**

$1 + \cot^2\theta = csc^2\theta$ **utilizando relaciones pitagóricas**

$csc^2\theta = csc^2\theta$

b) **Aquí, el procedimiento más expedito es desarrollar ambos lados. Primeramente, por relaciones pitagóricas el denominador de la fracción del miembro derecho se puede escribir como $\sec^2\theta$.**

$$\frac{csc\,\theta}{\cos\theta} - sen\,\theta\sec\theta = \frac{\tan\theta\, csc^2\theta}{\sec^2\theta}$$

expresando ambos lados de la ecuación en términos de seno y coseno

$$\frac{\frac{1}{sen\theta}}{\cos\theta} - sen\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}\right) = \frac{\frac{sen\theta}{\cos\theta}\left(\frac{1}{sen\theta}\right)^2}{\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2}$$

$$\frac{1}{sen\theta\cos\theta} - \frac{sen\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{sen\theta}{\cos\theta} \bullet \frac{1}{sen^2\theta}}{\frac{1}{\cos^2\theta}}$$

$$\frac{1-sen^2\theta}{sen\theta\cos\theta}=\frac{\dfrac{sen\theta}{\cos\theta\, sen^2\theta}}{\dfrac{1}{\cos^2\theta}}$$

$$\rightarrow \frac{\cos^2\theta}{sen\theta\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta sen\theta}{\cos\theta\, sen^2\theta}\rightarrow\frac{\cos\theta}{sen\theta}=\frac{\cos\theta}{sen\theta}$$

$$\cot\theta=\cot\theta$$

Muchas de las ecuaciones trigonométricas no son identidades; no son válidas para todos los valores de la variable. Para mostrar que una ecuación trigonométrica no es una identidad, basta con encontrar un ángulo que no satisfaga la ecuación. Tal ángulo sirve como un "contraejemplo". Al elegir un ángulo como contraejemplo, hay que evitar los ángulos cuadrantales, ya que se puede obtener una función trigonométrica indefinida.

Ejemplo 3

Muestra que $\frac{\cos\theta - sen\theta}{\cos\theta}=1+\tan\theta$ no es una identidad.

Solución

El valor de θ se puede elegir de muchas formas; la elección es arbitraria. Por simplicidad en este caso, el valor que se usará de θ=60°

$$\frac{\cos 60° - sen\, 60°}{\cos 60°}=1+\tan 60°$$

$$\frac{1/2-\sqrt{3}/2}{1/2}=1+\sqrt{3}$$

$$\frac{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=1+\sqrt{3}$$

$$1-\sqrt{3}\neq 1+\sqrt{3}$$

A veces es necesario trabajar con expresiones referentes a la función trigonométrica de la suma o la diferencia de dos ángulos, tales como sen($\alpha+\beta$). Ahora veremos las identidades que se pueden usar para evaluar las funciones trigonométricas de las sumas de ángulos.

En primer lugar, hay que observar que no es correcto obtener el valor de la función de cada ángulo y entonces encontrar la suma de estos valores, pensar que sen ($\alpha+\beta$) es igual sen α+sen β, porque hay que recordar que el significado de sen ($\alpha+\beta$) no es el producto de (sen)·($\alpha+\beta$); significa que se trata del seno de un ángulo que sea suma de los ángulos α y β (esto se comprueba con facilidad tomando ejemplos numéricos concretos). La verdadera relación entre sen($\alpha+\beta$) y cos ($\alpha+\beta$) se establece construyendo la siguiente figura.

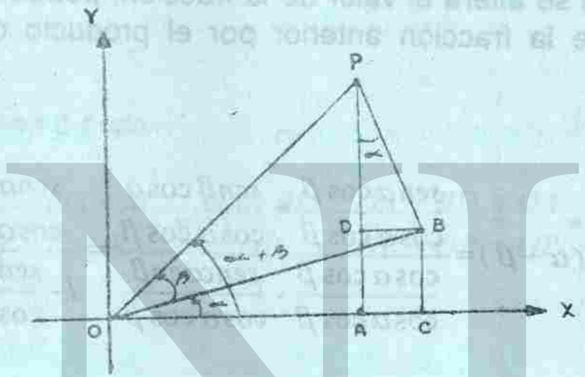


Fig. 3.4

Para construir esta figura, coloca el $\angle\alpha$ en posición normal y sitúa el $\angle\beta$ de tal forma que su vértice se encuentre en el origen O y su lado inicial coincida con el lado final del $\angle\alpha$. Si P es cualquier punto en el lado terminal del $\angle(\alpha+\beta)$ y trazas las rectas PA perpendicular a OX, PB perpendicular al lado terminal de α, BC perpendicular a OX y BD perpendicular a AP.

Ahora $\angle$APB=α (porque sus lados correspondientes son perpendiculares, OA y AP, OB y BP). Entonces,

$$sen(\alpha+\beta)=\frac{AP}{OP}=\frac{AD+DP}{OP}=\frac{CB+DP}{OP}=\frac{CB}{OP}+\frac{DP}{OP}=\frac{CB}{OB}\bullet\frac{OB}{OP}+\frac{BP}{OP}\bullet\frac{DP}{BP}$$

Por lo tanto,

sen($\alpha+\beta$)=senα cosβ+sen β cosα

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{OA}{OP}=\frac{OC-AC}{OP}=\frac{OC-DB}{OP}=\frac{OC}{OP}-\frac{DB}{OP}=\frac{OC}{OB}\bullet\frac{OB}{OP}-\frac{DB}{BP}\bullet\frac{BP}{OP}$$

Por lo tanto,

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Puesto que la relación $\tan\theta=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ es válida para cualquier ángulo, también lo será para el $\angle(\alpha+\beta)$ y tendremos

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

Si recordamos que al dividir el numerador y el denominador de una fracción por una misma cantidad no se altera el valor de la fracción, podemos dividir el numerador y el denominador de la fracción anterior por el producto cos α cosβ, con lo que resultará:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\bullet\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}$$

Por lo tanto,

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

Para deducir las fórmulas de sen(α-β) y de cos(α-β) procederemos de manera parecida a como lo hicimos en la discusión anterior.

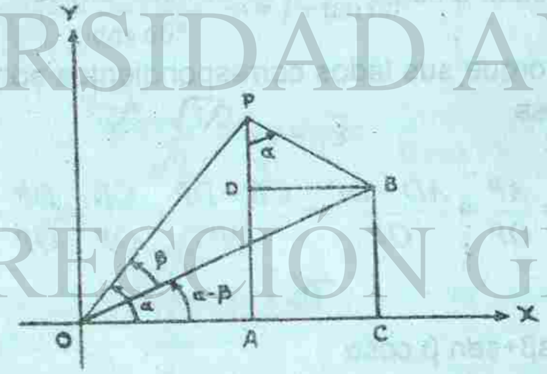


Fig. 3.5

Para construir la figura 3.5, coloca el ∠α en posición normal y sitúa el ∠β de tal forma que su vértice se encuentre en el origen y su lado inicial coincida con el lado final del ∠α. Si B es cualquier punto en el lado terminal del ∠(α-β) y trazas las rectas PA perpendicular a OX, PB perpendicular al lado terminal de α, BC perpendicular a OX y BD perpendicular a AP.

Ahora, ∠APB=α (porque sus lados correspondientes son perpendiculares, OA y AP, OB y BP). Entonces

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\frac{BC}{OB}=\frac{AP-PD}{OB}=\frac{AP}{OB}-\frac{PD}{OB}=\frac{AP}{OP}\bullet\frac{OP}{OB}-\frac{PB}{OB}\bullet\frac{PD}{PB}$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{OC}{OB}=\frac{OA+AC}{OB}=\frac{OA+BD}{OB}=\frac{OA}{OB}+\frac{BD}{OB}=\frac{OA}{OP}\bullet\frac{OP}{OB}+\frac{BD}{PB}\bullet\frac{PB}{OB}$$

Por lo tanto,

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Si ahora en la fórmula $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$

sustituimos los valores encontrados anteriormente y siguiendo un proceso análogo al anterior, se obtiene que:

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

También se pueden establecer identidades acerca de funciones trigonométricas de ángulos dobles, tales como sen 2α, o mitades de ángulos como $\cos\frac{\alpha}{2}$.

Supongamos que en las fórmulas de la suma de dos ángulos, los dos ángulos sean iguales, es decir α=β. Quedarán entonces,

$$\operatorname{sen}(\alpha+\alpha)=\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

Por lo tanto,

$$\text{sen } 2\alpha = 2 \text{ sen } \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \text{sen } \alpha \text{ sen } \alpha$$

Por lo tanto,

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha \quad \text{y} \quad \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan \alpha}$$

Por lo tanto,

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

Por último, las funciones trigonométricas de la mitad de un ángulo se expresan en función de las del ángulo por medio de las relaciones anteriores.

De la identidad $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$, si sustituimos $\cos^2\alpha$ por $1 - \text{sen}^2\alpha$, se deduce que

$$\cos 2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\text{sen}^2\alpha$$

y despejamos senα, nos queda

$$\text{sen}\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$$

si ahora hacemos $2\alpha = \theta$, entonces $\alpha = {}^{\theta}/_{2}$ y se tiene

$$\text{sen } {}^{\theta}/_{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

en rigor, se debería colocar el signo ± delante de la raíz cuadrada, lo cual significaría que el sen ${}^{\theta}/_{2}$ es positivo o negativo según el cuadrante, tal como se ilustró en la sección anterior. Si se sobrentiende ésto, no resulta necesario colocar

el doble signo delante de las raíces cuadradas en ninguna de las fórmulas siguientes.

De la relación $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$, si sustituimos $\text{sen}^2\alpha$ por $1 - \cos^2\alpha$, se deduce que

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha)$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2\alpha - 1$$

y despejamos cosα, resulta

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$$

y si hacemos $2\alpha = \theta$, entonces $\alpha = {}^{\theta}/_{2}$ y se tiene

$$\cos {}^{\theta}/_{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

La tan ${}^{\theta}/_{2}$ se puede expresar como

$$\tan {}^{\theta}/_{2} = \frac{\text{sen } \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}}{\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}}$$

o sea que $\tan {}^{\theta}/_{2} = \sqrt{\dfrac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$

o bién, racionalizando el denominador, obtenemos que $\tan {}^{\theta}/_{2} = \dfrac{\text{sen } \theta}{1 + \cos \theta}$

Las identidades para la suma, diferencia, el doble y la mitad del ángulo con senos, cosenos y tangentes se resumen en la siguiente tabla;

Identidad para la suma de dos ángulos:

sen(α+β) = senα cosβ + senβ cosα **cos(α+β) = cosα cosβ - senα senβ**

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\ \tan\_\beta}$$

Identidad para la diferencia de dos ángulos:

sen(α-β) = senα cosβ - senβ cosα **cos(α-β) = cosα cosβ + senα senβ**

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\_\beta}$$

Identidad para el doble del ángulo:

sen 2α = 2 senα cosα **cos 2α = cos²α - sen²α**

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Identidades para la mitad del ángulo:

$$sen\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{sen\,\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Ejemplo 4

Simplifica cada una de las siguientes expresiones:

a) $(sen\alpha + sen\beta)^2 + (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + 2\cos(\alpha+\beta)$

b) $\dfrac{sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta)}{sen\,2\alpha}$

Solución:

a) Desarrollando cada uno de los binomios al cuadrado

$(sen\alpha + sen\beta)^2 + (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + 2\cos(\alpha+\beta) =$

$=sen^2\alpha + 2\,sen\alpha\,sen\beta + sen^2\beta + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta\ 2(\cos\alpha\cos\beta - sen\alpha\,sen\beta)$

$=sen^2\alpha + 2sen\alpha sen\beta + sen^2\beta + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta - 2sen\alpha\,sen\beta$

combinando términos semejantes.

$=(sen^2\alpha + \cos^2\alpha) + (sen^2\beta + \cos^2\beta)$

$=1 + 1$

$=2$

b) $\dfrac{sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta)}{sen\,2\alpha} = \dfrac{sen\alpha\cos\beta + sen\beta\cos\alpha + sen\alpha\_\cos\beta - sen\beta\cos\alpha}{2sen\alpha\cos\alpha}$

$$= \frac{2sen\alpha\cos\beta}{2sen\alpha\cos\alpha}$$

$$= \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

Ejemplo 5

Demuestra cada una de las siguientes identidades:

a) $\dfrac{2\,sen^3\theta}{sen2\theta} + \cos\theta = \sec\theta$

b) $\dfrac{2\tan\theta - sen2\theta}{2\,sen^2\theta} = \tan\theta$

Solución:

a) Desarrollando el miembro izquierdo de la ecuación y usando las relaciones siguientes: sen 2θ = 2 senθ cosθ y $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$, tenemos

$$\frac{2\,sen^3\theta + \cos\theta sen2\theta}{sen2\theta} = \sec\theta$$

$$\frac{2\,sen^3\theta + \cos\theta(2sen\theta\cos\theta)}{2sen\theta\cos\theta} = \sec\theta$$

$$\frac{2\,sen^3\theta + 2sen\theta\cos^2\theta}{2sen\theta\cos\theta} = \sec\theta$$

$$\frac{2sen\theta(sen^2\theta + \cos^2\theta)}{2sen\theta\cos\theta} = \sec\theta$$

$$\frac{2sen\theta}{2sen\theta\cos\theta} = \sec\theta$$

$$\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$

$$\sec\theta = \sec\theta$$

b) Se utilizan las relaciones

$\tan\theta = \frac{sen\theta}{\cos\theta}$ y sen 2θ = 2 sen θ cos θ y desarrollando el lado izquierdo de la ecuación

$$\frac{\frac{2sen\theta}{\cos\theta} - 2sen\theta\cos\theta}{2\,sen^2\theta} = \tan\theta$$

$$\frac{\frac{2sen\theta - 2sen\theta\cos^2\theta}{\cos\theta}}{2\,sen^2\theta} = \tan\theta$$

$$\frac{2sen\theta - 2sen\theta\cos^2\theta}{2\,sen^2\theta\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\frac{2sen\theta(1-\cos^2\theta)}{2\,sen^2\theta\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\frac{2sen\theta\,sen\theta}{2\,sen^2\theta\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\frac{sen\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\tan\theta = \tan\theta$$

Ejercicio 3.3

Simplifica cada una de las siguientes expresiones:

1) $\frac{csc\theta}{\cot\theta}$

2) $\sec\theta(1 - sen^2\theta)$

3) $sen\theta\sec\theta$

4) $sen^2\theta(1+\cot^2\theta)$

5) $\frac{sen\theta}{\cot\theta} + \cos\theta$

6) $\cot^2\theta(1+\tan^2\theta)$

7) $\frac{sen\theta+\cos\theta}{sen\theta} + \cot\theta$

8) $\frac{sen\theta}{csc\theta} + \frac{\cos\theta}{\sec\theta}$

9) $\frac{(1+sen\theta)(1-sen\theta)}{\cos\theta}$

10) $(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)$

11) $csc\theta\sec\theta - \cot\theta$

12) $\frac{1}{1+sen\theta} + \frac{1}{1-sen\theta}$

13) $\frac{1+\sec\theta}{sen\theta+\tan\theta}$

14) $sen(\theta+\delta)\cos\theta - \cos(\theta+\delta)sen\theta$

15) $\cos(\theta-\delta)sen\theta - sen(\theta-\delta)\cos\theta$

16) $\cos(\theta+\delta)\cos\delta + sen(\theta+\delta)sen\delta$

17) $\frac{sen(\theta+\delta) + sen(\theta-\delta)}{\cos(\theta+\delta)+\cos(\theta-\delta)}$

18) $sen2\theta\sec\theta$

19) $2\cos^2\frac{\theta}{2}$

20) $(sen\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2})^2 - 1$

Demuestra que cada una de las siguientes ecuaciones son identidades

21) $\sec\theta + \cos\theta - sen\theta\tan\theta = 0$

22) $\cos\theta\tan\theta + \cos\theta\cot\theta = csc\theta$

23) $\dfrac{\tan^2\theta - sen^2\theta}{\tan^2\theta} = sen^2\theta$

24) $\dfrac{1}{\sec\theta + \tan\theta} + \tan\theta = \sec\theta$

25) $\dfrac{\sec\theta - \cos\theta}{\tan\theta} = sen\theta$

26) $\dfrac{\cos^2\theta}{1 + sen\theta} + sen\theta = 1$

27) $\dfrac{\cos\theta - sen\theta}{1 - \tan\theta} = \cos\theta$

28) $\dfrac{\cot\theta - sen\theta}{csc\theta - \tan\theta} = \cos\theta$

29) $\dfrac{csc^2\theta - \cot^2\theta}{\sec^2\theta} = \cos^2\theta$

30) $\dfrac{sen\theta}{1 - \cos\theta} + \dfrac{1 + \cos\theta}{sen\theta} = 2csc\theta$

31) $(\sec\theta - \cos\theta)\cos\theta = sen^2\theta$

32) $1 - sen\theta\cos\theta\tan\theta = \cos^2\theta$

33) $(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = 1$

34) $(\sec\theta + \tan\theta)(1 - sen\theta) = \cos\theta$

35) $\dfrac{sen2\theta}{1 - \cos 2\theta} = \cot\theta$

36) $\dfrac{\cos 2\theta}{sen\theta} + \dfrac{sen2\theta}{\cos\theta} = csc\theta$

37) $\dfrac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos^2\theta} = \tan^2\theta$

38) $\dfrac{sen2\theta}{sen\theta} - \dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta} = \sec\theta$

39) $\cot\theta - \dfrac{\cos 2\theta}{sen\theta\cos\theta} = \tan\theta$

40) $\dfrac{\tan\theta - \tan\delta}{\sec\theta\sec\delta} = sen(\theta - \delta)$

3.4 Resolución de triángulos rectángulos

Objetivo

Usar las funciones trigonométricas para encontrar datos faltantes de triángulos rectángulos y resolver problemas de aplicación que los involucren.

Supongamos, por ejemplo, que se desea sujetar un poste de 8 m. de altura por medio de un tirante de alambre sujeto a lo alto del poste y a una estaca situada a una distancia de 5 m. del pie del mismo sobre un suelo horizontal. ¿Cual deberá ser la longitud del alambre que se necesita y cual su inclinación con respecto al suelo y con respecto al poste? Este problema se resuelve con facilidad por medio de las relaciones trigonométricas anteriormente vistas.

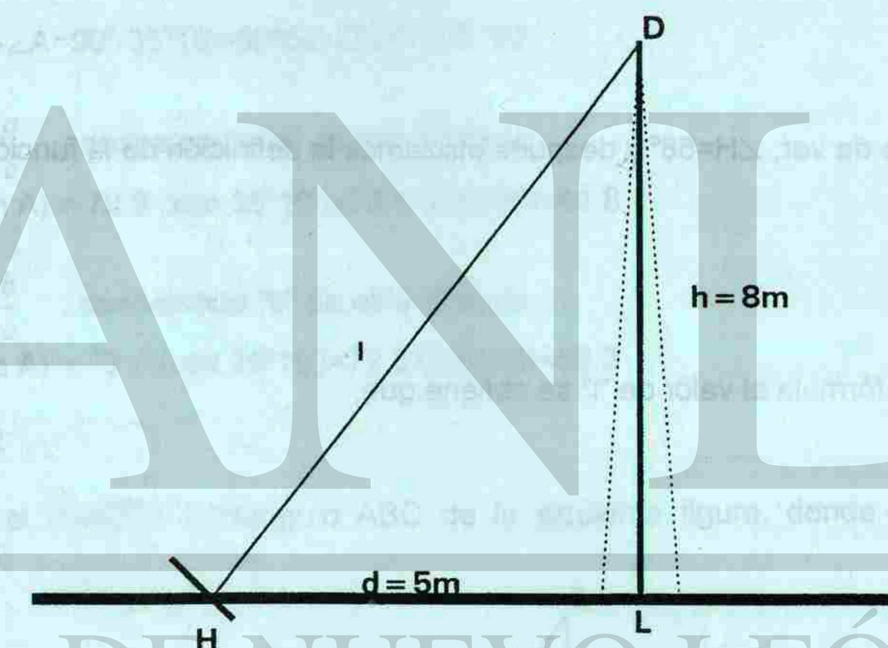


Fig. 3.6

En efecto, si DL es el poste (Fig. 3.6) y "h" su altura conocida de 8 m., "d" la distancia HL de 5 m. Desde la estaca al pie del poste, y DH representa el alambre de longitud "l" sujeto a la estaca en H; el ∟DHL es un triángulo rectángulo en L en el que, como sabemos, $l^2=d^2+h^2$, de donde , $l = \sqrt{d^2+h^2}$. Puesto que "d" y "h" se conocen, esta fórmula nos permite calcular inmediatamente "l".

$l = \sqrt{d^2+h^2} = \sqrt{5^2+8^2} = \sqrt{25+64} = \sqrt{89} = 9.43m$

La inclinación del alambre con respecto al suelo es el ∠H, y de la definición de la función tangente, deducimos que tan H= $\frac{h}{d}$

Como conocemos "h" y "d", esta fórmula da en seguida la tangente del ∠H,

tan H = $\frac{8m}{5m}$ = 1.6

Ya conocida la tangente, buscamos en las tablas trigonométricas o con una calculadora, el valor del ángulo de inclinación H,
∠H=58°

Una vez conocido el ∠H, el ∠D = 90°-∠H,
∠D= 90°-58°=32°

La longitud de "l" del alambre se pudo haber determinado también sin utilizar el teorema de Pitágoras, si primero calculamos el ∠H por la fórmula,

tan H= $\frac{h}{d}$

que como acabamos de ver, ∠H=58° y después utilizamos la definición de la función seno del ∠H,

sen H = $\frac{h}{l}$

Despejando de esta fórmula el valor de "l" se obtiene que,

l = $\frac{h}{sen\,H}$

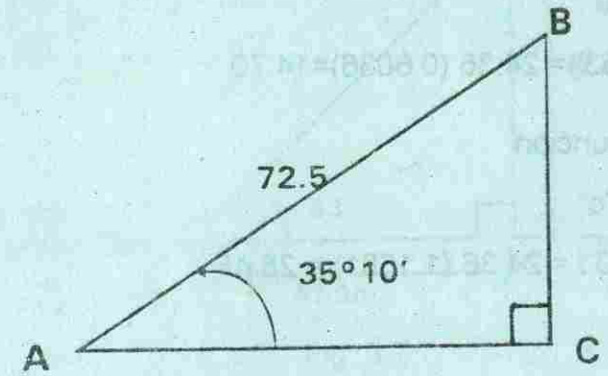
por lo tanto,

l = $\frac{8m}{sen\,58°} = \frac{8}{0.8480} = 9.43m$

De manera que eligiendo de entre las funciones trigonométricas del triángulo rectángulo aquella que involucra los datos y la incógnita, y transformándola convenientemente mediante los métodos algebraicos, tenemos a nuestra disposición ecuaciones y fórmulas que nos permiten calcular cualquier lado o ángulo de un triángulo rectángulo cuando se dan suficientes datos.

Ejemplo 1

En el _ABC de la figura, donde ∠A=35°10'y c=72.5; resuelve el triángulo rectángulo, es decir, encuentra la medida de: a) ∠B, b) el lado a y c) el lado b



Solución:

a) ∠B=90°-∠A=90°-35°10'=89°60'-35°10'=54°50'

b) sen A= $\frac{a}{c}$; despejando "a" de esta fórmula,

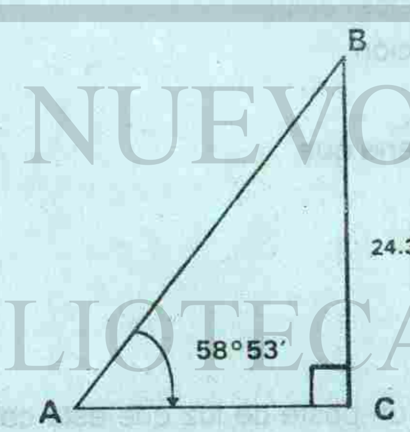
a=c (sen A) = 72.5 (sen 35°10')=72.5 (0.5760)=41.8

c) cos A= $\frac{b}{c}$; despejando "b" de esta fórmula

b=c (cos A) = 72.5 (cos 35°10')=72.5 (0.8175)=59.3

Ejemplo 2

Resuelve el triángulo rectángulo ABC de la siguiente figura, donde a =24.36 y ∠A=58°53'



Solución

a) El $\angle B=90^\circ-\angle A=90^\circ-58^\circ53'=89^\circ60'-58^\circ53'=31^\circ7'$

b) Para el lado "b" se utiliza la función

$\cot A=\frac{b}{a}$; y despejando "b"

$b=a(\cot A)=24.36\ (\cot 58^\circ53')=24.36\ (0.6036)=14.70$

c) Para el lado "c" se utiliza la función

$\csc A=\frac{c}{a}$; y despejando "c"

$c=a(\csc A)=24.36\ (\csc 58^\circ53')=24.36\ (1.1681)=28.45$

Ejemplo 3

Resuelve el triángulo rectángulo ABC de la siguiente figura, donde a=43.9 y b=24.3

Solución

a) $\tan A=\frac{a}{b}=\frac{43.9}{24.3}=1.8066$

por lo tanto $\angle A=61^\circ$

b) $\angle B=90^\circ-\angle A=90^\circ-61^\circ=29^\circ$

c) Para el lado "c" se utiliza la función

$\csc A=\frac{c}{a}$; despejando "c", se tiene que

$c=a(\csc A)=43.9\ (\csc 61^\circ)=43.9\ (1.1434)=50.2$

o bien, se pudo haber utilizado la función

$\text{sen } A=\frac{a}{c}$; y despejando "c", se tiene que

$$c=\frac{a}{\text{sen } A}=\frac{43.9}{\text{sen } 61^\circ}=\frac{43.9}{0.8746}=50.2$$

Ejemplo 4

Supón que te dan el trabajo de medir un poste de luz que esta colocado afuera de un negocio. Como es muy difícil para ti subirte para medirlo, decides medirlo desde el piso. De un punto situado a 47.3 metros del poste, encuentras que con un

teodolito el ángulo del piso a la punta del poste es de 53°. (Fig. 3.7) ¿Cuál es la altura del poste?

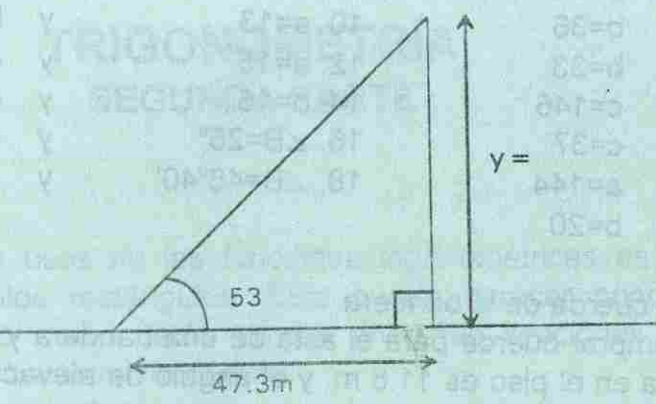


Fig. 3.7

Solución

Con la figura puedes ver que se forma un triángulo rectángulo, donde el cateto adyacente = 47.3 m y la incógnita es el cateto opuesto.

Así que con la definición de la tangente del ángulo dado tenemos:

$\tan 53^\circ=\frac{y}{47.3}$

$y=47.3 \times \tan 53^\circ$

$y=47.3 \times 1.327$

$y=62.77$ metros

Ejercicio 3.4

Resuelve cada uno de los siguientes triángulos rectángulos ABC;

Dados:

1. $\angle B=36^\circ52'$ y c=35
2. $\angle B=11^\circ25'$ y c=101
3. $\angle A=67^\circ23'$ y c=39
4. $\angle A=58^\circ7'$ y a=45

5. ∠A=73°44' y a=36
7. ∠A=61°56' y b=32
9. ∠B=12°41' y b=36
11. a=180 y b=33
13. a=96 y c=146
15. b=12 y c=37
17. ∠B=6°44' y a=144
19. ∠B=43°36' y b=20

6. ∠A=59°29' y b=33
8. ∠A=64°57' y c=85
10. a=13 y b=84
12. a=15 y c=113
14. b=16 y c=65
16. ∠B=26° y a=80
18. ∠B=48°40' y c=22.5

20. Problema de la cuerda de la bandera.
Si necesitas comprar cuerda para el asta de una bandera y observas que la sombra del asta en el piso es 11.6 m. y el ángulo de elevación del sol es de 35°40'. ¿De qué tamaño debes de comprar la cuerda?

21. Problema de la torre de observación.
La torre más alta del mundo mide 553 m. de altura y se encuentra en Toronto, si la sombra que proyecta en el piso mide 1100 metros de longitud ¿Cuál será el ángulo de elevación del sol a esa hora del día?

22. Problema del faro de luz.
Un observador ve desde lo alto de un faro de 60 m. de altura un barco en el agua, con un ángulo de depresión de 12°42' ¿Cuál será la distancia del barco a la torre?

23. Problema de la radioterapia.
Un tubo de rayos gamma es usado para tratar un tumor que se encuentra 5.7 cm. debajo de la piel del paciente, para no dañar un órgano que esta arriba del tumor, el técnico mueve el tubo 8.3 centímetros hacia un lado. ¿Cuál será el ángulo del tubo para que los rayos peguen en el tumor? ¿Cuánto tendrá que viajar el rayo a través de la piel?

24. Problema de la inclinación de la calle.
Cierta persona desea saber cuál es el ángulo de inclinación de una calle. Se da cuenta que los ladrillos de una barda son horizontales con respecto a la calle y mide desde un punto, la distancia horizontal es de 35 cm. y de ahí hacia abajo el ladrillo mide 6 cm. de distancia vertical hacia la calle. ¿Cuál es el ángulo de inclinación?

25. Problema del misil.
Un observador se encuentra a 4.8 km. del lanzamiento de un misil y lo ve ascender.
a. A un determinado tiempo, el ángulo de elevación es 30°25' ¿Qué tan alto está el misil? ¿Qué tan lejos esta del observador?
b. ¿Cuál será el ángulo de elevación cuando el misil alcance 30 km. de altura?

CAPÍTULO 4

TRIGONOMETRÍA
SEGUNDA PARTE

Unos de los principales usos de las funciones trigonométricas es para calcular dimensiones en triángulos rectángulos. Esto puede parecer principalmente de interés académico, pero como verás en las próximas secciones, los tipos de aplicaciones pueden ser bastante modernos.

A menudo en las aplicaciones aparecen datos incompletos sobre los ángulos o longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo, datos cuyos valores son necesarios. Al proceso de determinar las partes restantes de un triángulo rectángulo, si se conocen algunas de ellas, se le llama "resolución de un triángulo rectángulo".

Un triángulo está compuesto básicamente de seis partes, los tres lados y los tres ángulos ; un triángulo rectángulo queda determinado completamente si conoces, aparte del ángulo recto : a) un lado y un ángulo agudo, o b) dos lados.

Así, al resolver triángulos rectángulos harás uso de las funciones trigonométricas, del teorema de Pitágoras y del hecho de que los dos ángulos agudos son complementarios. Usualmente encontrarás ventajoso hacer un bosquejo aproximado del triángulo ; esto te ayudará a determinar que funciones trigonométricas puedes usar para encontrar las partes desconocidas.

5. $\angle A=73°44'$ y $a=36$
7. $\angle A=61°56'$ y $b=32$
9. $\angle B=12°41'$ y $b=36$
11. $a=180$ y $b=33$
13. $a=96$ y $c=146$
15. $b=12$ y $c=37$
17. $\angle B=6°44'$ y $a=144$
19. $\angle B=43°36'$ y $b=20$

6. $\angle A=59°29'$ y $b=33$
8. $\angle A=64°57'$ y $c=85$
10. $a=13$ y $b=84$
12. $a=15$ y $c=113$
14. $b=16$ y $c=65$
16. $\angle B=26°$ y $a=80$
18. $\angle B=48°40'$ y $c=22.5$

20. Problema de la cuerda de la bandera.
Si necesitas comprar cuerda para el asta de una bandera y observas que la sombra del asta en el piso es 11.6 m. y el ángulo de elevación del sol es de 35°40'. ¿De qué tamaño debes de comprar la cuerda?

21. Problema de la torre de observación.
La torre más alta del mundo mide 553 m. de altura y se encuentra en Toronto, si la sombra que proyecta en el piso mide 1100 metros de longitud ¿Cuál será el ángulo de elevación del sol a esa hora del día?

22. Problema del faro de luz.
Un observador ve desde lo alto de un faro de 60 m. de altura un barco en el agua, con un ángulo de depresión de 12°42' ¿Cuál será la distancia del barco a la torre?

23. Problema de la radioterapia.
Un tubo de rayos gamma es usado para tratar un tumor que se encuentra 5.7 cm. debajo de la piel del paciente, para no dañar un órgano que esta arriba del tumor, el técnico mueve el tubo 8.3 centímetros hacia un lado. ¿Cuál será el ángulo del tubo para que los rayos peguen en el tumor? ¿Cuánto tendrá que viajar el rayo a través de la piel?

24. Problema de la inclinación de la calle.
Cierta persona desea saber cuál es el ángulo de inclinación de una calle. Se da cuenta que los ladrillos de una barda son horizontales con respecto a la calle y mide desde un punto, la distancia horizontal es de 35 cm. y de ahí hacia abajo el ladrillo mide 6 cm. de distancia vertical hacia la calle. ¿Cuál es el ángulo de inclinación?

25. Problema del misil.
Un observador se encuentra a 4.8 km. del lanzamiento de un misil y lo ve ascender.
a. A un determinado tiempo, el ángulo de elevación es 30°25' ¿Qué tan alto está el misil? ¿Qué tan lejos esta del observador?
b. ¿Cuál será el ángulo de elevación cuando el misil alcance 30 km. de altura?

CAPÍTULO 4

TRIGONOMETRÍA
SEGUNDA PARTE

Unos de los principales usos de las funciones trigonométricas es para calcular dimensiones en triángulos rectángulos. Esto puede parecer principalmente de interés académico, pero como verás en las próximas secciones, los tipos de aplicaciones pueden ser bastante modernos.

A menudo en las aplicaciones aparecen datos incompletos sobre los ángulos o longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo, datos cuyos valores son necesarios. Al proceso de determinar las partes restantes de un triángulo rectángulo, si se conocen algunas de ellas, se le llama "resolución de un triángulo rectángulo".

Un triángulo está compuesto básicamente de seis partes, los tres lados y los tres ángulos ; un triángulo rectángulo queda determinado completamente si conoces, aparte del ángulo recto : a) un lado y un ángulo agudo, o b) dos lados.

Así, al resolver triángulos rectángulos harás uso de las funciones trigonométricas, del teorema de Pitágoras y del hecho de que los dos ángulos agudos son complementarios. Usualmente encontrarás ventajoso hacer un bosquejo aproximado del triángulo ; esto te ayudará a determinar que funciones trigonométricas puedes usar para encontrar las partes desconocidas.

4.1 Funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera

Objetivo

Encontrar los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo de cualquier magnitud, dado: a) un punto del lado terminal de un ángulo en posición normal o b) el valor de una función trigonométrica junto con información sobre el cuadrante en el que se localiza el ángulo. Encontrar los ángulos de referencia y usarlos para encontrar los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo mayor de 90°

En determinados tipos de problemas como los que hasta ahora hemos estudiado, en los que intervienen rectas y ángulos, estos elementos forman parte de triángulos rectángulos. Pero no siempre es éste el caso y, como veremos en el otro capítulo, es necesario muchas veces resolver triángulos oblicuángulos.

En los triángulos rectángulos los ángulos cuyas funciones trigonométricas hemos utilizado en los cálculos son siempre agudos. Sin embargo, en los triángulos oblicuángulos hay que operar con ángulos obtusos. Se presenta, pues, la necesidad de retomar el concepto de ángulo.

Un "sistema de coordenadas rectangulares" en un plano consiste en dos rectas numéricas perpendiculares entre sí (llamadas ejes), una horizontal y la otra vertical, cuyo punto de intersección (origen) es el cero de cada escala. Se acostumbra escoger la dirección positiva, en la escala horizontal (eje *X*), a la derecha del origen y hacia arriba del origen en la escala vertical (eje *Y*).

Gracias a este sistema, la posición de un punto P en el plano puede darse por medio de sus distancias dirigidas con respecto a estos ejes, a las que son llamadas "coordenadas" del punto. La coordenada *"x"* o abscisa de un punto P (fig. 4.1).

Fig. 4.1

es la distancia dirigida *"x"* desde el eje *Y* hasta el punto P, y la coordenada *"y"* u ordenada es la distancia dirigida *"y"* desde el eje *X* hasta el punto P. Un punto P con una abscisa *"x"* y una ordenada *"y"* se denotará como P*(x, y)*.

Los ejes dividen al plano en cuatro partes llamadas "cuadrantes" y se enumeran en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Los cuadrantes numerados, junto con los signos de las coordenadas de un punto en cada uno de ellos, se muestran en la figura 4.2.

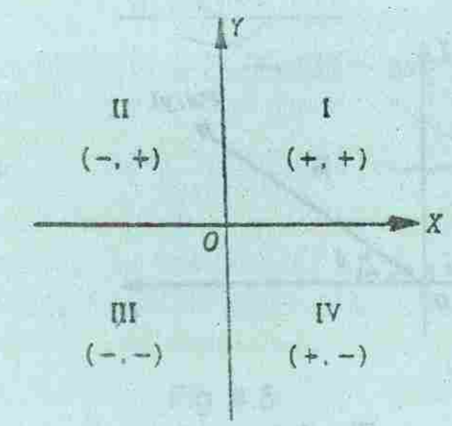


Fig. 4.2

Otra distancia por considerar es la distancia del origen O al punto P. Esta distancia llamada R (figura 4.3), es la "distancia radial" de P. La "distancia radial" de P no es una distancia dirigida, por lo cual siempre es un número no negativo. Utilizando el teorema de Pitágoras se puede determinar R en términos de *"x"* y de *"y"*:

$$R^2 = x^2 + y^2$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

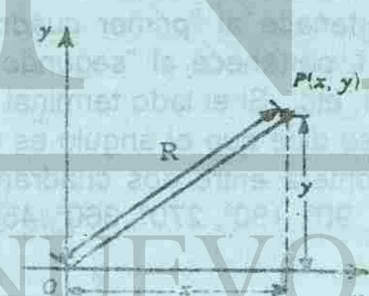


Fig. 4.3

Por lo tanto, a cada punto *P* localizado en un sistema de coordenadas rectangulares, se le asocian tres valores: *"x"*, *"y"* y R.

A un punto P se le asocia también un cuarto valor, θ, donde θ es la medida de un ángulo dirigido (positivo, si se mide en contra de las manecillas del reloj y negativo, si se mide a favor)

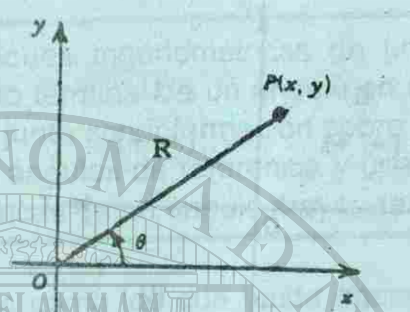


Fig. 4.4

Este ángulo tiene como lado inicial la parte positiva del eje X y como lado terminal el rayo que sale del origen O y que pasa por el punto P (Fig. 4.4) observa que no hay un único valor de θ para cada punto P; de hecho, hay un número ilimitado de valores de θ que pueden asociarse a cada punto P, que pueden encontrarse agregando múltiplos enteros de 360° al valor del ángulo especifico.

Con respecto a un sistema de coordenadas rectangulares, se dice que un ángulo se encuentra en "posición normal", cuando su vértice está en el origen y su lado inicial coincide con el eje positivo *X*.

Un ángulo en posición normal pertenece al "primer cuadrante" cuando su lado terminal cae dentro del cuadrante I, pertenece al "segundo cuadrante" si su lado terminal cae dentro del cuadrante II, etc. Si el lado terminal de un ángulo coincide con uno de los ejes coordenados, se dice que el ángulo es un "ángulo cuadrantal" (ya que el lado terminal es una frontera entre dos cuadrantes adyacentes). Por ejemplo, los ángulos situados en 0°, 90°, 180°, 270°, 360°, 450°, 540°, 630°; etc. son cuadrantales.

Observa que R puede rotar, ya sea en la dirección en que giran las manecillas del reloj, o bien en la dirección contraria hacia el punto P. También R puede rotar dando una o más vueltas completas hasta llegar al punto P.

Los ángulos de medidas distintas pero con el mismo lado terminal se llaman "ángulos coterminales". Los ángulos son coterminales si sus lados terminales coinciden al estar los ángulos en posición normal. La figura 4.5 muestra tres ángulos coterminales:

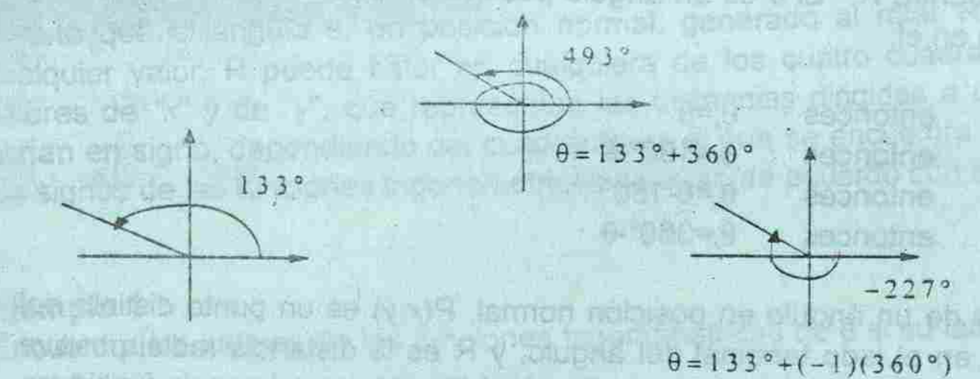


Fig. 4.5

Para dibujar un ángulo en posición normal y localizar R exactamente, nos podemos auxiliar encontrando el ángulo agudo entre el eje *X* (parte positiva o negativa) y el lado terminal R del ángulo dado. A este ángulo se le llama "ángulo de referencia" (θ_r). La figura 4.6 muestra ángulos de referencia para algunos valores de θ

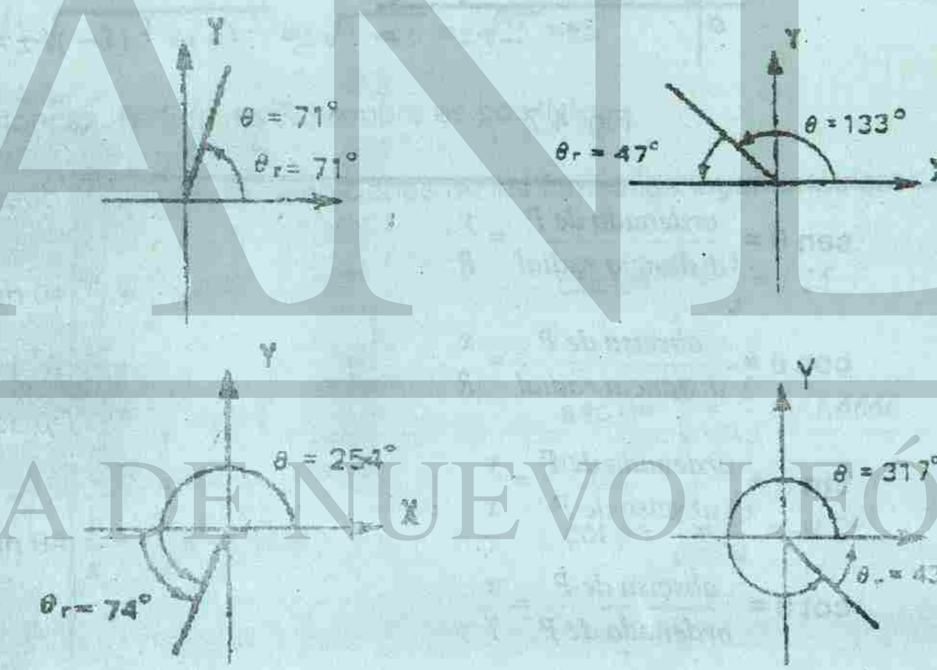


Fig. 4.6

En general, el valor del ángulo de referencia de un ángulo depende del cuadrante en el que se encuentre R. Si θ es un ángulo positivo en posición normal y el lado terminal de θ está en el:

Cuadrante I,	entonces	$\theta_r=\theta$
Cuadrante II,	entonces	$\theta_r=180°-\theta$
Cuadrante III,	entonces	$\theta_r=\theta-180°$
Cuadrante IV,	entonces	$\theta_r=360°-\theta$

Si θ es la medida de un ángulo en posición normal, P(*x*,*y*) es un punto distinto del origen localizado en el lado terminal del ángulo, y R es la distancia radial positiva desde O hasta P (como se muestra en la Figura 4.7), entonces las seis funciones trigonométricas definidas ahora en términos de la abscisa, la ordenada y la distancia radial del punto P, queda como sigue:

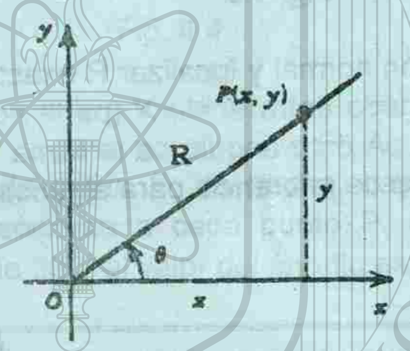


Fig. 4.7

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\text{ordenada de } P}{\text{distancia radial}} = \frac{y}{R}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{abscisa de } P}{\text{distancia radial}} = \frac{x}{R}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{ordenada de } P}{\text{abscisa de } P} = \frac{y}{x}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{abscisa de } P}{\text{ordenada de } P} = \frac{x}{Y}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{distancia radial}}{\text{abscisa de } P} = \frac{R}{x}$$

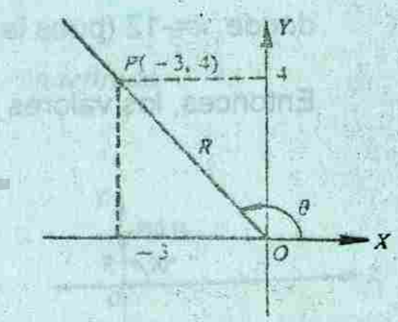
$$\csc\theta = \frac{\text{distancia radial}}{\text{ordenada de } P} = \frac{R}{y}$$

Puesto que el ángulo θ, en posición normal, generado al rotar R, puede tomar cualquier valor, R puede estar en cualquiera de los cuatro cuadrantes. Así, los valores de "x" y de "y", que representan las distancias dirigidas a un punto en R, varían en signo, dependiendo del cuadrante en el que se encuentra R; por lo tanto, los signos de las funciones trigonométricas variarán de acuerdo con esto.

Ejemplo 1
Encuentra los valores de las funciones trigonométricas de θ si su lado terminal para por (-3,4)

Solución :

Primero se determina la distancia, R:



$R^2=x^2+y^2$

$R=\sqrt{x^2+y^2}$

$R=\pm\sqrt{(-3)^2+(4)^2}=\pm\sqrt{9+16}=\pm\sqrt{25}=\pm5$

entonces, R=5 (pues R siempre es positiva).

Luego utilizando las definiciones de las funciones trigonométricas:

$\text{sen}\,\theta=\frac{y}{R}=\frac{4}{5}=0.8$ $\qquad$ $\csc\theta=\frac{R}{y}=\frac{5}{4}=1.25$

$\cos\theta=\frac{x}{R}=\frac{-3}{5}=-0.6$ $\qquad$ $\sec\theta=\frac{R}{x}=\frac{5}{-3}=-1.6666$

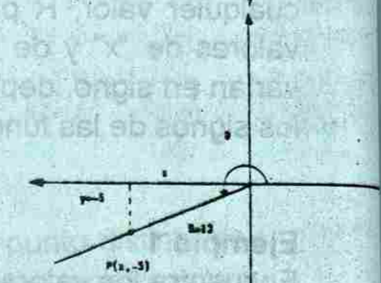
$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{4}{-3}=-1.3333$ $\qquad$ $\cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{-3}{4}=-0.75$

Ejemplo 2

Encuentra los valores de las cinco funciones trigonométricas restantes de θ, si θ está en posición normal en el tercer cuadrante y sen θ= $-\frac{5}{13}$

Solución :

Como sabemos que sen $\theta = \frac{y}{R}$ y sen $\theta = -\frac{5}{13}$ $\left(\frac{y}{R} = -\frac{5}{13}\right)$ entonces, y=-5 y R=13; luego, utilizando el teorema de Pitágoras, para determinar la abscisa, x:



$R^2=x^2+y^2$

$x=\sqrt{R^2-y^2}$

$x=\pm\sqrt{(13)^2-(-5)^2} = \pm\sqrt{169-25} = \pm\sqrt{144} = \pm 12$

donde: x=-12 (pues la abscisa de un punto en el tercer cuadrante es negativo).

Entonces, los valores de las demás funciones serán:

csc $\theta = \frac{R}{y} = \frac{13}{-5} = -2.6$

cos $\theta = \frac{x}{R} = \frac{-12}{13} = -0.9231$ sec $\theta = \frac{R}{x} = \frac{13}{-12} = -1.0833$

tan $\theta = \frac{y}{x} = \frac{-5}{-12} = 0.4167$ cot $\theta = \frac{x}{y} = \frac{-12}{-5} = 2.4$

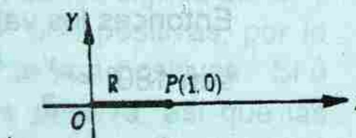
Ejemplo 3

Encuentra los valores de las funciones trigonométricas de θ si su lado terminal pasa por:

a) (1,0) b) (0,1) c) (-1,0) d) (0,-1)

Solución :

a) El lado terminal coincide con la parte positiva del eje X, por lo tanto, θ es el ángulo cuadrantal de O°; donde: x=1 y y=0



$R=\sqrt{x^2+y^2} = \pm\sqrt{(1)^2+(0)^2} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

R= 1

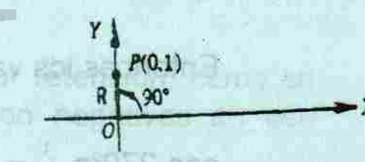
Entonces los valores de las funciones de 0° son:

sen 0°= $\frac{y}{R} = \frac{0}{1} = 0$ csc 0°= $\frac{R}{y} = \frac{1}{0}$ = *indefinido*

cos 0°= $\frac{x}{R} = \frac{1}{1} = 1$ sec 0° = $\frac{R}{x} = \frac{1}{1} = 1$

tan 0°= $\frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$ cot 0°= $\frac{x}{y} = \frac{1}{0}$ = *indefinido*

b) El lado terminal coincide con la parte positiva del eje Y, por lo tanto,θ es el ángulo cuadrantal de 90°; donde: x=0 y y=1



$R=\sqrt{x^2+y^2} = \pm\sqrt{(0)^2+(1)^2} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

R= 1

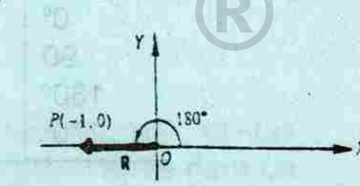
Entonces los valores de las funciones de 90° son:

sen 90° = $\frac{y}{R} = \frac{1}{1} = 1$ csc 90° = $\frac{R}{y} = \frac{1}{1} = 1$

cos 90° = $\frac{x}{R} = \frac{0}{1} = 0$ sec 90° = $\frac{R}{x} = \frac{1}{0}$ = *indefinido*

tan 90° = $\frac{y}{x} = \frac{1}{0}$ = *indefinido* cot 90° = $\frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0$

c) El lado terminal coincide con la parte negativa del eje X, por lo tanto, θ es el ángulo cuadrantal de 180°; donde: x=-1 y y=0



$R=\sqrt{x^2+y^2} = \pm\sqrt{(-1)^2+(0)^2} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

R = 1

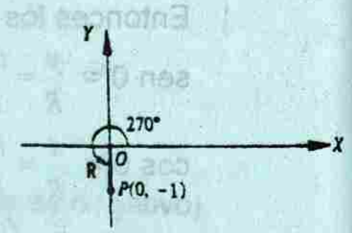
Entonces los valores de las funciones de 180° son:

$\text{sen } 180° = \frac{y}{R} = \frac{0}{1} = 0$ $\qquad$ $\csc 180° = \frac{R}{y} = \frac{1}{0} = \text{indefinido}$

$\cos 180° = \frac{x}{R} = \frac{-1}{1} = -1$ $\qquad$ $\sec 180° = \frac{R}{x} = \frac{1}{-1} = -1$

$\tan 180° = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$ $\qquad$ $\cot 180° = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0} = \text{indefinido}$

d) El lado terminal coincide con la parte negativa del eje *Y*, por lo tanto, θ es el ángulo cuadrantal de 270°; donde $x=0$ y $y=-1$



$R = \sqrt{x^2+y^2} = \pm\sqrt{(0)^2+(-1)^2} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

R=1

Entonces los valores de las funciones de 270° son:

$\text{sen } 270° = \frac{y}{R} = \frac{-1}{1} = -1$ $\qquad$ $\csc 270° = \frac{R}{y} = \frac{1}{-1} = -1$

$\cos 270° = \frac{x}{R} = \frac{0}{1} = 0$ $\qquad$ $\sec 270° = \frac{R}{x} = \frac{1}{0} = \text{indefinido}$

$\tan 270° = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0} = \text{indefinido}$ $\qquad$ $\cot 270° = \frac{x}{y} = \frac{0}{-1} = 0$

Por lo tanto, los resultados obtenidos en el ejemplo 3 se pueden resumir en la tabla 3 siguiente:

	senθ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
0°	0	1	0	--	1	--
90	1	0	--	0	--	1
180°	0	-1	0	--	-1	--
270°	-1	0	--	0	--	-1

Tabla 3

Los signos asociados a los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo dependen del cuadrante en el que encuentre el lado final del ángulo. El valor de R

siempre es positivo; así los signos de las funciones dependen de los signos de *"x"* y de *"y"*. Si θ está en el primer cuadrante, tanto *"x"* como *"y"* son positivas; por lo tanto, todas las razones trigonométricas en el primer cuadrante son positivas. Si θ está en el segundo cuadrante, el *"x"* es negativa y la *"y"* es positiva; así que las razones en las que aparezca *"x"* son negativas y las demás positivas. Por lo tanto, en el cuadrante II únicamente son positivas el seno y el cosecante, y el coseno, la tangente, la cotangente y la secante son negativas. Después de analizar los signos de las funciones para cada cuadrante, podemos resumir los resultados en la Tabla 4.

	senθ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
I	+	+	+	+	+	+
II	+	-	-	-	-	+
III	-	-	+	+	-	-
IV	-	+	-	-	+	-

Tabla 4

También se pueden resumir estos resultados, para su mayor retención, como se muestra en Figura 4.8 (las funciones que no aparecen son negativas en ese cuadrante).

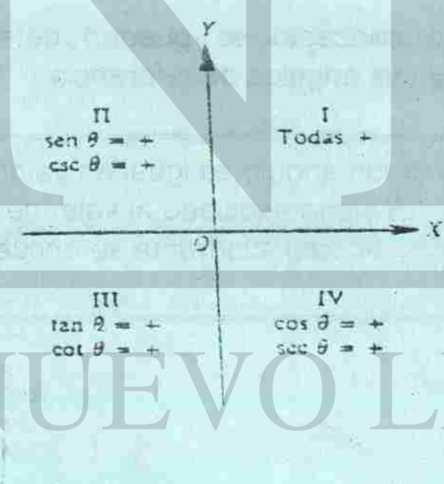


Fig. 4.8

Es evidente que las definiciones de las funciones trigonométricas son válidas independientemente del cuadrante en el que se encuentre R y sus valores para un ángulo dado, también son independientes del punto P en su lado terminal; pero los diagramas de la Figura 4.9, demuestran que los valores de las funciones trigonométricas para un ángulo θ cambian de acuerdo con el valor de θ y están relacionados con el valor de las funciones del ángulo de referencia (θ_r) correspondiente.

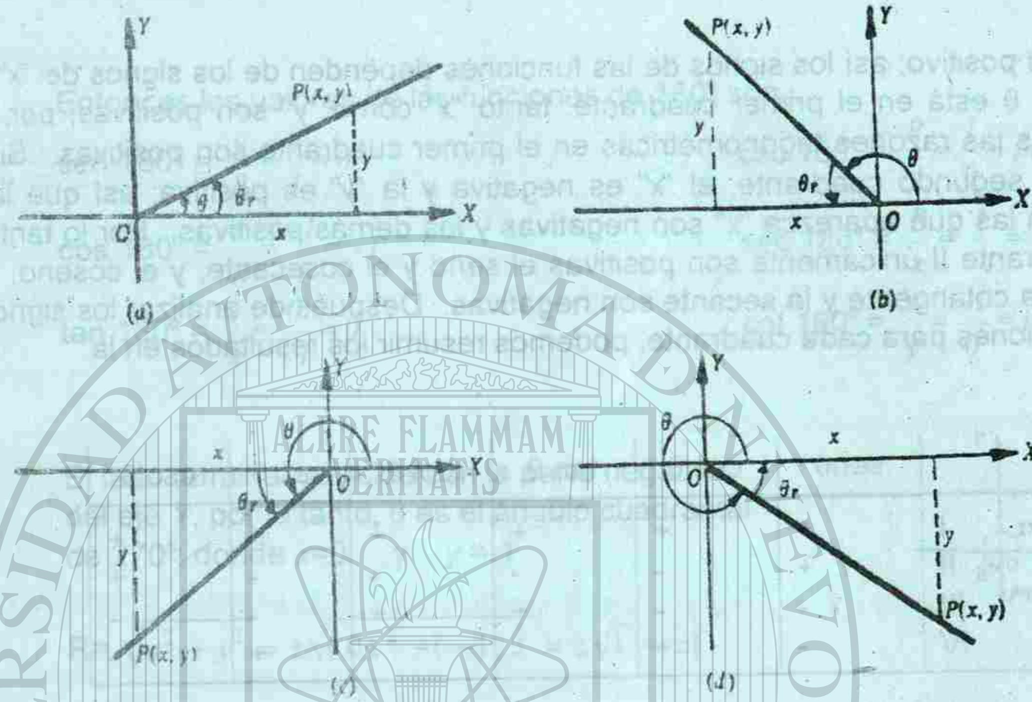


Fig. 4.9

Haciendo uso de este último concepto se pueden determinar las funciones trigonométricas de los ángulos y sus ángulos de referencia.

Cualquier función trigonométrica de un ángulo es igual en valor absoluto, al mismo valor de su ángulo de referencia. El signo asociado al valor de cada función trigonométrica se determina viendo en cuál cuadrante se encuentra el lado terminal del ángulo dado.

Por ejemplo
$|\text{sen } \theta| = \text{sen } \theta_r$

o bien,
$\text{sen } \theta = \pm \text{ sen } \theta_r$

Este procedimiento se puede aplicar a todas las funciones trigonométricas en todos los cuadrantes, por lo que el concepto anterior se puede aplicar a cualquier ángulo entre 0° y 360°. Por lo demás, si el ángulo es mayor de 360° o menor de 0° (ángulo

Ejemplo 4

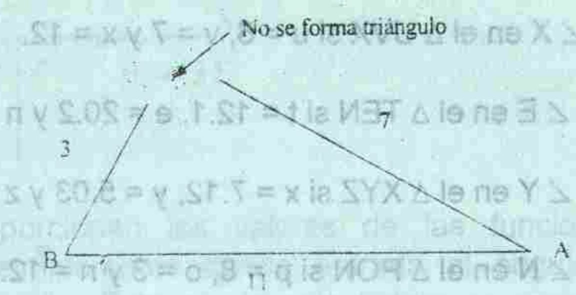
En el Δ ABC si a = 3, b = 7 y c = 11. Encuentra ∠ C.

Solución :

Aplicando la Ley de los Cosenos :

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \text{ Cos C}$

Despejando Cos C tenemos :



$$\text{Cos C} = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}$$

$$\text{Cos C} = \frac{(11)^2 - (3)^2 - (7)^2}{-2(3)(7)}$$

$$\text{Cos C} = \frac{121 - 9 - 49}{-42}$$

$$\text{Cos C} = \frac{63}{-42} = -1.5$$

Nota: Como el coseno sólo tiene valores entre -1 y 1 inclusive, esto quiere decir que el triángulo no se cierra, o sea no se forma, por lo que no hay solución en este caso.

Ejercicio 4.2

Para los siguientes problemas encuentra el lado opuesto al ángulo dado.

1. En el Δ ABC si b = 4, c = 5 y ∠A = 50°
2. En el Δ ABC si a = 7, c = 9 y ∠ B = 35°
3. En el Δ PQR si p = 3, q = 2 y ∠ R = 136°
4. En el Δ HJK si h = 8, j = 6.1 ∠ K = 172° 15'
5. En el Δ DEF si d = 35.3, f = 47.8 y ∠ E = 65° 40'
6. En el Δ BAD si a = 2.99, d = 5.92 y ∠ B = 119° 22'

Para los siguientes problemas encuentra el ángulo que se te indica

7. $\angle$ A en el Δ ABC si a = 2, b = 3 y c = 4.

8. $\angle$ F en el Δ DEF si d = 5, e = 6 y f = 8.

9. $\angle$ X en el Δ UVX si u = 6, v = 7 y x = 12.

10. $\angle$ E en el Δ TEN si t = 12.1, e = 20.2 y n = 16.3.

11. $\angle$ Y en el Δ XYZ si x = 7.12, y = 5.03 y z = 13.34.

12. $\angle$ N en el Δ PON si p = 8, o = 3 y n = 12.

4.3 Área de un Triángulo

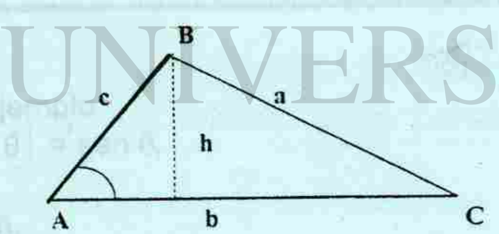
Objetivo :

Dada la medida de dos lados y el ángulo incluido, encuentra el área del triángulo.

De geometría puedes recordar que el área de un triángulo es : (Fig. 4.11)

$$\text{Área} = \frac{1}{2}bh$$

Donde b = base y h = altura



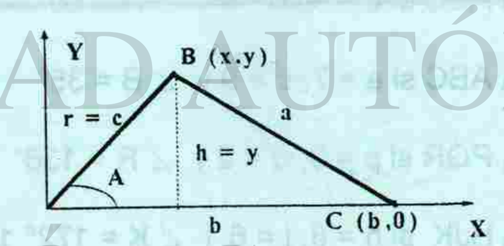
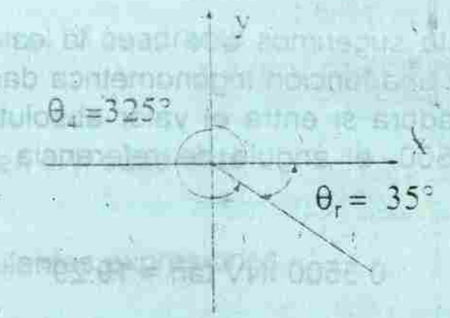


Figura 4.11

Si conoces los lados *b* y *c* y la medida del ángulo *A* puedes calcular la altura *h*. Construyendo el punto cartesiano *xy*. El punto *B(x,y)* se convierte en un punto en el sistema cartesiano. Por la definición de seno.

Para la solución del cuarto cuadrante:
$\theta_4 = 360° - 35° = 325°$



La mayoría de las calculadoras proporcionan los valores de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo, simplemente dando entrada al ángulo y oprimiendo el botón de "función" apropiado. Esto es, la calculadora se toma el trabajo de encontrar funciones trigonométricas para ángulos que no son agudos.

Ejemplo 6

Utiliza la calculadora para encontrar: sen 192°

Solución:

En la calculadora puede evaluarse sen 192° poniendo simplemente la calculadora en el modo grados, dando entrada a 192 y oprimiendo el botón **sin**. En la pantalla se leerá -0.20791. Por lo tanto.

$$\text{sen } 192° = -0.2079$$

Notarás que cuando se usa una calculadora para encontrar un ángulo, cuando se conoce el valor de su función trigonométrica, se obtiene solamente un ángulo. Por ejemplo, si sen θ = -0.5, tu calculadora dará solamente el $\angle\theta$ = -30°. Sin embargo, si cos θ = -0.5, tu calculadora dará el $\angle\theta$ = 120°. La razón por la que obtenemos un ángulo agudo negativo en el primer caso y un ángulo obtuso positivo en el segundo es porque, por ejemplo, si quisiéramos encontrar el valor de θ para el cual tan θ = 1, desafortunadamente hay una infinidad de valores de θ, que satisfacen esta condición, algunos de los cuales son: 45°, 225°, 405°, 585°, 765°, 945°, etc., también, -135°, -315°, -495°, -675°, etc.; deberás estar consciente de las dificultades inherentes que representa para la calculadora resolver la ecuación tan θ = 1, ¿qué valor desplegaría en la pantalla como solución? Para evitar esta ambigüedad la calculadora restringe el dominio de tan θ al intervalo entre 0° y 180° o entre, 0° y -180°. Entonces, θ = 45°, que es el único valor de θ para el cual tan θ = 1. La situación descrita para la función tangente es cierta también para las demás funciones trigonométricas y los valores del dominio a los cuales se limita así una función trigonométrica se llaman "valores principales" de la función.

Sobre el dominio de valores principales, ecuaciones tales como sen $\theta = -0.5$, o $\cos\theta = -0.5$ tienen solamente una solución posible.

Para evitar confusiones, te sugerimos que uses la calculadora para encontrar el ángulo de referencia para una función trigonométrica dada. El ángulo de referencia se obtendrá de la calculadora si entra el valor absoluto de la función dada. Por ejemplo, si tan $\theta = -0.3500$, el ángulo de referencia se encuentra presionando 0.3500. Esto es:

$$0.3500 \text{ INV tan} = 19.29^\circ$$

Los ángulos deseados se encuentran ahora mediante el procedimiento descrito previamente, esto es $\theta_{II} = 180^\circ - 19.29^\circ = 160.29^\circ$ y $\theta_{IV} = 360^\circ - 19.29^\circ = 340.71^\circ$

Ejemplo 7

Encuentra los valores de θ tales que $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ si: sen$\theta = -0.5664$

Solución

Introduciendo el valor absoluto de la función y presionando las teclas INV sin. El ángulo de referencia resultante es:

$$0.5664 \text{ INV sin} = 34.5^\circ$$

Ahora, puesto que el seno es negativo en el tercero y en el cuarto cuadrante, obtenemos:

$$\theta_{III} = 180^\circ + 34.5^\circ = 214.5^\circ$$

$$\theta_{IV} = 360^\circ - 34.5^\circ = 325.5^\circ$$

Ejercicio 4.1

En los problemas 1 y 2 encuentra el valor de las funciones trigonométricas del ángulo θ si su lado final pasa por:

1. (15,8)
2. (-7,-24)

En qué cuadrante quedaría localizado θ si:

3. sen θ es negativo y cos θ es positivo
4. sen θ y cos θ son negativos
5. sen θ es positivo y tan θ es negativo
6. sen θ y tan θ son positivos

Encuentra los valores de las demás funciones trigonométricas de θ, dado:

7. $\cos\theta = \frac{12}{35}$ y θ está en el IV cuadrante

8. $\tan\theta = -\frac{21}{20}$ y θ está en el II cuadrante

Evalúa cada una de las siguientes expresiones:

9. sen 0°+2 cos 0°+ 3 sen 90°+4 cos 90°+ 5 sec 0°+ 6 csc 90°

10. sen 180°+ 2 cos 180° + 3 sen 270° + 4 cos 270°- 5 sec 180°- 6 csc 270°

11. tan 180°-2 cos 180° + 3 csc 270° + sen 90°

12. sen 0° + 3 cot 90° + 5 sec 180° - 4 cos 270°

13. 4 cos(π/2) - 5 sen(3π/2) - 2 sen(π/2) + sen 0

14. 3 sen π + 4 cos 0 - 3 cos π + sen(π/2)

Expresa cada una de las funciones del ángulo dado, como la misma función de su ángulo de referencia y encuentra el valor de la función.

15. cot 147°
16. sec 333°
17. csc 233°
18. cos 100°
19. tan 590°
20. sen 1000°
21. cos (-345°)
22. sen (-965°)

Dado el valor de la función, encuentra la medida del ángulo θ, si $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$

23. $\cos\theta = 0.6157$
24. $\tan\theta = -1.376$
25. sen $\theta = 0.4014$
26. $\sec\theta = -1.035$

27. Utiliza los valores de los ángulos especiales cuadrantales y el concepto del ángulo de referencia para encontrar los valores de las seis funciones trigonométricas de los ángulos: 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°, 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330° y 360° sin usar la calculadora o las tablas.

θ	sen θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
0°						
30°						
45°						
60°						
90°						
120°						
135°						
150°						
180°						
210°						
225°						
240°						
270°						
300°						
315°						
330°						
360°						

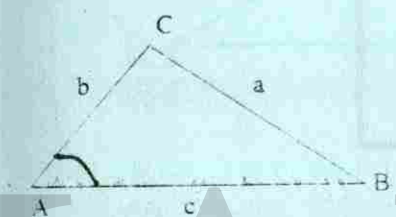
4.2 Triángulos Oblicuángulos - Ley de los Cosenos

Ahora aprenderás a resolver triángulos que no son rectángulos ; a estos les llamaremos triángulos oblicuángulos.

Objetivos

1. Dados dos lados y el ángulo incluido, encontrar la longitud del tercer lado.
2. Dados tres lados de un triángulo, encontrar la medida de un ángulo específico.

Supón que la longitud de los lados b y c del Δ ABC son conocidos, así como también la medida del ángulo incluido $\angle$ A se conoce (fig 4.10). Entonces se puede encontrar la medida del tercer lado.



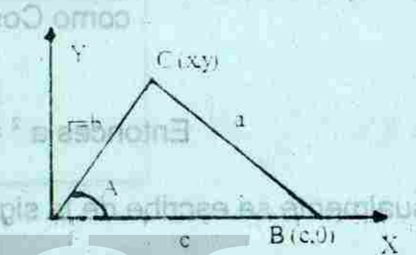


Figura 4.10

Si construyes un sistema coordenado xy con el ángulo A en posición estándar ; entonces **a** es la distancia entre los puntos B (c,0) y C (x, y). Con la fórmula de la distancia tenemos : $a^2 = (x - c)^2 + (y - 0)^2$

Para obtener a^2 en términos de b y c y el ángulo A, sólo tienes que observar que A es el ángulo y b es el radio del punto C (x, y). Por definición de seno y coseno

$$\text{Cos } A = \frac{x}{b} \quad y \quad \text{Sen } A = \frac{y}{b}$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por b, obtienes:

$$x = b \text{ Cos } A \quad y \quad y = b \text{ Sen } A$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula anterior de la distancia tenemos :

$$a^2 = (b \text{ Cos } A - c)^2 + (b \text{ Sen } A - 0)^2$$

Elevando al cuadrado los binomios,

$$a^2 = b^2 Cos^2 A - 2bc\ Cos\ A + c^2 + b^2\ Sen^2 A$$

Asociando $Sen^2 A + Cos^2 A$ y teniendo de factor común la b^2.

$$a^2 = b^2 (Cos^2 A + Sen^2 A) - 2bc\ Cos\ A + c^2$$

como $Cos^2 A + Sen^2 A = 1$

Entonces $a^2 = b^2 - 2bc\ Cos\ A + c^2$

El cuál usualmente se escribe de la siguiente manera :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{LEY DE LOS COSENOS}\\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ Cos\ A\end{array}}$$

Esta ecuación es llamada Ley de los Cosenos porque en ella aparece el coseno del ángulo. Si el ángulo A es igual a 90°, entonces el Cos A = 0 y la Ley de los Cosenos se reduce a :

$$a^2 = b^2 + c^2$$

el cual es el Teorema de Pitágoras.

De igual manera la Ley de los Cosenos se puede escribir de las siguientes formas si son dados otros datos :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ Cos\ B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ Cos\ C$$

$$\frac{y}{r} = Sen A$$

$$y = r Sen A$$

Multiplicando ambos miembros por *r*

Como $h = y$ y $c = r$ entonces sustituyendo tenemos

$$h = c\ Sen\ A$$

Sustituyendo *h* en la ecuación del área, entonces:

$$\boxed{Area = \frac{1}{2} bc\ Sen\ A}$$

Ejemplo 1

Encuentra el área del triángulo $\triangle ABC$ si b=13, c=15 y $\angle A$= 70°

Solución:

Aplicando la formula.

$$Area = \frac{1}{2}(13)(15)\ Sen\ 70°$$

$$Area = \frac{1}{2}(13)(15)(0.9397)$$

<u>Área = 91.62</u>

Ejemplo 2

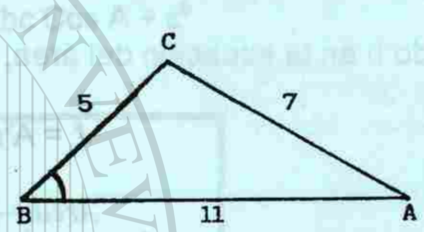
Encuentra el área del Δ ABC si a= 5, b= 7.

Solución :

Primero tienes que encontrar uno de los ángulos, utilizando la ley de los cosenos.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \text{ Cos B}$$

Despejando



$$2ac \text{ Cos B} = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\text{Cos B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\text{Cos B} = \frac{(5)^2 + (11)^2 - (7)^2}{2(5)(11)}$$

$$\text{Cos B} = \frac{25 + 121 - 49}{110}$$

$$\text{Cos B} = \frac{97}{110}$$

$$\text{Cos B} = 0.8818$$

$$\angle B = 28°08'$$

Aplicando la ecuación del área.

$$Area = \frac{1}{2}\, ac \text{ Sen } B$$

$$A = \frac{1}{2}(5)(11) \text{ Sen } 28°08'$$

$$\text{Área} = 12.96$$

Ejercicio 4.3

Para los siguientes problemas encuentre el área de cada triángulo.

1. Δ *ABC*, si *a*= 6, *b*= 10 y $\angle$ *C*= 15°.
2. Δ *ABC*, si *b*= 8, *c*=4 y $\angle$ *A*= 66°
3. Δ *DEF*, si *d*= 4.8, *f*= 3.7 y $\angle$ *E*= 43°12'
4. Δ *XYZ*, si *y*= 34.28, *z*= 28.35 y $\angle$ *X*= 138°25'
5. Δ *ABC*, si *a*= 6, *b*= 9, *c*= 13
6. Δ *ABC*, si *a*= 5.1, *b*= 12.2, *c*= 13.3

4.4 Triángulo Oblicuángulo - Ley de los Senos.

La Ley de los Cosenos puede ser usada directamente cuando conoces dos lados y el ángulo incluido. Si solo conoces un lado, la Ley de los Cosenos no puede ser usada; para este caso se utilizará la Ley de los Senos.

Objetivo

Dada la medida de un ángulo, su lado opuesto y la medida de otro ángulo, calcular la longitud de un lado.

En secciones anteriores aprendiste que el área de un triángulo tal como el ΔABC (Fig. 4.12) es :

$$\text{Área} = \frac{1}{2} bc \text{Sen} A$$

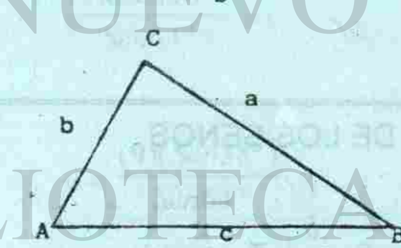


Fig. 4.12

El área también es igual a $\frac{1}{2}acSenB$ y $\frac{1}{2}abSenC$ como el área es constante, no importa el lado del triángulo que uses para medirla. Igualando estas expresiones obtienes:

$$\frac{1}{2}bcSenA = \frac{1}{2}acSenB = \frac{1}{2}abSenC$$

Multiplicando todos los miembros por 2 y dividiendo por abc nos queda:

$$\frac{2bcSenA}{2abc} = \frac{2acSenB}{2abc} = \frac{2abSenC}{2abc}$$

Eliminando términos semejantes:

LEY DE LOS SENOS

$$\frac{SenA}{a} = \frac{SenB}{b} = \frac{SenC}{c}$$

Esta formula es llamada la Ley de los Senos y es igual al seno del ángulo dividido entre su lado opuesto. Esta formula también puede ser escrita de la siguiente manera:

LEY DE LOS SENOS

$$\frac{a}{SenA} = \frac{b}{SenB} = \frac{c}{SenC}$$

Solo se invierten los numeradores y denominadores.

Los siguientes ejemplos te muestran cómo usar éstas formulas.

Ejemplo 1

Dados dos ángulos y un lado encontrar los otros lados

En el ΔABC, $\angle B = 64°$, $\angle C = 38°$ y lado b=9. encontrar lado c. y lado a. (Fig. 4.13)

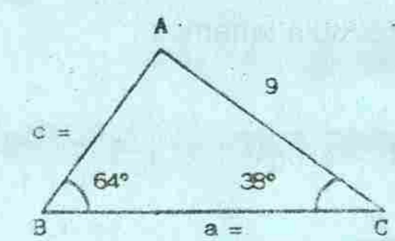


Fig. 4.13

Solución :

Sustituyendo los datos en la fórmula tenemos:

$$\frac{a}{SenA} = \frac{9}{Sen64°} = \frac{c}{Sen38°}$$

Como se puede observar, nos conviene tomar las dos últimas partes de la fórmula, ya que así. tendremos tres datos y sólo una incógnita.

$$\frac{9}{Sen64°} = \frac{c}{Sen38°}$$

Despejando c tenemos:

$$\frac{(9)(Sen38°)}{Sen64°} = c$$

o sea

$$c = \frac{(9)(Sen38°)}{Sen64°}$$

$$c = \frac{(9)(0.6157)}{0.8988}$$

Encontrando los valores

$\underline{c= 6.165}$

Haciendo operaciones y redondeando a tres cifras.

Para encontrar el lado *a*, primero tienes que encontrar el $\angle A$, entonces:

$$\angle A= 180° - 38° - 64° = 78°$$

Usando los dos primeros tramos de la fórmula tenemos:

$$\frac{a}{Sen78°} = \frac{9}{Sen64°}$$

Despejando a.

$$a = \frac{(9)(Sen78°)}{Sen64°}$$

Tomando los valores de los senos y haciendo operaciones

$$a= \frac{(9)(0.9781)}{0.8988}$$

$\underline{a= 9.794}$

Ejemplo 2

Dados dos ángulos y un lado encontrar otro lado.

En el Δ *ABC*, *a*=8, $\angle B$= 64° y $\angle$ C= 38°, encuentre lado *b* (Fig. 4.14)

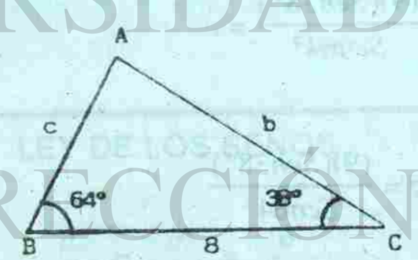


Fig. 4.14

Solución

Sustituyendo los datos en la fórmula.

$$\frac{8}{SenA} = \frac{b}{Sen64°} = \frac{c}{Sen38°}$$

Para poder usar la fórmula tenemos que encontrar primero el $\angle A$ (para tener tres datos y una incógnita)

$$\angle A= 180° - 64° - 38° = 78°$$

Así, usando las dos primeras partes de la fórmula tenemos:

$$\frac{8}{Sen78°} = \frac{b}{Sen64°}$$

Despejando *b*

$$b= \frac{(8)(Sen64°)}{Sen78°}$$

$$b= \frac{(8)(0.8988)}{0.9781}$$

$\underline{b= 7.351}$ Redondeando a tres cifras.

El siguiente ejercicio esta diseñado para que practiques la Ley de los Senos.

Ejercicio 4.4

Resuelve los siguientes problemas.

1. En Δ *ABC*, $\angle$ *A*= 54°, $\angle$ *B*= 30° y lado a= 9, encuentra:
   a. Lado b.

   b. Lado c.

2. En Δ PQR, $\angle$ P= 15°, $\angle$ Q= 130° y lado q= 9, encuentra:

   a. Lado p.

   b. Lado r.

3. En Δ AHS, $\angle$ A= 29°, $\angle$ H= 107°, lado a= 112, encuentra:

   a. Lado h.

   b. Lado s.

4. En Δ BIG, $\angle$ B= 2°, $\angle$ I= 79°, lado b= 20, encuentra:

   a. Lado i.

   b. Lado g.

5. En Δ PAF, $\angle$ P= 28°15', $\angle$ A= 117°30' y lado f= 8, encuentra:

   a. Lado a.

   b. Lado p.

6. En Δ JAW , $\angle$ J= 48°12', $\angle$ W= 73°27' y lado a= 5, encuentra:

   a. Lado j.

   b. Lado w.

7. En Δ ALP, $\angle$ A= 85°40', $\angle$ L= 87°50' y lado p= 30, encuentra:

   a. Lado a.

   b. Lado l.

8. Problema de los tres lados.

   La Ley de los Senos puede ser usada para conocer la medida de un ángulo pero para este caso primero tienes que usar la Ley de los Cosenos. Dados tres lados encontrar los ángulos.
   En el Δ ABC si lado a= 7, lado b= 4, lado c= 10 encuentra los ángulos.

   a. Usa la Ley de los Cosenos para encontrar el $\angle$ A.

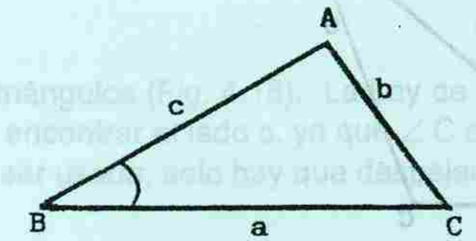
   b. Usa la respuesta anterior y con la Ley de los Senos encuentra el $\angle$ C.

   c. Encuentra otra vez el $\angle$ C, pero ahora usando la Ley de Cosenos.

   d. Probablemente las respuestas de b y c no sean iguales, explica porqué.

4.5 Los casos ambiguos

Ahora resolverás un triángulo cuando tenemos de datos conocidos dos lados y un ángulo no comprendido (Fig. 4.15)



Datos: lado a, lado b, $\angle$ B

Fig. 4.15

Hay 4 formas de que un triángulo ABC puede resolverse si conoces los lados a, b y el ángulo B. Para que veas porqué, es útil construir un triángulo. La figura 4.16 muestra el lado a y el ángulo B construido.

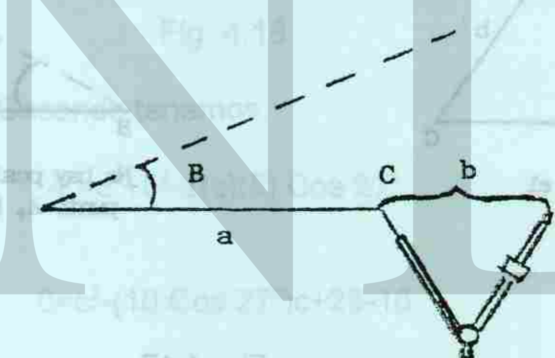


Fig. 4.16

Como el lado c no esta dado, simplemente dibuja una línea punteada en la dirección correcta, formando en ángulo B con el lado a. Luego para completar el triángulo, pon un compás en el punto c con una abertura igual al del lado b, y después traza su arco, donde el arco del compás toque la línea punteada, ahí será la posición correcta del punto A. La figura 4.17 muestra como hay cuatro formas posibles de trazar el punto A.

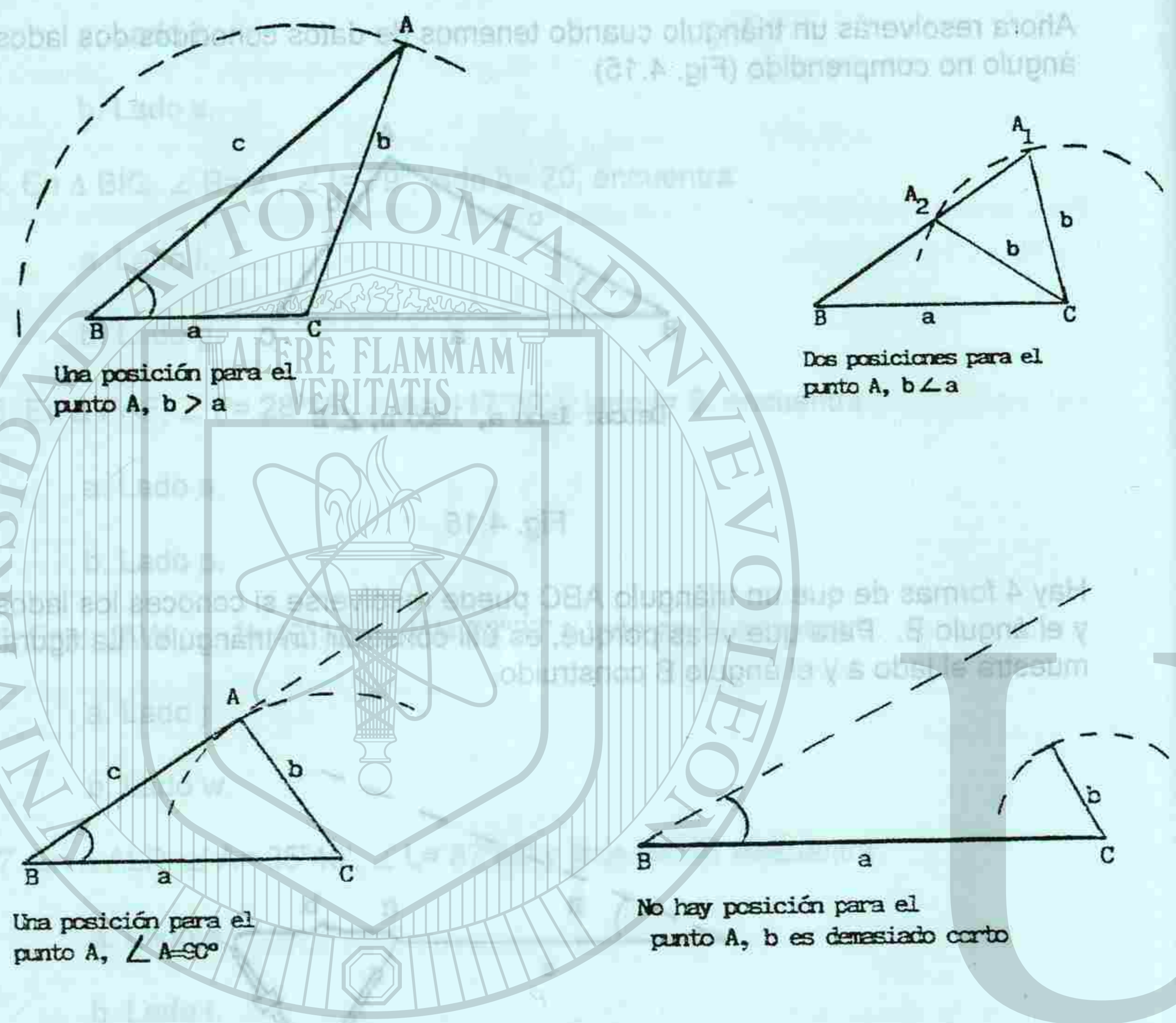


Fig. 4.17

Triángulos posibles dados, lado a, lado b y el ∠ B

Hay uno, dos o ningún posible triángulo cuando son dados dos lados y el ángulo no comprendido, es por esta razón que se llaman casos ambiguos. Ambiguo significa dos o más posibles significados.

Objetivo

Dados dos lados y el ángulo no comprendido. Determinar si hay o no triángulo, y si lo hay obtener las medidas del otro lado y el otro ángulo.

Ejemplo 1

En el triángulo Δ ABC si a=4, b=5 y ∠ A=27°. Encuentra los posibles valores de lado c.

Solución :

Como a<b, hay dos posibles triángulos (Fig. 4.18). La Ley de los Senos no puede ser usada directamente para encontrar el lado c. ya que ∠ C es desconocido. La Ley de los Cosenos si puede ser usada, solo hay que despejar el lado c.

Fig. 4.18

Escribiendo la Ley de los Cosenos tenemos:

$$4^2=c^2+5^2-2(c)(5)\ \text{Cos}\ 27°$$

$$0=c^2-(10\ \text{Cos}\ 27°)c+25-16$$

$$0=c^2-8.912c+9$$

$$c=\frac{8.91 \pm \sqrt{(8.91)^2-4(5)(9)}}{2(1)}$$

$$c=\frac{8.91 \pm 6.58}{2}$$

$$c \approx 7.75 \text{ ó } 1.16$$

Ejemplo 2

En el Δ ABC, a=6, b=5 y $\angle$ B=27. Encuentra los posibles valores de c.

Solución :

Como a>b, solo hay un posible triángulo (Fig. 4.19)

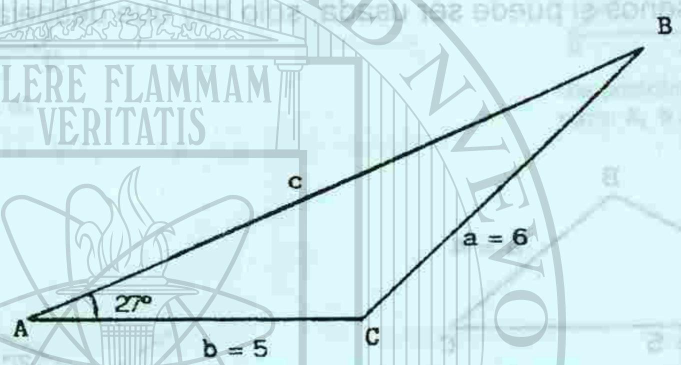


Fig. 4.19

Por la Ley de los Cosenos

$$6^2=c^2+5^2-2(c)(5)\text{ Cos }27°$$

$$0=c^2-8.91c-11$$

$$c=\frac{8.91\pm\sqrt{(8.91)^2-4(1)(-11)}}{2}$$

$$c=10.009 \text{ ó } -1.099$$

$\therefore$ c=10.01 Redondeando a dos decimales.

Nota: El valor negativo en c, confirma que solo hay un posible triángulo.

Ejemplo 3

En el Δ ABC, a=2, b=5 y $\angle$ A=27°. Encuentra los valores posibles de c.

Solución :

Utilizando la Ley de los Cosenos

$$(2)^2=c^2+5^2-2(c)(5)\text{ Cos }27°$$

$$0=c^2-8.91c+21$$

$$c=\frac{8.91\pm\sqrt{(8.91)^2-4(1)(21)}}{2(1)}$$

$$c=\frac{8.91\pm\sqrt{-4.61}}{2}$$

No hay solución por el valor negativo del radicando

$\therefore$ No hay triángulo (Fig. 4.20)

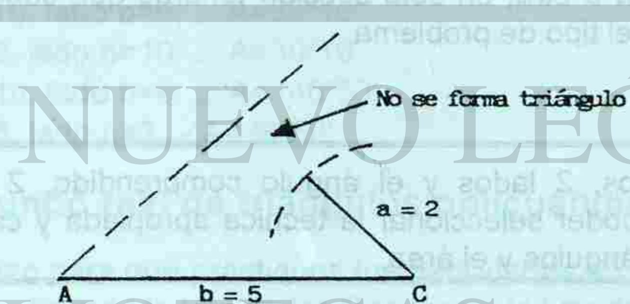


Fig. 4.20

Ejercicio 4.5

Para los siguientes problemas encuentra la longitud del lado indicado

1. En Δ ABC, $\angle$ B=32°, lado a=5 y lado b=4. Encuentra lado c.
2. En Δ XYZ, $\angle$ X=13, lado x=13 y lado y=6. Encuentra lado z.
3. En Δ ABC, $\angle$ B=33°, lado a=4 y lado b=5. Encuentra lado c.
4. En Δ XYZ, $\angle$ X=13°, lado x=11 y lado y=14. Encuentra lado z.
5. En Δ ABC, $\angle$ B= 32°, lado a=4, lado b=2. Encuentra lado c.
6. En Δ XYZ, $\angle$ X=13°, lado x=11, lado y=60. Encuentra lado z.
7. En Δ ABC, $\angle$ A=130°, lado a=20, lado c=16. Encuentra lado b.
8. En Δ ABC, $\angle$ A=170°, lado a=19 y lado c=11. Encuentra lado b.

En los siguientes problemas determina si hay uno o dos triángulos y luego encuentra los valores del ángulo que se pide.

9. En Δ ABC, $\angle$ A=19°, lado a=26 y lado c=31. Encuentra $\angle$ C.
10. En Δ HDJ, $\angle$ H=27°, lado h=50 y lado d=20. Encuentra $\angle$ D.
11. En Δ XYZ, $\angle$ X=58°, lado x=9.4, lado z=7.3. Encuentra $\angle$ Z.
12. En Δ BIG, $\angle$ B=110°, lado b=100 y g =90. Encuentra $\angle$ G.

4.6 Solución general de triángulos.

Ya haz aprendido las técnicas necesarias para resolver triángulos oblicuángulos, estas son la Ley de los Senos y la Ley de los Cosenos, pero se te indicaba cuando usar una u otra; en esta sección tendrás que saber cuándo usarlas sólo mencionándote el tipo de problema.

Objetivo

Dado tres lados, 2 lados y el ángulo comprendido, 2 lados y el ángulo no comprendido, poder seleccionar la técnica apropiada y calcular el otro lado o la medida de los ángulos y el área.

Algunas ocasiones puedes usar la Ley de los Senos o Cosenos para cualquier problema, pero a veces no funcionan para algunas situaciones. En seguida te daremos una guía para que reconozcas situaciones donde determinada técnica si funciona.

Técnicas para la solución de triángulos 1. La Ley de los Cosenos involucra tres lados. Así que, no funciona cuando te dan dos ángulos y un lado. 2. La Ley de los Senos involucra la razón del seno de un ángulo y la longitud de su lado opuesto, así que, no funciona cuando no hay ningún ángulo conocido (tres lados) o cuando solo se conocen dos lados y el ángulo comprendido. 3. La Ley de los Senos no debe ser usada para encontrar medidas de ángulos a menos que ya conozcas si es un ángulo agudo u obtuso. 4. La fórmula del área requiere que conozcas dos lados y el ángulo incluido, así que, si no los tienes debes calcularlos primero.

El siguiente ejercicio requiere que selecciones la técnica apropiada para que resuelvas el problema.

Ejercicio 4.6

En los siguientes problemas encuentra los datos faltantes

1. En Δ ABC, lado a=3, lado b=4, $\angle$ C=71°20'
2. En Δ ABC, lado a=8, lado b=5, $\angle$ C=32°40'
3. En Δ ABC, lado a=28, lado b=58, $\angle$ C=22°50'
4. En Δ ABC, lado a=16, lado b=38, $\angle$ C=81°30'
5. En Δ ABC, lado a=18, lado b=19, lado c=17
6. En Δ ABC, lado a=3, lado b=4, lado c=2
7. En Δ ABC, lado a=9, lado b=10, lado c=18
8. En Δ ABC, lado c=28, $\angle$ A=121°50', $\angle$ B=15°10'
9. En Δ ABC, lado c=48, $\angle$ A=11°20', $\angle$ B=27°30'
10. En Δ ABC, lado c=17, $\angle$ A=83°20', $\angle$ B=88°30'
11. En Δ ABC, lado a=5, lado b=7, $\angle$ A=25°40'
12. En Δ ABC, lado a=10, lado b=6, $\angle$ A=30°10'
13. En Δ ABC, lado a=6, lado b=10, $\angle$ A=30°10'
14. En Δ ABC, lado a=10, lado b=6, $\angle$ A=140°50'
15. En Δ ABC, lado a=5, lado b=3, $\angle$A=36°50'

4.7 Problemas del mundo real de triángulos oblicuángulos

La siguiente sección se hizo para que practiques tus habilidades en la solución de triángulos oblicuángulos utilizando la Ley de los Cosenos y la Ley de los Senos.

Objetivo

A partir de un enunciado serás capaz de dibujar un triángulo oblicuángulo y calcularás los datos que se te piden.

Ejercicio 4.7

Resuelve los siguientes problemas del mundo real.

1. Dos lados de un paralelogramo son 83 y 140 m., y una de las diagonales mide 189 m. Calcular el área de uno de los triángulos que forma la diagonal con los lados del paralelogramo.

2. Calcular el perímetro y el área de un paralelogramo, si una de sus diagonales mide 17 m. y los ángulos que forma ésta con los lados del paralelogramo son de 35° y 49°.

3. Dos hombres que están en el campo, separados 3000 m. uno del otro, observan un helicóptero. Sus ángulos de elevación respecto al helicóptero son de 60° y 75°. Determina la altura del helicóptero.

4. Los tres lados que limitan un terreno miden 320, 480 y 500 m. respectivamente. Calcula los ángulos que forman dichos lados.

5. Un puente de 24 m. de largo une dos colinas cuyas laderas forman con el horizonte ángulos de 23° y 32°. ¿Cuál es la altura del puente con respecto al vértice del ángulo formado por las laderas?

6. Para medir la altura de una montaña, una persona ve hacia la cresta desde un punto A y encuentra su Angulo de elevación de 35°40' después desde un punto B, alejado 500 m. de A. Encuentra su ángulo de elevación de 21°30'. ¿Cuál es la altura de la montaña?

7. Un buque sale de un puerto hacia el sur y navega 84km. Después vira al sudoeste y navega 120 km.
   a. ¿Qué distancia tendrá que recorrer para regresar al puerto?
   b. ¿Qué rumbo habrá de tomar?

8. Una pieza de artillería está en A y no puede ver el blanco C. Si el puesto de mando B está a 35 km. de A y a 22 km. de C, calcula la distancia de la pieza al blanco si el ángulo ABC es de 50°10'.

9. Tres circunferencias cuyos radios miden 115, 150 y 225 cm. son tangentes exteriormente entre si. Encuentra los ángulos que forman cuando se unen los centros de dichas circunferencias.

10. Para calcular la anchura BC de una bahía se miden, desde un punto A, dos distancias, AB y AC, y el ángulo BAC. AB=8 km, AC=9 km y ∠ BAC=65°30'. ¿Cuál es el ancho de la bahía?

CAPÍTULO 5

GEOMETRÍA ANALÍTICA
PRIMERA PARTE

La idea básica de la Geometría Analítica consiste en sustituir problemas de índole geométrica por otros de carácter algebraico, lo cual se logra mediante el empleo de ciertos recursos que son los llamados: Sistemas de Coordenadas.

Comenzaremos por presentar los más frecuentemente utilizados, que son los sistemas de coordenadas Cartesianas, así llamados en honor de René Descartes, filósofo, matemático y físico francés, nacido en 1596 y fallecido en 1650, quién escribió una obra de extraordinaria importancia para la Ciencia Universal, que incluía en su última parte lo que fue de hecho el primer tratado de Geometría Analítica, la obra se llamaba: Discurso del Método.

Podemos afirmar que después del florecimiento de la Geometría en la época de los griegos, se produjo un estancamiento en esta importantísima rama de la Matemática, del que no saldría, hasta la publicación en 1637, de la Geometría de Descartes, y que sin la Geometría Analítica es imposible dominar el Cálculo Diferencial e Integral, que constituye a su vez, una herramienta imprescindible en la formación de Ingenieros, Físico - Matemáticos, Químicos, Economistas y otros profesionistas.

Así pues, lo que vas a estudiar a continuación puede ser de extraordinaria importancia para tí. Confiamos en que te será útil.

Ejercicio 4.7

Resuelve los siguientes problemas del mundo real.

1. Dos lados de un paralelogramo son 83 y 140 m., y una de las diagonales mide 189 m. Calcular el área de uno de los triángulos que forma la diagonal con los lados del paralelogramo.

2. Calcular el perímetro y el área de un paralelogramo, si una de sus diagonales mide 17 m. y los ángulos que forma ésta con los lados del paralelogramo son de 35° y 49°.

3. Dos hombres que están en el campo, separados 3000 m. uno del otro, observan un helicóptero. Sus ángulos de elevación respecto al helicóptero son de 60° y 75°. Determina la altura del helicóptero.

4. Los tres lados que limitan un terreno miden 320, 480 y 500 m. respectivamente. Calcula los ángulos que forman dichos lados.

5. Un puente de 24 m. de largo une dos colinas cuyas laderas forman con el horizonte ángulos de 23° y 32°. ¿Cuál es la altura del puente con respecto al vértice del ángulo formado por las laderas?

6. Para medir la altura de una montaña, una persona ve hacia la cresta desde un punto A y encuentra su Angulo de elevación de 35°40', después desde un punto B, alejado 500 m. de A. Encuentra su ángulo de elevación de 21°30'. ¿Cuál es la altura de la montaña?

7. Un buque sale de un puerto hacia el sur y navega 84km. Después vira al sudoeste y navega 120 km.
   a. ¿Qué distancia tendrá que recorrer para regresar al puerto?
   b. ¿Qué rumbo habrá de tomar?

8. Una pieza de artillería está en A y no puede ver el blanco C. Si el puesto de mando B está a 35 km. de A y a 22 km. de C, calcula la distancia de la pieza al blanco si el ángulo ABC es de 50°10'.

9. Tres circunferencias cuyos radios miden 115, 150 y 225 cm. son tangentes exteriormente entre sí. Encuentra los ángulos que forman cuando se unen los centros de dichas circunferencias.

10. Para calcular la anchura BC de una bahía se miden, desde un punto A, dos distancias, AB y AC, y el ángulo BAC. AB=8 km, AC=9 km y ∠ BAC=65°30'. ¿Cuál es el ancho de la bahía?

CAPÍTULO 5

GEOMETRÍA ANALÍTICA
PRIMERA PARTE

La idea básica de la Geometría Analítica consiste en sustituir problemas de índole geométrica por otros de carácter algebraico, lo cual se logra mediante el empleo de ciertos recursos que son los llamados: Sistemas de Coordenadas.

Comenzaremos por presentar los más frecuentemente utilizados, que son los sistemas de coordenadas Cartesianas, así llamados en honor de René Descartes, filósofo, matemático y físico francés, nacido en 1596 y fallecido en 1650, quién escribió una obra de extraordinaria importancia para la Ciencia Universal, que incluía en su última parte lo que fue de hecho el primer tratado de Geometría Analítica, la obra se llamaba: Discurso del Método.

Podemos afirmar que después del florecimiento de la Geometría en la época de los griegos, se produjo un estancamiento en esta importantísima rama de la Matemática, del que no saldría, hasta la publicación en 1637, de la Geometría de Descartes, y que sin la Geometría Analítica es imposible dominar el Cálculo Diferencial e Integral, que constituye a su vez, una herramienta imprescindible en la formación de Ingenieros, Físico - Matemáticos, Químicos, Economistas y otros profesionistas.

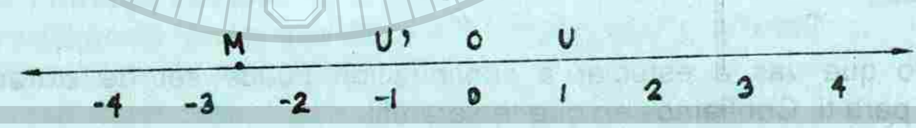
Así pues, lo que vas a estudiar a continuación puede ser de extraordinaria importancia para tí. Confiamos en que te será útil.

5.1 Sistema de coordenadas cartesianas

Objetivo

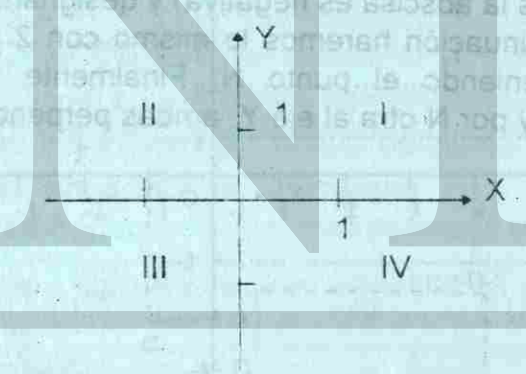
Localizar de manera rápida y correcta diferentes puntos usando sus coordenadas en la recta numérica y en el plano cartesiano

El punto de partida de la Geometría Analítica son los llamados sistemas de coordenadas cartesianos, mediante los cuales pueden ser resueltos una gran variedad de problemas de Geometría, muy fácilmente, empleando recursos que ya conocemos del Algebra.
Seguramente recordarás que, mediante lo que se acostumbra llamar una recta numérica, se pueden representar los números reales, tanto los positivos como los negativos. En dicha recta se escogen dos puntos arbitrarios: O y U que van a ser las representaciones gráficas de los números cero y uno, respectivamente. A continuación te mostramos una recta numérica donde hemos situado varios puntos y los números que le corresponden. La ubicación de los puntos correspondientes a los números enteros no necesitan explicación. Supongamos que queremos representar el número -2.4. Como -3 < -2.4 < -2, dividimos el segmento que une los puntos asociados a -3 y a -2 en 10 partes iguales de las cuales tomaríamos 4 hacia la izquierda, a partir del -2, de esta manera localizaríamos la representación de -2.4, el punto M.

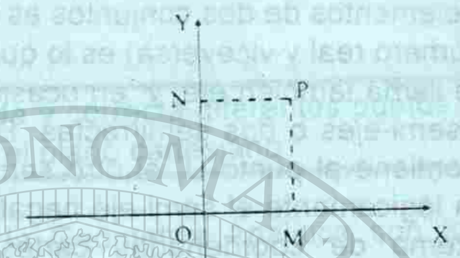


De manera análoga podríamos representar un número racional cualquiera, por ejemplo: 3.5, $-\frac{4}{3}$, etc. pero, ¿Cómo podríamos representar, por ejemplo el número $-\sqrt{10}$, que no es racional? Pues muy fácilmente. Dibujas un triángulo rectángulo de catetos 3 y 1 usando como unidad de longitud un segmento igual a OU. Como $10 = 9 + 1 = 3^2 + 1^2$, la longitud de la hipotenusa será $\sqrt{10}$: tomas un segmento igual a la hipotenusa, a partir de O, hacia la izquierda sobre la recta numérica, el extremo de dicho segmento es el punto que representa gráficamente a $-\sqrt{10}$. De esta manera, a todo número real x (racional o no) le corresponde un punto P y recíprocamente. Es decir que:

A todo punto P le corresponde un número real x (abscisa de P) que será positivo si P está a la derecha del origen O y negativo en caso contrario. Esta correspondencia entre los elementos de dos conjuntos es uno a uno (es decir a un punto le corresponde un número real y viceversa) es lo que se llama Biyección.
A una recta numérica se le llama también eje, y, en ocasiones, recta orientada. El eje está formado por dos semi-ejes o dos semirrectas. El semi-eje positivo es el que tiene origen en O y contiene al punto U, el otro semi-eje con origen en O y que contiene a U' se llama lógicamente el semi-eje negativo. Explicaremos ahora en qué consiste un sistema de coordenadas cartesianas y para que las utilizaremos.
Comenzaremos trazando dos rectas perpendiculares, las que, desde luego, se cortan en un punto que designaremos por O y que llamaremos origen; para indicar el semi-eje que tomaremos como positivo, en cada caso dibujaremos la punta de una flecha, como mostramos en la figura.
Las dos rectas que hemos trazado dividen el plano en cuatro regiones que se llaman cuadrantes, el primer cuadrante será el que ocupa la parte superior derecha, que designaremos como I; el 2° cuadrante será el que ocupa la parte superior izquierda, designado por II; el 3er cuadrante será el de la parte inferior izquierda y se designará por III y el último, el de la parte inferior derecha o 4° cuadrante, se designará con el IV, como te mostramos en la siguiente figura :



El eje horizontal lo designamos por la letra X y al vertical por Y.
Sea ahora P un punto cualquiera del plano. Vamos a explicarte a qué llamaremos coordenadas de P. Por este punto trazamos la perpendicular al eje X al cual cortará en un punto: M en la figura. Al punto M le corresponderá , en la recta numérica horizontal, un número real "x" que llamaremos abscisa de P. Por este mismo punto trazamos otra perpendicular, pero ahora al eje Y, al cual cortará en el punto N ; a este corresponderá, en la recta numérica o eje Y, un número real, "y", que llamaremos ordenada de P.



De este modo hemos hecho corresponder a cada punto del plano, dos números reales: “x” que escribiremos en primer lugar , “y” que pondremos en segundo lugar, ambos dentro de un par de paréntesis, formando así una pareja ordenada de números reales; el paréntesis irá precedido de la letra P, (u otra cualquiera), que designa al punto P(x ,y).
Así: A(-5, 2) servirá para designar el punto A cuya abscisa es -5 y cuya ordenada es 2. Para representar el punto A tomamos 5 unidades en el eje X a partir de O hacia la izquierda (pues la abscisa es negativa) y designamos por M el extremo de este segmento; a continuación haremos lo mismo con 2 unidades a partir de O sobre el eje Y, obteniendo el punto N. Finalmente trazamos por M, una perpendicular al eje X y por N otra al eje Y; ambas perpendiculares se cortarán en el punto A.

Hemos dicho que, mediante un sistema de coordenadas, hacemos corresponder, a cada punto P del plano, una pareja ordenada (x, y) de números reales. Debemos ahora añadir que también ha quedado establecida la correspondencia al revés, es decir, a cada par de números reales ordenados, le corresponde un punto del plano.
Es costumbre representar, al conjunto de todas las parejas ordenadas de números reales, por $\Re^2$. Podemos pues, decir que hemos logrado establecer una

Biyección entre el conjunto de todos los puntos del plano y $\Re^2$ [1]. Es muy importante insistir en que se trata de parejas ordenadas pues no es lo mismo, por supuesto, el punto A(-5, 2) que el B(2, -5). En general, no es lo mismo el punto (x, y) que el (y, x) excepto si x = y en cuyo caso coinciden.

Observaciones Importantes:

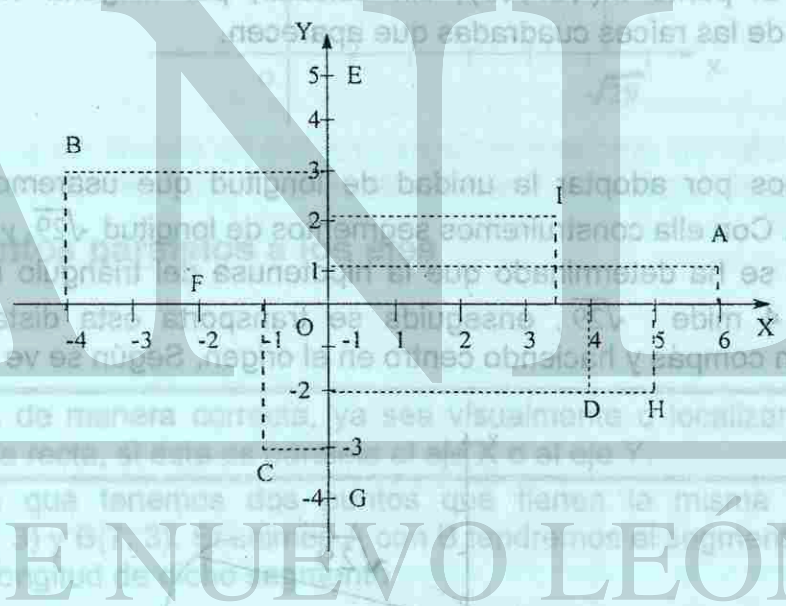
1. Un punto esta en el eje X si su ordenada es cero y recíprocamente.
2. Un punto esta en el eje Y si su abscisa es cero y recíprocamente.
3. Un punto esta en el interior del primer cuadrante si x > 0 y y > 0, en el 2° si x < 0 y y > 0 ; en el 3° si x < 0 y y < 0 y en el 4° si x > 0 y y <0.

Si en el cuadrante considerado incluimos los semi-ejes que lo forman entonces en cada caso anterior se incluirá el cero en la desigualdad.

Ejemplo 1

En un sistema de coordenadas rectangulares de un plano, situar los puntos:

A(6,1); B(-4; 3); C(-1, -3); D(4, -2); E(0, 5); F(-2, 0); G(0, -4); H(5, -2); I(3.5, 2)

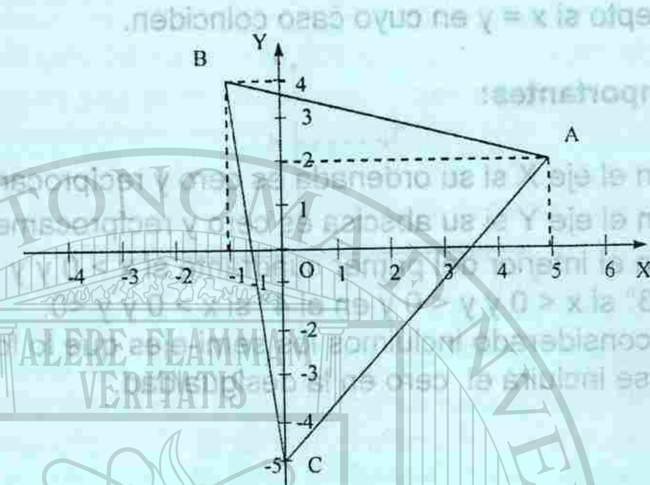


Ejemplo 2

Dibuja el triángulo cuyos vértices son los puntos: A(5, 2); B(-1, 4) y C(0, -6).

---
[1] *Después de esto, no debe haber confusión si no tenemos en cuenta la diferencia entre puntos (objetos geométricos) y pares ordenados de números reales (objetos algebraicos). Así pues, en lo que sigue usaremos frases tales como : el punto P(-10, 4) ; o los puntos* $(-2,\frac{5}{3})$ y $(\sqrt{2},-\frac{1}{2})$.

Solución

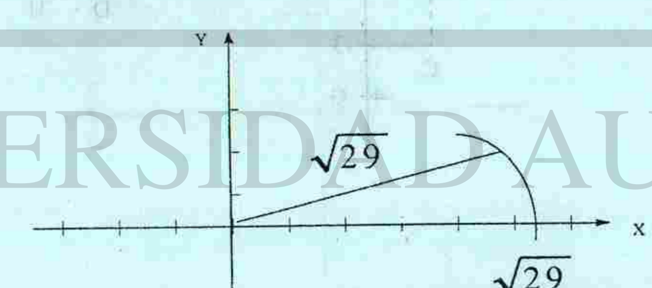


Ejemplo 3

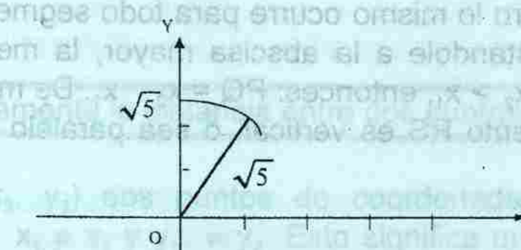
Representar el punto M($\sqrt{29},\sqrt{5}$), sin calcular, por ninguna vía, los valores aproximados de las raíces cuadradas que aparecen.

Solución

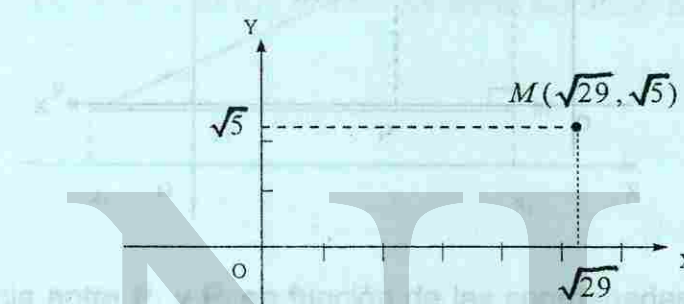
Comenzaremos por adoptar la unidad de longitud que usaremos en los ejes coordenados. Con ella construiremos segmentos de longitud $\sqrt{29}$ y $\sqrt{5}$.
Una vez que se ha determinado que la hipotenusa del triángulo rectángulo con catetos 5 y 4 mide $\sqrt{29}$, enseguida se transporta esta distancia al eje x empleando un compás y haciendo centro en el origen. Según se ve en la figura:



En forma similar se marca en el eje Y la distancia $\sqrt{5}$, distancia que representa la hipotenusa del triángulo rectángulo con catetos de medida 2 y 1, como mostramos a continuación:



Ahora, ya marcada en los ejes las distancias $\sqrt{29}$ y $\sqrt{5}$ se procede a localizar el punto M con las coordenadas ($\sqrt{29},\sqrt{5}$), como se muestra en la siguiente figura:

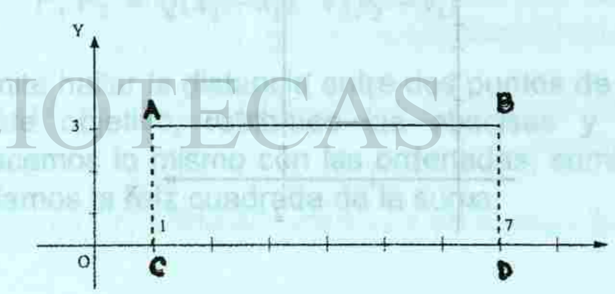


5.2 Segmentos paralelos a los ejes

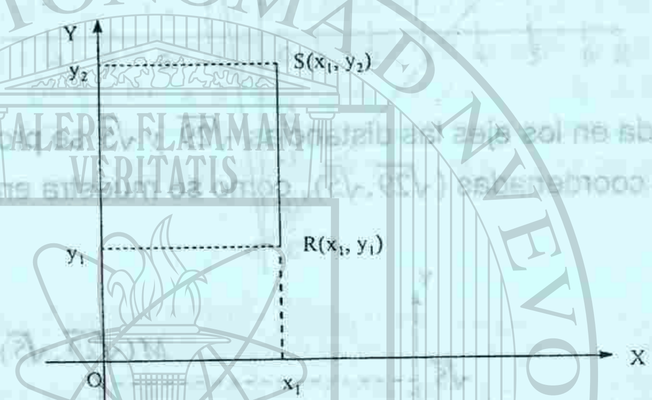
Objetivo

Reconocerás de manera correcta, ya sea visualmente o localizando dos o más puntos de una recta, si esta es paralela al eje X o al eje Y.

Supongamos que tenemos dos puntos que tienen la misma ordenada, por ejemplo: A(1, 3) y B(7, 3). Si unimos A con B tendremos el segmento AB.
Hallemos la longitud de dicho segmento



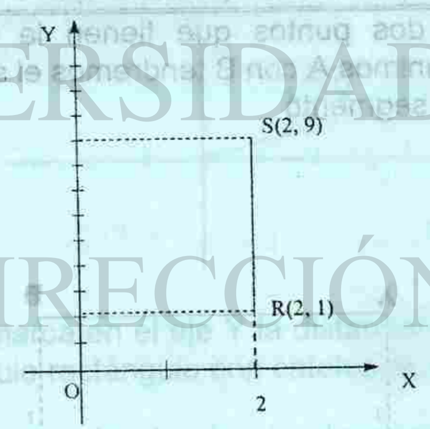
En la figura, de acuerdo con los datos OC = 1 y OD = 7, luego CD = 7 - 1 = 6. Este es un caso particular pero lo mismo ocurre para todo segmento paralelo al eje X : su longitud se halla restándole a la abscisa mayor, la menor. Es decir, que si $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_1)$ con $x_2 > x_1$, entonces: $PQ = x_2 - x_1$. De manera similar, si $R(x_1, y_1)$ y $S(x_1, y_2)$ el segmento RS es vertical, o sea paralelo al eje Y y, si $y_2 > y_1$, entonces: $RS = y_2 - y_1$.



Ejemplo 1

Si R(2, 1) y S(2, 9), entonces el segmento RS es vertical, el punto R está por debajo de S y la distancia de R a S, es decir la longitud del segmento RS es igual a 9 - 1 = 8.

Solución

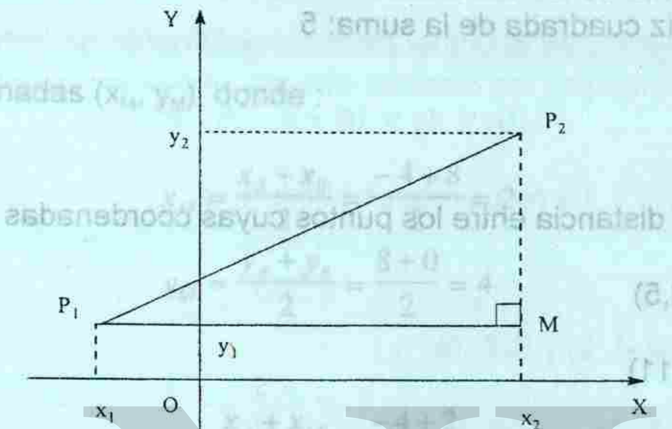


5.3 Fórmula de la distancia entre dos puntos.

Objetivo

Calcularás correctamente la distancia entre dos puntos usando fórmula.

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos de coordenadas conocidas con las restricciones siguientes: $x_1 \neq x_2$ y $y_1 \neq y_2$. Esto significa que la recta P_1P_2 no es paralela a ninguno de los ejes coordenados.



Hallemos la distancia entre P_1 y P_2 en función de las coordenadas de ambos. Por P_1 hemos trazado la paralela al eje X y por P_2 la paralela al eje Y. Ambas rectas se cortan perpendicularmente en M formándose así el triángulo rectángulo ΔP_1MP_2 cuyos catetos son: P_1M y MP_2 y la hipotenusa, desde luego P_1P_2. Es fácil ver que: la abscisa de M es la misma que la de P_2 y su ordenada, la misma que la de P_1, así que $M(x_2, y_1)$.
Entonces:

$$P_1M = x_2 - x_1 \quad \text{y} \quad MP_2 = y_2 - y_1$$

El teorema de Pitágoras, aplicado al triángulo $\Delta P_1M P_2$ nos permite escribir que:

$$(P_1P_2)^2 = (P_1M)^2 + (MP_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

y extrayendo raíz cuadrada

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

que es la fórmula que permite hallar la distancia entre dos puntos de coordenadas conocidas. Par lograr este objetivo, restamos las abscisas y elevamos la diferencia al cuadrado ; hacemos lo mismo con las ordenadas, sumamos los dos cuadrados obtenidos y hallamos la raíz cuadrada de la suma.

Ejemplo 1

Hallar la distancia entre los puntos: A(-2,6) y B(1,10).

Solución

1er paso.- Diferencia de abscisa: 1 - (-2) = 3, cuadrado de esta: 9
2° paso.- Diferencia de ordenadas: 10 - 6 = 4, cuadrado de esta: 16
3er paso.- Suma de los cuadrados 9 + 16 = 25
4° paso.- Raíz cuadrada de la suma: 5

Ejercicio 5.3

1) Encuentra la distancia entre los puntos cuyas coordenadas son :

a) (7,3) y (12,5)

b) (-7,4), (1,-11)

c) (-2,8), (-6,1)

d) (2,-6), (2,-2)

e) (-1,-5), (2,-3)

f) (-3,-1) y (9,4)

g) (1,-5), (6,2)

2) Demuestra que los puntos A (-5,3), B (3,2) y C (-1,-4) son vértices de un triángulo isósceles

3) Demuestra que (-1,4), (-3,-6) y (3,-2) son los vértices de un triángulo isósceles

4) Demuestra que los puntos ; A (6,5), B (3,7) y C (2,-1) son los vértices de un triángulo rectángulo

5) Demuestre que (-8,-3), (-2,6), (8,5) y (2,-4) son los vértices de un paralelogramo

6) ¿Para qué valores de x la distancia entre (1,7) y (x,3) es igual a 5 ?.

De manera que, si tienes las coordenadas de los extremos de un segmento y necesitas hallar las de su punto medio, sumas las abscisas y divide la suma por dos, hacer exactamente lo mismo con las ordenadas, y ¡eso es todo!

Ejemplo 1

Dados los puntos A(-4, 8) y B(8, 0). Sean M el punto medio de AB y N el punto medio de AM. Hallar las coordenadas de N.

Solución

Si M tiene coordenadas (x_M, y_M), donde :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-4+8}{2} = 2$$
$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{8+0}{2} = 4$$

Ahora:

$$x_N = \frac{x_A + x_M}{2} = \frac{-4+2}{2} = -1$$
$$y_N = \frac{y_A + y_M}{2} = \frac{8+4}{2} = 6$$

Respuesta: N(-1, 6).

Ejemplo 2

Hallar las coordenadas del punto situado sobre el eje Y que equidista de los puntos M(5, 5) y N(4, 2).

Solución

Como el punto pedido, P, está sobre el eje Y su abscisa es cero, su ordenada la designamos por y, entonces P(0, y).
La distancia de P a M es:

$$\sqrt{(5-0)^2 + (5-y)^2}$$

y la de P a N es:

$$\sqrt{(4-0)^2 + (2-y)^2}\ .$$

Como ambas deben ser iguales:

$$\sqrt{5^2+(5-y)^2}=\sqrt{4^2+(2-y)^2}$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad y efectuamos los cuadrados indicados, quedando:

$$25 + 25 - 10\,y + y^2 = 16 + 4 - 4y + y^2$$

Cancelando y^2 y dejando en el primer miembro solamente los términos en y:

$$-10y + 4y = 16 + 4 - 25 - 25$$

lo que nos lleva a y = 5. La respuesta es pues: (0, 5).

Ejemplo 3

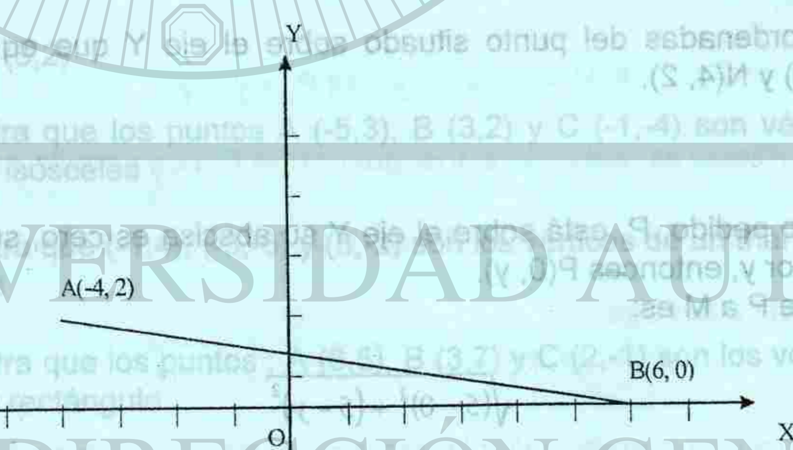
Dados los puntos: A(-4, 2) y B(6, 0).

a) Represéntalos y traza el segmento que los une.

b) Halla las coordenadas del punto medio M.

Solución

a)



b) Si $M(x_M, y_M)$, sabemos que:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}\ ;\ y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$$

$$x_M=\frac{-4+6}{2}=1\ ;\ \ y_M=\frac{2+0}{2}=1$$

Respuesta: M(1, 1)

Ejemplo 4

Uno de los extremos de un segmento es el punto A(4, 6) y su punto medio es: M(0, -1). Halla las coordenadas del otro extremo del segmento.

Solución

Sea $B(x_B, y_B)$ el otro extremo. Sabemos que:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}\quad y\quad y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$$

Sustituyendo $x_A = 4$, $y_A = 6$; $x_M = 0$, $y_M = -1$, tenemos que:

$$0=\frac{4+x_B}{2}\quad y\quad -1=\frac{6+y_B}{2}$$

De los cuales obtenemos, respectivamente: $x_B = -4$ y $y_B = -8$.

Ejercicio 5.4

1) Hallar las coordenadas del punto medio de los segmentos de recta cuyos puntos extremos son :

a) (8,-5), (-2,9)

b) (3,2), (7,6)

c) (-2,3), (-9,-6)

d) (5,15), (-7,-11)

e) (-3,3), (5,7)

f) (7,-4), (-9,6)

2) El punto (7,3) biseca el segmento de recta que une a (x,6) y (9,y). Encuentra los valores de x y de "y".

3) El punto (4,1) es el punto medio del segmento de recta que une a (x,7) y (5,y). Encuentra los valores de x y de "y"

4) Las coordenadas del punto medio del segmento AB son (-2,9). Si un extremo del segmento es A (-10,14). Encuentra las coordenadas del otro extremo.

5) El punto (5,-1), es el punto medio del segmento de recta $\overline{AB}$. Si las coordenadas del punto A son (3,-4). Encuentra las coordenadas del punto B.

6) El punto $(\frac{7}{5},-1)$, es el punto medio del segmento de recta $\overline{AB}$. Si las coordenadas del punto A son $(3,-\frac{7}{5})$. Encuentra las coordenadas del punto B.

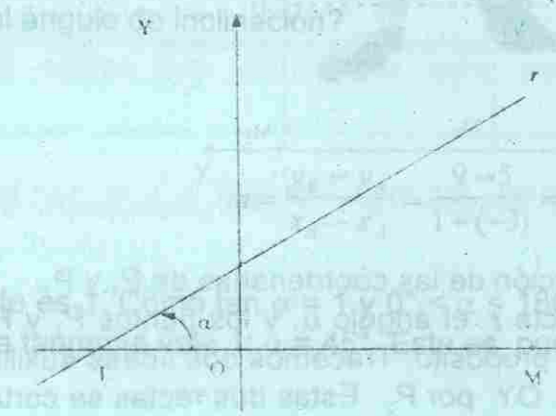
7) El punto $(\frac{7}{5},-3.27)$, es el punto medio del segmento de recta $\overline{AB}$. Si las coordenadas del punto A son $(4.39,-\frac{7}{5})$. Encuentra las coordenadas del punto B.

5.5 Ángulo de Inclinación de una recta. Pendiente.

Objetivo

Identificarás y calcularás el ángulo de inclinación y la pendiente de una recta.

Sea una recta que corta al eje X en un punto I, tal como se muestra en la figura y M un punto del Eje X con abscisa positiva.



Hagamos girar la semirrecta MI en sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj (hasta que dicha semirrecta coincida por primera vez con parte de *r*. En el caso que consideramos $0° < \alpha < 180°$. Denotemos por α al ángulo de giro. Este ángulo se llama "ángulo de inclinación de la recta *r*" (en el sistema de coordenadas escogido). La tangente del ángulo de inclinación de una recta se llama **PENDIENTE DE LA RECTA**.
Este último concepto desempeña, como podrás apreciar posteriormente, un papel importantísimo en Geometría Analítica.

5.5.1 Pendiente de una recta dadas las coordenadas de dos puntos.

Sea "*r*" una recta que pasa los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$. Si $x_1 = x_2$, es decir, si la recta es vertical o, dicho de otro modo, su ángulo de inclinación es de 90°, la pendiente de *r* sería: tan 90°, pero en este caso la tangente (tan) no esta definida, no existe. Por tanto, si los dos puntos dados P_1 y P_2 tienen la misma abscisa, la recta *r* carece de pendiente, o sea, ésta no existe.
Supongamos ahora que $x_1 \neq x_2$. Si, partiendo de esta suposición, fuera $y_1 = y_2$, la recta *r* sería paralela al eje X, su ángulo de inclinación sería de 0° y, como la tan 0° = 0, la pendiente de *r* sería 0.

Supongamos por último, que $x_1 \neq x_2$ y $y_1 \neq y_2$. La recta ***r*** no sería vertical, ni tampoco paralela al eje X en un punto, sea este M. Designemos por α el ángulo de inclinación. La pendiente ***m*** de ***r*** es, por definición igual a tan α.

Nos proponemos encontrar ***m*** en función de las coordenadas de P_1 y P_2.
El dibujo formado por los ejes, la recta ***r***, el ángulo α, y los puntos P_1 y P_2 no es suficiente para llevar a cabo nuestro propósito. Tracemos dos líneas auxiliares : la paralela a OX por P_1 y la paralela a OY por P_2. Estas dos rectas se cortan en Q formando un triángulo rectángulo, en el que $\angle QP_1P_2 = \alpha$ por ser estos ángulos correspondientes entre las paralelas OX y P_1Q cortadas por la transversal ***r***.

Entonces:

$$m = \tan \angle QP_1P_2 = \frac{QP_2}{P_1Q} = \frac{M_2P_2 - M_2Q}{OM_2 - OM_1}$$

Por tanto:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La pendiente buscada resulta ser el cociente o fracción que tiene por numerador la diferencia de ordenadas y por denominador la diferencia de abscisas en el mismo orden.
En la fórmula a la cual hemos llegado en el numerador y denominador aparecen como minuendos las coordenadas de P_2 pero esto no tiene que ser así.

En efecto, fíjate que:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_1 - y_2)}{-(x_1 - x_2)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Y, como vemos, los papeles de las coordenadas de P_1 y P_2 se han invertido.
Importante: Esta fórmula sirve para todos los casos, pues: Si $y_1 = y_2$, entonces ***m*** = 0 como ya sabíamos, y si $x_1 = x_2$, el denominador de la fórmula es cero (pero no el numerador) y ***m*** no estaría definida, lo cual también sabíamos.

Notemos además que si ***m*** > 0 y observamos el dibujo de izquierda a derecha, la recta ***r*** **sube**; al contrario si ***m*** < 0, la recta **baja** (al movernos de izquierda a derecha).

Ejemplo 1

Hallar la pendiente de la recta que pasa por A(-3, 5) y B(1, 9). ¿Cuál es la amplitud del ángulo de inclinación?

Solución

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{9-5}{1-(-3)} = \frac{4}{4} = 1.$$

La pendiente es 1. Como tan α = 1 y 0° < α < 180° ; en éste intervalo hay un solo ángulo cuya tangente vale 1: α = 45°. Este es, pues, el ángulo de inclinación.

Ejemplo 2

Demostrar que los puntos A(-1, 1), B(2, 2), C(8, 4) y D(5,3) pertenecen a la misma recta.

Solución

Pendiente de AB con A(-1, 1) y B(2, 2): $m = \dfrac{2-1}{2-(-1)} = \dfrac{1}{3}$

Pendiente de AC con C(8, 4): $\dfrac{4-1}{8-(-1)} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$

sea que las rectas AB y AC tienen la misma pendiente y un punto común, A. Por lo tanto, coinciden, es decir que los puntos A, B y C pertenecen a la misma recta, o, dicho de otro modo, están alineados.

Si D(5,3), entonces: $m_{AD} = \dfrac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \dfrac{3-1}{5-(-1)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$, que es igual a la pendiente de AC, luego, A, C y D están alineados. Finalmente, si E(-4, 0), entonces:

$$m_{AE} = \frac{y_E - y_A}{x_E - x_A} = \frac{0-1}{-4+1} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}.$$

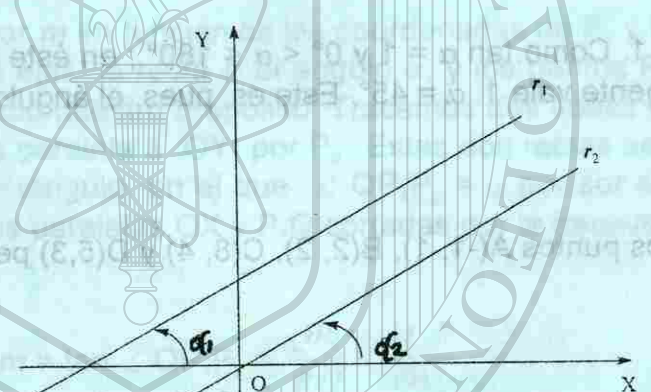
Por lo tanto A, B, C y D son colineales

5.5.2 Condición de paralelismo de dos rectas.

Objetivo

Determinarás las condiciones bajo las cuales dos rectas son paralelas, perpendiculares u oblicuas.

Sean r_1 y r_2 dos rectas paralelas. Supongamos que α_1 y α_2 son sus respectivos ángulos de inclinación.



Entonces α_1 y α_2 son ángulos correspondientes entre las paralelas r_1 y r_2 cortadas por una transversal (en este caso el eje X), por lo que, son iguales, es decir :

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

Sus tangentes también son iguales:

$$\tan \alpha_1 = \tan \alpha_2$$

Pero estas tangentes son las respectivas pendientes de r_1 y r_2, de modo que, si las rectas son paralelas, entonces sus pendientes son iguales.

El recíproco también es cierto, o sea, que si $m_1 = m_2$ entonces r_1 es paralela a r_2. Pues como $\tan \alpha_1 = \tan \alpha_2$ y α_1 y α_2 son ángulos en el intervalo [0°, 180°], necesariamente $\alpha_1 = \alpha_2$, lo que implica que $r_1 \,||\, r_2$.

Importante: Si las rectas fueran paralelas al eje X, sus pendiente serian ambas nulas; $m_1 = m_2 = 0$ y recíprocamente.

Resumiendo:

La condición necesaria para que dos rectas no verticales sean paralelas es que sus pendientes sean iguales. Por otra parte las rectas verticales son paralelas entre sí.

Ejemplo 1

Calcula el valor de la constante k para que la recta $kx + (k - 2)y - 16 = 0$, sea paralela a $4x + 3y - 7 = 0$

Solución

Pendiente de $4x + 3y - 7 = 0$ es $m = -\dfrac{4}{3}$

Pendiente de $kx + (k - 2)y - 16 = 0$ es $m' = -\dfrac{4}{k-2}$ $si\ k \neq 2$.

Si fuese $k = 2$ la ecuación se reduciría a

$$4x = 16$$

- sea $x = 4$, que es vertical y no puede ser paralela a la recta que tiene pendiente $m = -\dfrac{4}{3}$.
-

El paralelismo se cumple si $-\dfrac{4}{3} = -\dfrac{k}{k-2}$

De donde

$$4k - 8 = 3k$$

Por lo que

$$k = 8$$

Solución $k = 8$.

Ejemplo 2

ABCD es un cuadrilátero convexo. Sean L, M, N y P los puntos medios de los lados AB, BC, CD, DA, respectivamente. Demostrar analíticamente, que el cuadrilátero LMNP es un paralelogramo.

Solución

De la gráfica tenemos :

$$L\left(\frac{x_1}{2},0\right);\ M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_2}{2}\right);\ N\left(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{y_2+y_3}{2}\right)\ \text{y}\ P\left(\frac{x_3}{2},\frac{y_3}{2}\right)$$

$$m_{LM}=\frac{\frac{y_2}{2}-0}{\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{x_1}{2}}=\frac{y_2}{x_2};\quad m_{NP}=\frac{\frac{y_3}{2}-\frac{y_2+y_3}{2}}{\frac{x_3}{2}-\frac{x_2+x_3}{2}}=\frac{y_2}{x_2},$$

Luego LM || NP

$$m_{MN}=\frac{\frac{y_2+y_3}{2}-\frac{y_2}{2}}{\frac{x_2+x_3}{2}-\frac{x_1+x_2}{2}}=\frac{\frac{y_3}{2}}{\frac{x_3-x_1}{2}}=\frac{y_3}{x_3-x_1};\quad m_{PL}=\frac{0-\frac{y_3}{2}}{\frac{x_1}{2}-\frac{x_3}{2}}=\frac{-y_3}{x_1-x_3}=\frac{y_3}{x_3-x_1}=m_{MN},$$

Luego PL || MN

Ejemplo 3

Los vértices de un triángulo son: A(4, -5); B(-8, 3) y C(2, -7). Comprueba que el segmento que une los puntos medios de los lados AB y BC es paralelo al lado CA e igual a $\frac{1}{2}CA$.

Solución

Sean: L el punto medio de AB y M el punto medio de BC.
Aplicando las fórmulas que dan las coordenadas de los puntos medios:

$$x_L=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{4-8}{2}=-2$$

$$y_L=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-5+3}{2}=-1;\ \text{luego L }(-2,\ -1).$$

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{-8+2}{2}=-3$$

$$y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{3-7}{2}=-2;\ \text{luego M }(-3,\ -2).$$

Por lo que la pendiente de LM es:

$$m = \frac{y_M - y_L}{x_M - x_L} = \frac{-2-(-1)}{-3-(-2)} = \frac{-1}{-1} = 1$$

Y la pendiente de CA es:

$$m = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{-5-(-7)}{4-2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Como la pendiente del segmento LM y la del lado CA son iguales, son paralelas.
Veamos las longitudes:

$$LM = \sqrt{(x_M - x_L)^2 + (y_M - y_L)^2} = \sqrt{(-3+2)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(2-4)^2 + (-7+5)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Por lo tanto: LM $= \frac{1}{2} AC$.

Ejemplo 4

Dados los puntos: E(20, -5); F(-8, 15); G(24, -1) y H(-4, 19). Comprueba analíticamente que las rectas EF y GH son paralelas.

Solución

Pendiente de EF:

$$m = \frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \frac{15+5}{-8-20} = \frac{20}{-28} = -\frac{5}{7}$$

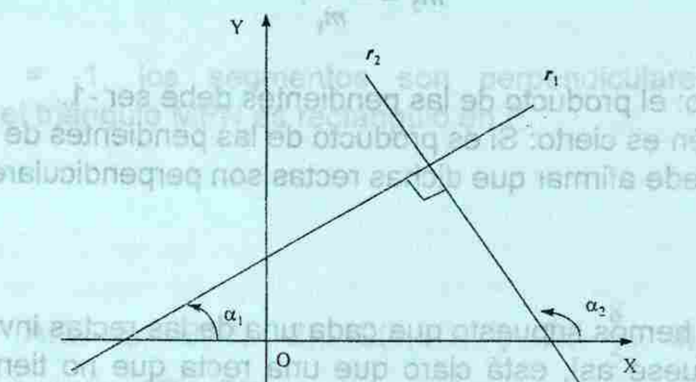
Pendiente de GH:

$$m' = \frac{y_H - y_G}{x_H - x_G} = \frac{19-(-1)}{-4-24} = \frac{20}{-28} = -\frac{5}{7}$$

Como las pendientes son iguales las rectas son paralelas.

5.5.3 Condición de perpendicularidad de dos rectas.

Sean r_1 y r_2 dos rectas que tienen pendientes respectivas m_1 y m_2. Designaremos por α_1 y α_2, sus respectivos ángulos de inclinación. Veamos que relación deben cumplir ambas pendientes si las rectas son perpendiculares.



Hemos confeccionado el dibujo de modo que en él se cumplan todas las condiciones estipuladas.
Razonaremos basándonos en él.
En primer lugar, en el triángulo rectángulo cuyo ángulo recto es el formado por r_1 y r_2, el ángulo α_2 es exterior, luego es igual a la suma de los interiores no adyacentes a él, o sea:

$$\alpha_2 = 90° + \alpha_1.$$

Tomemos la tangente en ambos miembros :

$$\tan \alpha_2 = \tan (90° + \alpha_1)$$

Recordemos que:

$\tan(90° + \alpha_1) = -\cot \alpha_1$ y que :

$$\cot \alpha_1 = \frac{1}{\tan\alpha_1}$$

Entonces:

$$\tan \alpha_2 = -\frac{1}{\tan\alpha_1}$$

Pero

$$\tan \alpha_1 = m_1 \quad \text{y} \quad \tan \alpha_2 = m_2$$

$$m = \frac{y_M - y_L}{x_M - x_L} = \frac{-2-(-1)}{-3-(-2)} = \frac{-1}{-1} = 1$$

Y la pendiente de CA es:

$$m = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{-5-(-7)}{4-2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Como la pendiente del segmento LM y la del lado CA son iguales, son paralelas. Veamos las longitudes:

$$LM = \sqrt{(x_M - x_L)^2 + (y_M - y_L)^2} = \sqrt{(-3+2)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(2-4)^2 + (-7+5)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Por lo tanto: $LM = \frac{1}{2}AC$.

Ejemplo 4

Dados los puntos: E(20, -5); F(-8, 15); G(24, -1) y H(-4, 19). Comprueba analíticamente que las rectas EF y GH son paralelas.

Solución

Pendiente de EF:

$$m = \frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \frac{15+5}{-8-20} = \frac{20}{-28} = -\frac{5}{7}$$

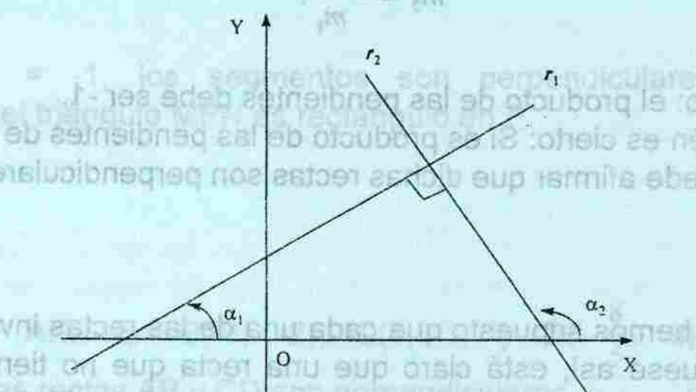
Pendiente de GH:

$$m' = \frac{y_H - y_G}{x_H - x_G} = \frac{19-(-1)}{-4-24} = \frac{20}{-28} = -\frac{5}{7}$$

Como las pendientes son iguales las rectas son paralelas.

5.5.3 Condición de perpendicularidad de dos rectas.

Sean r_1 y r_2 dos rectas que tienen pendientes respectivas m_1 y m_2. Designaremos por α_1 y α_2, sus respectivos ángulos de inclinación. Veamos que relación deben cumplir ambas pendientes si las rectas son perpendiculares.



Hemos confeccionado el dibujo de modo que en él se cumplan todas las condiciones estipuladas.
Razonaremos basándonos en él.
En primer lugar, en el triángulo rectángulo cuyo ángulo recto es el formado por r_1 y r_2, el ángulo α_2 es exterior, luego es igual a la suma de los interiores no adyacentes a él, o sea:

$$\alpha_2 = 90° + \alpha_1.$$

Tomemos la tangente en ambos miembros :

$$\tan \alpha_2 = \tan (90° + \alpha_1)$$

Recordemos que:

$$\tan(90° + \alpha_1) = -\cot \alpha_1 \text{ y que :}$$

$$\cot \alpha_1 = \frac{1}{tan\alpha_1}$$

Entonces:

$$\tan \alpha_2 = -\frac{1}{tan\alpha_1}$$

Pero

$$\tan \alpha_1 = m_1 \quad \text{y} \quad \tan \alpha_2 = m_2$$

Así que partiendo de la exposición de que las rectas r_1 y r_2, (de pendientes respectivas m_1 y m_2) son perpendiculares, hemos llegado a la conclusión de que, necesariamente es:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}.$$

Dicho de otro modo: el producto de las pendientes debe ser -1.
El recíproco también es cierto: Si es producto de las pendientes de dos rectas es -1, entonces se puede afirmar que dichas rectas son perpendiculares.

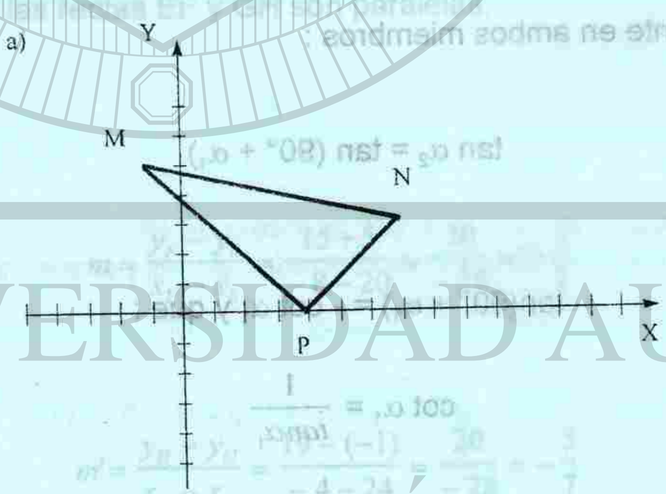
Nota

En lo que precede hemos supuesto que cada una de las rectas involucradas tiene pendiente. Si no fuese así, está claro que una recta que no tiene pendiente (o sea, si es vertical) es perpendicular a otra sí y solo sí esta es horizontal (por tanto, de pendiente nula).

Ejemplo 5

Los vértices de un triángulo son: M(-1, 5); N(7, 3) y P(4, 0).
a) Dibuja el triángulo.
b) Comprueba analíticamente que es rectángulo.

Solución



b) Si el dibujo esta hecho con cuidado, él nos sugiere cuáles son las pendientes que nos conviene hallar. Así:

$$m_{MP} = \frac{y_P - y_M}{x_P - x_M} = \frac{0-5}{4-(-1)} = \frac{-5}{5} = -1$$

$$m_{PN} = \frac{y_N - y_P}{x_N - x_P} = \frac{3-0}{7-4} = \frac{3}{3} = 1.$$

Como $(m_{MP})(m_{PN}) = -1$, los segmentos son perpendiculares, o sea el $\angle$ MNP = 90°, luego el triángulo MPN es rectángulo en P.

Ejemplo 6

Dados los puntos: A(2, 5); B(-3, -2); C(4, 1) y D($-\frac{8}{5}$, 3). Comprueba analíticamente que las rectas AB y CD son perpendiculares.

Solución

Pendiente de AB:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-5}{-3-2} = \frac{-7}{-5} = \frac{7}{5}$$

Pendiente de CD:

$$m' = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{3-(-1)}{-\frac{8}{5}-4} = \frac{4}{-\frac{28}{5}} = \frac{(-4)(5)}{-28} = -\frac{7}{5}$$

Y como mm' = -1, las rectas son perpendiculares.

Ejercicio 5.5

1) Hallar las pendientes de las rectas que pasan por los puntos :

a) (6,-4), (2,-3)

b) (-3,0), (1,2)

c) (-3,3), (3,-4)

d) (-3,2), (2,1)

e) (4,1), (-1,6)

f) (7,3), (4,-3)

3) Utilizando el concepto pendiente, demostrar que los puntos (6,5), (-3,0) y (4,-2) son los vértices de un triángulo rectángulo.

4) Empleando el concepto pendiente, prueba que los puntos (-2,3), (1,2) y (4,1) son colineales.

5) Empleando el concepto pendiente, demuestra que los puntos (7,1), (0,-2), (5,-4), son los vértices de un triángulo rectángulo.

6) Empleando el concepto pendiente, demuestra que los puntos : (0,-2), (3,0), (9,4), son colineales.

En los ejercicios 7 a 14 encuentra las pendientes de las rectas que pasan por los dos pares de puntos e indica si son paralelas, perpendiculares o se intersecan oblicuamente.

7) A (-4,2), B (4,-1) ; C (3,2), D (11,-2)

8) A (3,1), B (-6,2) ; C (-4,-5), D (-3,4)

9) A (-1,-2), B (-2,-4) ; C (3,-2), D (1,-1)

10) A (2,4), B (0,0) ; C (-2,1), D (-1,3)

11) A (2,-2), B (-3,4) ; C (5,0), D (-1,-5)

12) A (7,-8), B (-5,7) ; C (22,8), D (-6,-4)

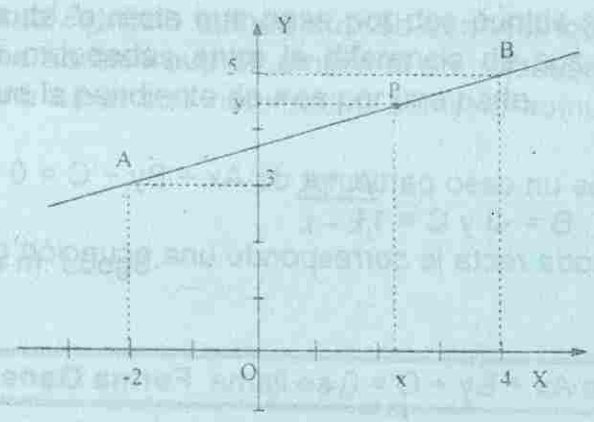
13) A (12,9), B (2,5) ; C (11,9), D (6,5)

5.6 Ecuación de la Recta. (Recta en el Plano)

Objetivo

Determinar la ecuación de una recta

Supongamos que tenemos dos puntos de coordenadas conocidas, por ejemplo: A(-2, 3) y B(4, 5) y consideremos la recta *r* que pasa por ellos. Sabemos que tal recta existe y que es única. Y, además, que la misma contiene infinidad de puntos. Nos proponemos hallar una ecuación que quede satisfecha por las coordenadas de todos los puntos de *r* y nada más que por ellos.



Sea P(x, y) un punto "genérico" de *r*, es decir, un punto que representa a todos los de *r*. Si unimos P con uno de los puntos dados, por ejemplo con A, la pendiente de AP será la misma la de AB. O sea 1/3 pues, aplicando la fórmula de la pendiente de la recta que pasa por los puntos A y B, tenemos:

$$m = \frac{5-3}{4-(-2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

En cambio, si P no estuviera situado en *r*, la pendiente de AP sería distinta a 1/3. Por lo tanto, P está en *r* si y solo si:

$$\frac{y-3}{x+2} = \frac{1}{3}$$

lo que equivale a:

$$3y - 9 = x + 2,$$

lo que es lo mismo, a

$$x - 3y + 11 = 0.$$

Observemos que al sustituir x por -2 y y con 3 el primer miembro de la ecuación es cero, de modo que, efectivamente, A es un punto de la gráfica de x - 3y + 11 = 0. Lo mismo ocurre con B(4, 5).

Resumiendo:

Un punto P(x, y) está situado en *r* si y solo si x - 3y + 11 = 0 que es la ecuación de *r*.

Insistamos en que los datos suficientes para obtener la ecuación fueron, en este caso los puntos A(-2, 3) y B(4, 5).

Es decir, bastan tener las coordenadas de dos puntos distintos cualesquiera de una recta para encontrar la ecuación de la misma, lo que está de acuerdo con el postulado siguiente: "Dos puntos distintos determinan una recta única, a la que pertenecen."
La ecuación x - 3y + 11 = 0 es un caso particular de Ax + By + C = 0 (donde A,B y C son constantes) con: A = 1, B = -3 y C = 11.
Es posible demostrar que a toda recta le corresponde una ecuación de esta forma y recíprocamente.

La ecuación Ax + By + C = 0 se llama: **Forma General.**

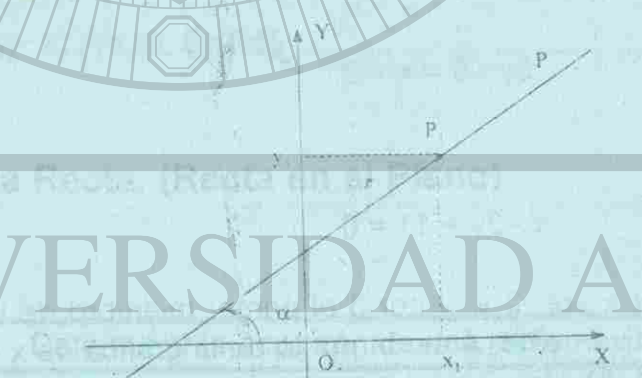
5.7 Formas de la Ecuación de una Recta.

Objetivo

Representarás analíticamente una recta mediante las diferentes formas de su ecuación.

5.7.1 Ecuación de la recta en la forma punto - pendiente.

Sea *r* una recta que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ de coordenadas conocidas y cuya pendiente, también conocida, es ***m***.
Con estos datos nos será muy fácil escribir la ecuación de *r*.



Tomemos un punto cualquiera de *r*: P(x, y). Entonces la pendiente de P_1P es ***m***. En cambio, si P no está en *r* entonces la pendiente de P_1P no es ***m***. Es decir que P esta en *r* si y solo si la pendiente de P_1P es igual a ***m***.

Pero la pendiente de la recta que pasa por dos puntos se obtiene dividiendo la diferencia de sus ordenadas entre la diferencia de sus abscisas en el mismo orden: es decir que la pendiente de ***r*** es por una parte,

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

y por otra parte es *m*. Luego

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=m$$

de donde :

$$\boxed{y-y_1=m(x-x_1)}$$

que es la ecuación de la recta en la forma pedida, o sea punto - pendiente.

Ejemplo 1

Comprobar analíticamente que los puntos: (-1, 1); (2, 2); (8, 4); (5, 3) y (-4, 0) están alineados.

Solución

Hallaremos la ecuación de la recta que pasa por dos de ellos y verificaremos que todos los demás satisfacen dicha ecuación.
Tomemos (-1,1) y (2, 2). La pendiente de la recta que los une se determina por:

$$m=\frac{2-1}{2-(-1)}=\frac{1}{3}$$

sea que la pendiente de la recta que pasa por (2, 2) es 1/3, si $y-2=\frac{1}{3}(x-2)$.
Veamos si el punto (8, 4) satisface esta última ecuación, si x = 8 y y = 4, entonces:

$$4-2=\frac{1}{3}(8-2)$$

$$2=\frac{1}{3}(6)=2$$

Por lo que si satisface a la ecuación, ahora tratemos con el punto (5, 3), entonces $x = 5$ y $y = 3$. Por lo que:

$$3-2=\frac{1}{3}(5-2)$$

$$1=\frac{1}{3}(3)=1$$

podemos ver que también la satisface, por último probemos con el punto (-4, 0):

$$0-2=\frac{1}{3}(-4-2)$$

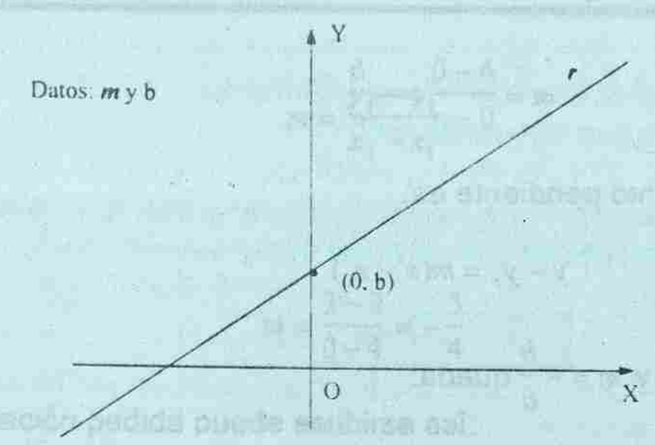
$$-2=\frac{1}{3}(-6)=-2$$

por lo que también la satisface.

Nota: Este problema puede resolverse por otra vía: usando solamente pendientes.

5.7.2 Ecuación de la recta en la forma pendiente - intersección.

Sea ***r*** una recta que corta al eje Y en el punto (0, b) y que tiene pendiente ***m***. Vamos a hallar la ecuación de ***r*** en función de ***m*** y de b.



Es muy fácil lograr nuestro propósito. Sabemos ya que la forma punto-pendiente:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

donde (x_1, y_1) es un punto fijo en la recta ***r*** al que podemos tomar como $(x_1, y_1) = (0, b)$, de donde $x_1 = 0$ y $y_1 = b$.
Sustituyendo en:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-b=m(x-0)$$
$$y-b=mx$$
$$\boxed{y=mx+b\,.}$$

que es la ecuación de ***r*** en la forma: **pendiente - intersección**.

5.7.3 Ecuación simétrica de la recta.

Sea *r* una recta que corta a los ejes X y Y en los puntos (a, 0) y (0, b) respectivamente, con a y b diferentes de cero.
Vamos a hallar la ecuación de *r* suponiendo conocidos los valores de a y b.
Recordemos la fórmula que da la pendiente de una recta que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$,

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

tomemos P_1 como la intersección de r con el eje X, es decir $x_1 = a$ y $y_1 = 0$ y P_2 como la intersección de r con el eje Y, o sea $x_2 = 0$ y $y_2 = b$.

Entonces:

$$m = \frac{b-0}{0-a} = -\frac{b}{a}$$

La ecuación en la forma punto pendiente es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Sustituyendo $x_1 = a$, $y_1 = 0$ y $m = -\frac{b}{a}$ queda:

$$y - 0 = -\frac{b}{a}(x - a)$$

$$ay = -b(x - a)$$

$$ay = -bx + ab$$

$$bx + ay = ab$$

Dividendo ambos miembros por ab (esto puede hacerse porque ab no es cero).

$$\frac{bx}{ab} + \frac{ay}{ab} = 1$$

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

que se llama: **ecuación simétrica de la recta.** ¿En que consiste la simetría? Pues en que: debajo de la x esta la intersección de r con el eje X y debajo de la y la intersección de r con el eje Y

Ejemplo 1

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (4, 0) y (0, 3).

Solución

Resolveremos este problema utilizando diferentes vías. Primeramente la forma punto - pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Tomemos P_1 como (4, 0) es decir $x_1 = 4$, y $y_1 = 0$ y P_2 (0, 3).
Recordemos la fórmula de la pendiente de la recta que pasa por dos puntos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Sustituyendo:

$$\boxed{m = \frac{3-0}{0-4} = -\frac{3}{4}}$$

Entonces la ecuación pedida puede esribirse así:

$$y - 0 = -\frac{3}{4}(x - 4)$$

Si dejamos la ecuación así, tiene la ventaja de que nos permite ver enseguida que la recta en cuestión pasa por el punto (4, 0) y tiene pendiente $-\frac{3}{4}$.

Segunda vía, forma simétrica.
En este caso podemos escribir la ecuación sin hacer calculo alguno, pues si la recta pasa por (4, 0) y por (0, 3) entonces a = 4 y b = 3, y ya sabemos que en tal caso la ecuación es: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, es decir: $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$.
Tercera vía, usaremos la forma: pendiente - intersección:

$$y = mx + b$$

Ya sabemos que b es la ordenada del punto donde la recta corta al eje Y, en este caso b = 3 ; la pendiente *m* la hallaríamos como lo hicimos en la primera vía donde obtuvimos:

$$m = -\frac{3}{4}$$

Entonces:

$$y = -\frac{3}{4}x + 3.$$

5.7.4 Casos particulares de la ecuación de la recta.

Con mucha frecuencia nos encontramos en la práctica con rectas que ocupan posiciones particulares con respecto al sistema de coordenadas y nos será muy conveniente que conozcamos sus ecuaciones que, por supuesto, también presenta sus particularidades. Estos casos son:

1. **Recta que pasa por el origen de coordenadas.**
Tomamos la forma punto - pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Como en esta ecuación P_1 (x_1, y_1) es cualquier punto de la recta, y estamos suponiendo que esta pasa por el origen, tomamos este como P_1 o sea: x_1 = 0 y_1 = 0 quedando:

$$\boxed{y = mx.}$$

De modo que, si una recta pasa por el origen su ecuación es de la forma y = mx y recíprocamente.

2. **Recta paralela al eje X.**
En este caso la pendiente es cero. En efecto, el ángulo de inclinación es de cero grados y la tangente de cero grados vale cero, recuerda que esta tangente es, por definición, la pendiente. Si la recta corta al eje Y en el punto (0, b), entonces, usando para su ecuación la forma punto - pendiente se convierte en:

$$y - b = 0(x - 0)$$

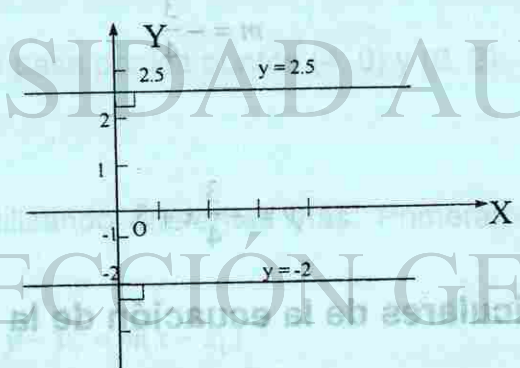
la cual se reduce a

$$\boxed{y = b}$$

Así que, si una recta es paralela al eje X, todos sus puntos tienen la misma ordenada y, recíprocamente, de decir, si b es un número fijo cualquiera, entonces la ecuación y = b tiene por gráfica la recta que pasa por (0, b) y es paralela al eje X.

Ejemplo 1

En la figura mostramos las rectas y = 2.5 , y = -2:



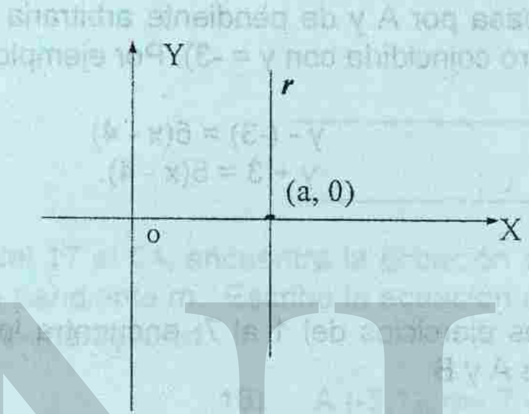
3. Recta paralela al eje Y.
Si una recta es paralela al eje Y, es perpendicular al eje X, es decir, su ángulo de inclinación es de 90°; como la pendiente de una recta es por

definición, la tangente de su ángulo de inclinación y la tangente de 90° no existe, resulta de aquí que, si una recta es paralela al eje Y (dicho de otro modo es vertical), no tiene pendiente por lo que en este caso no podemos partir de la forma punto - pendiente para obtener este caso particular. Así que vamos a proceder de otro modo.

Sea (a, 0) el punto donde una recta paralela al eje Y corta a OX.
Entonces la ecuación de la recta es:

$$\boxed{x = a.}$$

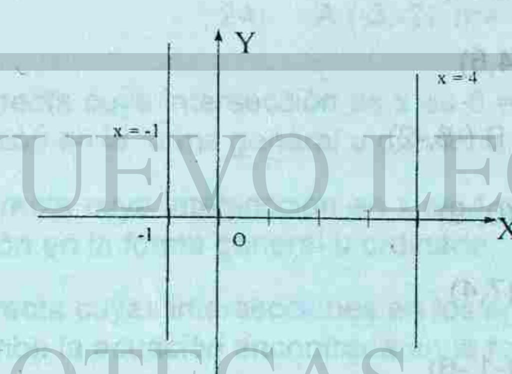
En efecto:



Si P(x, y) es un punto de ***r***, su abscisa tiene que ser igual a **a**: es decir x = a. Recíprocamente, si la abscisa de un punto P es **a**, P tiene que estar en ***r***. La ecuación de ***r*** es, pues:

$$x = a.$$

En la figura te mostramos dos ejemplos:



Nota:
Como casos más particulares tenemos dos conclusiones evidentes:
La ecuación del eje X es y = 0 y la ecuación del eje Y es x = 0.

Ejemplo 2

Escribe las ecuaciones de 3 rectas que pasan por el punto a(4, -3).

Solución

Hay dos cosa que son triviales, es decir que podemos dar inmediatamente como respuestas que son:

1. x = 4 es decir, la recta que pasa por A es vertical (paralela al eje Y).
2. y = -3 o sea, la recta horizontal que pasa por A.
3. Una recta que pasa por A y de pendiente arbitraria (y, por supuesto, no nula, pues si fuese cero coincidiría con y = -3). Por ejemplo, si tomo ***m*** = 5, entonces

$$y - (-3) = 5(x - 4)$$
$$y + 3 = 5(x - 4).$$

Ejercicio 5.7

En cada uno de los ejercicios del 1 al 7, encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B

a) En la forma Pendiente-Intersección

b) En la forma general u ordinaria

1) A (-2,-5), B (4,1)

2) A (4,7), B (6,11)

3) A (1,1), B (4,6)

4) A (-10,--7), B (-6,-2)

5) A (2,-3), B (0,-9)

6) A (-2,3), B (7,4)

7) A (-1,4), B (-1,-6)

8) A (-4,-18), B (3,12)
9) A (2,-10), B (-3,25)

10) A (-10,21), B (8,-6)

En los siguientes ejercicios del 11 al 16, determina la ecuación de la recta, dada la pendiente (m) y la intersección en el eje Y (b) . Escribe la ecuación en la forma pendiente-intersección.

11) m=3, b= -4

12) m= 7, b= 0

13) m= $\frac{5}{2}$, b= -6

14) m= -8, b= 3

15) m= $\frac{3}{5}$, b= -4

16) m= 1 b= -8

En cada uno de los ejercicios del 17 al 24, encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto A y que tiene pendiente m. Escribe la ecuación en la forma : a) punto-pendiente, b) pendiente-intersección.

17) A (2,3), m= 5

18) A (-5,1), m= 7

19) A (4,-3) m=-2

20) A (-6,-3), m= $\frac{3}{2}$

21) A (-2,5), m= $-\frac{1}{2}$

22) A (-6,2), m= $\frac{4}{3}$

23) A (-5,4), m = $\frac{3}{5}$

24) A (-3,-2), m= $-\frac{2}{3}$

25) Hallar la ecuación de la recta cuya intersección es x es 5 e intersección en y es -3. escribe la ecuación en la forma general u ordinaria.

26) Hallar la ecuación de la recta cuya intersección en x es 4 e intersección en y es 5. Escribe la ecuación en la forma general u ordinaria.

27) Hallar la ecuación de la recta cuyas intersecciones en los ejes X e Y son 2 y -7 respectivamente. Escribe la ecuación encontrada en la forma general.

28) Hallar la ecuación de la recta cuyas intersecciones en los ejes X e Y son -3 y 8 respectivamente. Escribe la ecuación encontrada en la forma general.

En los ejercicios del 29 al 48 encuentra la pendiente de la recta que representan las ecuaciones.

29) y= 5 x + 6 m=

30) $y= -\frac{2}{3}x + 8$ m=

31) y-7=2 (x - 6) m=

32) $y-8= \frac{3}{5}(x + 6)$ m=

33) 3 x + 2 y=7 m=

34) x++6y+16=0 m=

35) 3 x + 4 y + 24=0 m=

36) 2 x + y= -3 m=

37) 6 x -7y= 16 m=

38) 2 x - 3 y = 6 m=

39) 3 x + 5 y = 10 m=

40) x + 4 y + 6 = 0 m=

41) 8 x -3y+ 18=0 m=

42) 5 x -3y= -13 m=

43) y= x + 7 m=

44) $y= - x + \frac{2}{5}$ m=

45) $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 1$ m=

46) $\frac{x}{2} - \frac{y}{5} = 1$ m=

47) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ m=

48) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto (4,7) y es paralela a la recta y=4x-5.

49) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto (.1,3) y es paralela a la recta cuya ecuación es 6x-2y-15=0

50) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto (5,-2) y es paralela a la recta cuya ecuación es 2x+5y+20=0

51) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto (-1,-4) y es paralela a la recta cuya ecuación es 3x-2y=-40

52) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas 3x+2y=7, 2x+5y=12 y es paralela a la recta $y=\frac{2}{5}x-10$

53) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersecCción de las rectas, 3x+2y=-17, 7x+5y= -41 y es paralela a la recta y= 3x-7

54) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto (3,2) y que es perpendicular a la recta 2x+16y+6=0

55) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto (4,-2) y es perpendicular a la recta 5x-y=3

56) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto (-4,-6) y es perpendicular a la recta $y= -\frac{1}{2}x+8$

57) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto (-3,5) y es perpendicular a la recta y= 3x+8

58) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto (5,4) y es perpendicular a la recta $y= \frac{2}{5}x-10$

59) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas ; 7x+2y=15, 6x+5y=-3 y que es perpendicular a la recta $y=\frac{1}{5}x-8$

60) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas ; 2x+y=6, 3x-2y= 16 y es perpendicular a la recta $y=-\frac{3}{2}x+15$

61) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas ; x-6y= 16, 3x+7y= -27 y es perpendicular a la recta $y= -\frac{1}{5}x+8$

62) Encuentra la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta 4x+y=1 y que pasa por el punto de intersección de las rectas ; 2x-5y=-3, x-3y=7

63) Determina para que valor de K entero positivo, la recta (K-4)x + (K-3)y= 7 es paralela a la recta y= Kx+5.

64) Determina para que valor de K entero positivo, las rectas (7K+15)x + (2K-15)y+ 1 = 0, y = 2Kx - 9 son paralelas.

65) Determina para que valor de K entero positivo, las rectas (3K+14) x + (K-4)y - 5 =0, y = 5Kx-1 son paralelas.

66) Determina para que valor de K positivo, las rectas (5K-15) x + (K-3) y + 8 = 0, es paralela a la recta y = 2Kx - 5.

67) Determina para que valor de K positivo, las rectas (5K-8) x + (K-5) y -7=0, y = 3Kx -13, son paralelas.

68) Determina para que valor de K positivo, las rectas ; (5-9K) y + (K-6) y -7=0, y= $\frac{1}{2K}$x - 4, son perpendiculares.

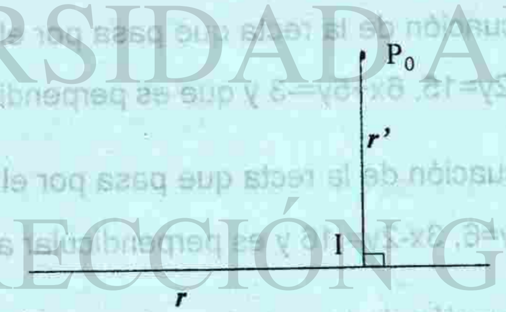
69) Determina para que valor de K positivo, las rectas ; (4-8K)x + (K-3)y - 1 = 0, y= $\frac{1}{3K}$x-4 son perpendiculares.

5.8 Distancia de un punto a una recta.

Objetivo

Podrás calcular correctamente la menor distancia entre un punto y una recta

5.8.1 Distancia de un punto a una recta.



Sea ***r*** una recta y P_0 un punto que no pertenece a ***r***. La distancia de P_0 a ***r*** se define así: llamaremos ***r'*** a la recta que pasa por P_0 y es perpendicular a ***r***.

Entonces ***r'*** corta a ***r*** en un punto I. La distancia de P_0 a ***r*** es, por definición, la longitud del segmento P_0I.
Veamos ahora que implicación tiene lo anterior en Geometría Analítica. Comenzaremos con un ejemplo:

Ejemplo 1

Dada la recta ***r***: 3x + 4y -12 = 0 y el punto P(1, 1). Hallar la distancia de P a ***r***.

Solución
Tenemos que la pendiente de ***r*** está dad por :

$$m = -\frac{3}{4}$$

Ahora, la pendiente de la recta perpendicular a ***r*** es :

$$m = -\frac{1}{m} = \frac{4}{3}$$

Luego la ecuación de la recta ***r'*** que es perpendicular a ***r*** y pasa por P(1, 1):

$$y - 1 = \frac{4}{3}(x-1)$$

Hallemos ahora las coordenadas del punto I de intersección de ***r*** con ***r'***. Para ello resolveremos el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas:

r: 3x + 4y -12 = 0 (1)

r': $y = 1 + \frac{4}{3}(x-1)$ (2)

Usaremos el método de sustitución:

$$3x + 4\left(1 + \frac{4}{3}(x-1)\right) - 12 = 0$$

$$3x + 4 + \frac{16}{3}(x-1) - 12 = 0$$

$$9x + 12 + 16x - 16 - 12 = 0$$

$$25x = 40$$

$$x = \frac{8}{5}.$$

Sustituyendo en (2):

$$y = 1 + \frac{4}{3}\left(\frac{3}{5}\right) = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$$

Así que $I\left(\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right)$.

Solo falta hallar la distancia ente los puntos P e I. Aplicando la fórmula:

$$\sqrt{\left(\frac{8}{5}-1\right)^2 + \left(\frac{9}{5}-1\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = 1.$$

Veamos el caso general:
Si hiciéramos todo el proceso que acabamos de exponer, el resultado al cual llegaríamos sería el que presentamos a continuación mediante la fórmula:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Es decir: tomas el primer miembro de la ecuación de ***r*** (escrito en forma general) sustituyes x por x_0 y y por y_0; tomas el valor absoluto, es decir, te quedas con el mismo número si este te dio positivo y le cambias el signo si te dio negativo. Veamos esto con un caso particular.

Ejemplo 2

Hallemos la distancia del punto (1, 1) a la recta cuya ecuación es: 3x - 4y + 12 = 0.

Solución

1° Evaluamos el primer miembro para x = 1 y y = 1.

$$3(1) + 4(1) - 12 = 3 + 4 - 12 = -5$$

Como obtuvimos un número negativo, le cambiamos de signo. Así que el numerador de la fórmula es 5.

2° Veamos el denominador, como aquí A = 3 y B = 4, entonces :

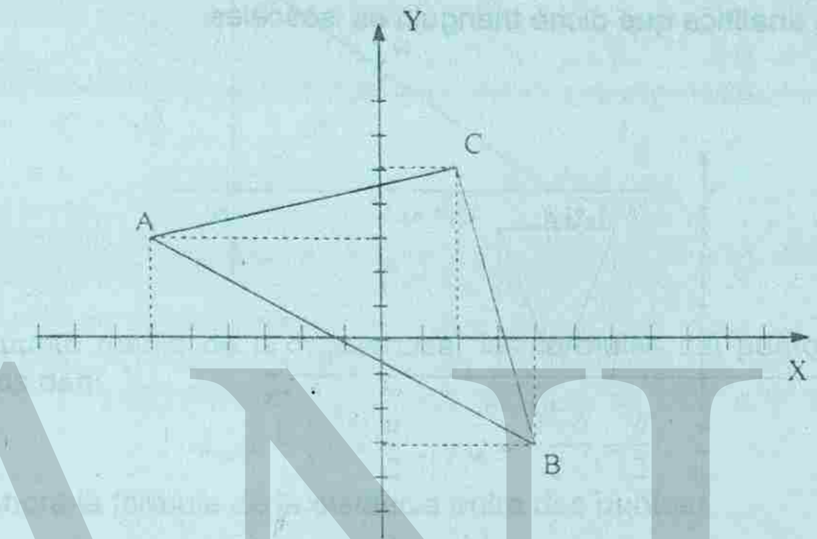
$$\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Así que el denominador es 5.

3° Luego $d = \frac{5}{5} = 1$

Ejemplo 3

Comprobar que los puntos A(-6, 3), B(4, -3) y C(2, 5) son vértices de un triángulo isósceles no equilátero.



Solución

Aplicamos la fórmula de distancia entre dos puntos, así:

$AC^2 = [\,2 - (-6)]^2 + (5 - 3)^2 = 64 + 4 = 68$, entonces : $AC = \sqrt{68}$

$BC^2 = (2 - 4)^2 + [5 - (-3)]^2 = 4 + 64 = 68$, entonces : $BC = \sqrt{68}$

Como AC = BC el triángulo ABC es isósceles por tener dos lados iguales.

Veamos ahora porqué no es equilátero. Bastará que hallemos la longitud AB y comprobemos que dicha longitud no es la misma que la de los lados AC y BC.

$AB^2 = (-6 - 4)^2 + (3 + 3)^2 = 100 + 36 = 136$, entonces: $AB = \sqrt{136}$.

Con lo que queda comprobado lo que nos habíamos propuesto.

Observación:

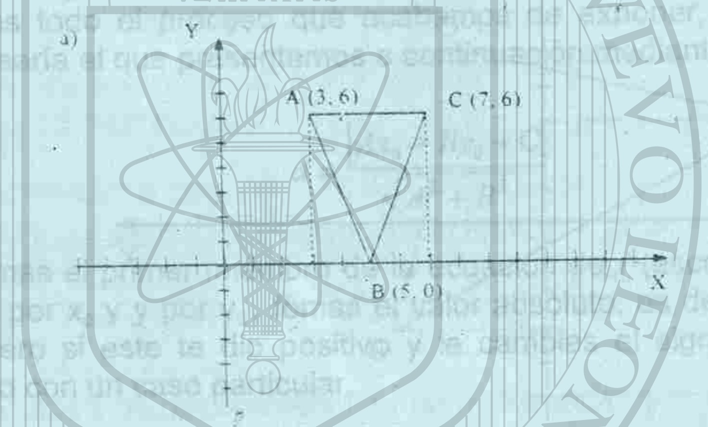
Es importante notar que no tuvimos necesidad de hallar valores aproximados de $\sqrt{68}$ y $\sqrt{136}$.

Ejemplo 4

Dados los puntos A(3, 6); B(5, 0) y C(3, 6).

a) Representar el triángulo ABC
b) Comprobar en forma analítica que dicho triángulo es isósceles.

Solución



b) Aplicamos la fórmula de la distancia entre dos puntos, usando las tres parejas posibles de vértices.

$$AB^2 = (5-3)^2 + (0-6)^2 = 4 + 36 = 40, \text{ entonces } AB = \sqrt{40}$$
$$BC^2 = (7-5)^2 + (6-0)^2 = 4 + 36 = 40, \text{ entonces } BC = \sqrt{40}$$
$$CA^2 = (7-3)^2 + (6-6)^2 = 16, \text{ entonces } CA = \sqrt{16} = 4.$$

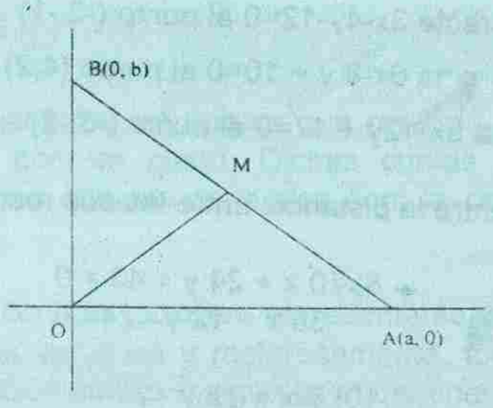
Sea, en el triángulo ABC hay dos lados que tienen la misma longitud, que son AB y BC. Y como esta longitud es distinta a la del lado CA, el triángulo es isósceles, pero no equilátero (pues en tal caso los tres lados deberían tener la misma longitud).

Ejemplo 5

Demostrar analíticamente que, si en un triángulo rectángulo se une el vértice del ángulo recto con el punto medio de la hipotenusa, el segmento obtenido de esta forma tiene por longitud la mitad de la hipotenusa.

Solución

En este caso no nos hablan de sistemas de coordenadas. Seremos nosotros los que introduciremos un sistema en una posición ventajosa, pues nos permitirá llevar a cabo la demostración con una gran facilidad. Sean "a" y "b" las longitudes de los catetos. En la figura siguiente mostramos el sistema de coordenadas y la forma o posición en que colocamos el triángulo:



Si M es el punto medio de la hipotenusa, las fórmulas del punto medio de un segmento nos dan:

$$x_M = \frac{a+0}{2} = \frac{a}{2}\ ;\ y_M = \frac{0+b}{2} = \frac{b}{2}$$

Aplicamos ahora la fórmula de la distancia entre dos puntos.

1. Para hallar OM como = O(0, 0) y M$\left(\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)\right)$, entonces:

$$OM = \sqrt{\left(\frac{a}{2}-0\right)^2 + \left(\frac{b}{2}-o\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

2. Para hallar AB. Como a(a, 0) y B(0,b), entonces:

$$\sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

Pero OM = $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$ lo que demuestra que OM = $\frac{1}{2}AB$, que es lo que nos propusimos demostrar.

Observación

En este problema hemos visto un ejemplo de como la Geometría Analítica permitió resolverlo con sencillez. Pero no siempre sucede así. A veces el empleo de métodos analíticos hace más complicado el proceso. Tu profesor podrá ayudarte en este aspecto pero tu formación no será completa y eficaz si no dedicas suficiente tiempo al estudio de la ejecución y la ejercitación.

Ejercicio 5.8

1) Encuentra la distancia de la recta $3x - 4y + 4 = 0$ al punto $(6,-2)$
2) Encuentra la distancia de la recta $12x + 5y - 6 = 0$ al punto $(4,-6)$
3) Encuentra la distancia de la recta $4x + 3y - 5 = 0$ al punto $(2,-5)$
4) Encuentra la distancia de la recta $3x - 4y - 12 = 0$ al punto $(-2,-1)$
5) Encuentra la distancia de la recta $6x - 8y + 10 = 0$ al punto $(4,2)$
6) Encuentra la distancia de la recta $5x - 12y + 17 = 0$ al punto $(-3,-2)$

En los ejercicios del 7 al 12, encuentra la distancia entre las dos rectas paralelas.

7) $3x + 4y - 12 = 0$
$3x + 4y + 7 = 0$

8) $70x + 24y + 43 = 0$
$35x + 12y - 24 = 0$

9) $15x + 8y + 30 = 0$
$15x + 8y - 4 = 0$

10) $9x + 12y - 27 = 0$
$9x + 12y + 33 = 0$

11) $5x + 12y - 10 = 0$
$5x + 12y + \frac{2}{3} = 0$

12) $70x + 24y + 50 = 0$
$12x + 16y - 12 = 0$

CAPÍTULO 6

GEOMETRÍA ANALÍTICA
SEGUNDA PARTE

En este capitulo estudiaremos las curvas que resultan de la intersección de un cono de dos mantos con un plano. Dichas curvas se llaman SECCIONES CONICAS. Las secciones cónicas generales son: la circunferencia, la elipse, la hipérbola y la parábola.

Todas las secciones cónicas pueden representarse mediante ecuaciones de segundo grado con dos variables y recíprocamente, toda ecuación de segundo grado describe una sección cónica o algún caso degenerado de ella.

En este capítulo trataremos en detalle cada una de las secciones cónicas así como las relaciones que existen entre sus gráficas y sus ecuaciones.

Ejercicio 5.8

1) Encuentra la distancia de la recta 3 x -4 y + 4=0 al punto (6,-2)
2) Encuentra la distancia de la recta 12 x + 5 y-6=0 al punto (4,-6)
3) Encuentra la distancia de la recta 4x+3y-5=0 al punto (2,-5)
4) Encuentra la distancia de la recta 3x-4y-12=0 al punto (-2,-1)
5) Encuentra la distancia de la recta 6x-8 y + 10=0 al punto (4,2)
6) Encuentra la distancia de la recta 5x-12y + 17=0 al punto (-3,-2)

En los ejercicios del 7 al 12, encuentra la distancia entre las dos rectas paralelas.

7) $3x + 4y - 12 = 0$
$3x + 4y + 7 = 0$

8) $70x + 24y + 43 = 0$
$35x + 12y - 24 = 0$

9) $15x + 8y + 30 = 0$
$15x + 8y - 4 = 0$

10) $9x + 12y - 27 = 0$
$9x + 12y + 33 = 0$

11) $5x + 12y - 10 = 0$
$5x + 12y + \frac{2}{3} = 0$

12) $70x + 24y + 50 = 0$
$12x + 16y - 12 = 0$

CAPÍTULO 6

GEOMETRÍA ANALÍTICA
SEGUNDA PARTE

En este capítulo estudiaremos las curvas que resultan de la intersección de un cono de dos mantos con un plano. Dichas curvas se llaman SECCIONES CONICAS. Las secciones cónicas generales son: la circunferencia, la elipse, la hipérbola y la parábola.

Todas las secciones cónicas pueden representarse mediante ecuaciones de segundo grado con dos variables y recíprocamente, toda ecuación de segundo grado describe una sección cónica o algún caso degenerado de ella.

En este capítulo trataremos en detalle cada una de las secciones cónicas así como las relaciones que existen entre sus gráficas y sus ecuaciones.

6.1 Introducción

A la función cuadrática que conoces $y=ax^2+bx+c$ le agregamos el término y^2 ó xy, la relación sigue siendo cuadrática pero puede que no sea una función. Verás en este capítulo como son las gráficas de estas relaciones y cómo están relacionadas con un cono circular recto. De ahí el nombre de Secciones Cónicas.
Estas secciones cónicas son buenos modelos matemáticos de los planetas, aeroespacio y otros objetos que viajan sobre la influencia de la gravedad.

Definición

> Una relación cuadrática es una relación especificada por la ecuación
> $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$
> donde A,B,C,D,E y F están como constantes.

Tu objetivo va a ser determinar cómo van a ser las gráficas de tal relación y cómo las 6 constantes afectan la gráfica.

Ejercicio 6.1

Para empezar traza una gráfica de cada relación, escoge valores para x y calcula los valores correspondientes para y hasta que tengas suficientes puntos para trazar una curva, cuando hayas terminado, ve si puedes tener algunas conclusiones acerca de la forma, tamaño y locación de cada gráfica.

1. $\{(x,y):x^2+y^2=25\}$
2. $\{(x,y):x^2+y^2+6x=16\}$
3. $\{(x,y):x^2+y^2-49=21\}$
4. $\{(x,y):x^2+y^2+6x-4y=12\}$

6.2 Circunferencia

En el ejercicio que acabas de resolver descubriste que las gráficas de algunas relaciones cuadráticas son círculos. En esta sección vas a aprender por qué esto es verdad y a utilizar los resultados para dibujar las gráficas rápidamente.

Objetivo

> Dar la ecuación de una circunferencia y ser capaz de dibujar la gráfica rápidamente.

Para lograr este objetivo vas a empezar con la definición geométrica del círculo y usar esa definición para saber cómo es la ecuación de un círculo.

Definición geométrica de la circunferencia

> Una circunferencia es un conjunto de puntos en un plano, en donde cada uno de estos puntos son equidistantes de un punto fijo llamado centro.

Imagina que un círculo con radio r unidades tiene su centro en el punto fijo (h,k) en el sistema coordenado cartesiano, como lo muestra la figura 6.2*a*. Donde la distancia entre (x,y) y (h,k) es el radio (r) del círculo. La distancia puede ser expresada en términos de las coordenadas de dos puntos usando la fórmula de la distancia.

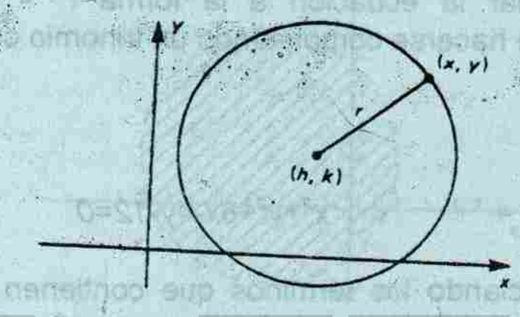


Figura 6.2*a*

Objetivo

> Expresar la distancia entre dos puntos en el sistema coordenado cartesiano, en términos de las coordenadas de los puntos.

La figura 6.2*b* muestra que Δx, Δy y la distancia d entre los dos puntos, son las medidas de los lados de un triángulo rectángulo.

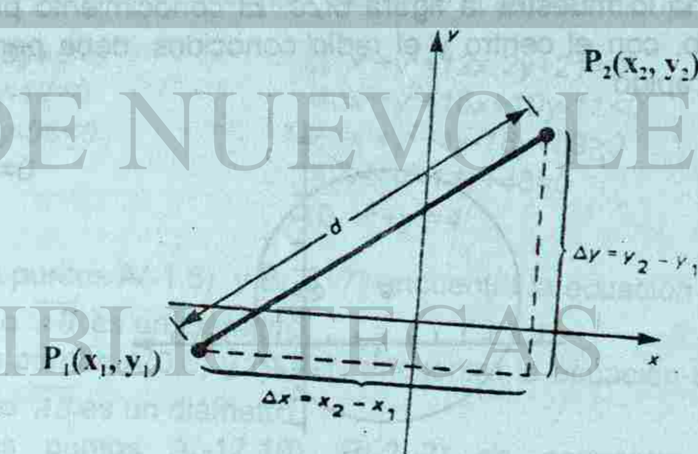


Figura 6.2*b*

Por el teorema de Pitágoras, obtenemos:

$d^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2$ sustituyendo *r* por *d*, *x-h* por x, y *y-k* por y nos queda

$$r^2=(x-h)^2+(y-k)^2,$$

que es la ecuación en forma reducida del círculo con centro en *(h,k)* y radio=*r*. Si el centro está en el origen, entonces $(h,k)=(0,0)$. En este caso la ecuación se reduce a:

$$x^2+y^2=r^2$$

Para mostrar que la gráfica de una ecuación dada representa una circunferencia, es suficiente transformar la ecuación a la forma $r^2=(x-h)^2+(y-k)^2$. Esta transformación debe hacerse completando un trinomio cuadrado perfecto.

Ejemplo.

Gráfica la relación :

$$x^2+y^2+6x-4y-12=0$$

Solución

Conmutando y asociando los términos que contienen *x* y x^2 y los términos que contienen *y* y y^2, después agregando la constante 12 a ambos miembros nos dá :

$$(x^2+6x+\_\ )+(y^2-4y+\_\ )=12$$

Los espacios en blanco dentro del paréntesis son para que completes trinomios cuadrados perfectos, agregando 9 y 4 en la izquierda, y en la derecha para obtener una ecuación equivalente, o sea :

$$(x^2+6x+9)+(y^2-4y+4)=12+9+4$$

$$(x+3)^2+(y-2)^2=25$$

Por lo tanto la gráfica va a ser una circunferencia de 5 unidades de radio con centro en *(h,k)*= (-3,2) como lo muestra la figura 6.2*c*. El conocimiento previo de que la gráfica es un círculo, con el centro y el radio conocidos, debe permitirte trazar la gráfica mucho más rápido.

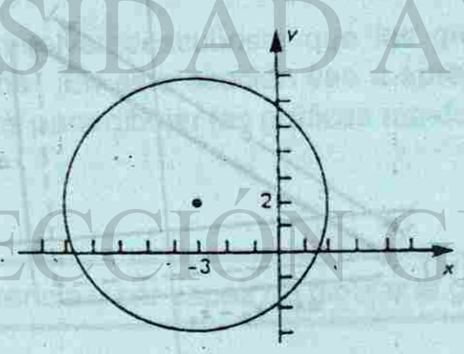


Figura 6.2*c*

Uno de los objetivos es determinar los efectos de las constantes *A,B C,D,E* y *F* en la gráfica de :

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

Lo anterior nos lleva a la conclusión acerca del tamaño relativo de *A* y *C*.
La gráfica de una relación cuadrática va a ser un círculo si los coeficientes de los términos x^2 y y^2 son iguales (y el término *xy* es cero).
Si la expresión es una desigualdad, entonces la gráfica va a ser la región de adentro del círculo, si el símbolo es "<" como es indicado en la figura 6.2*d*, o fuera del circulo si el símbolo es ">"

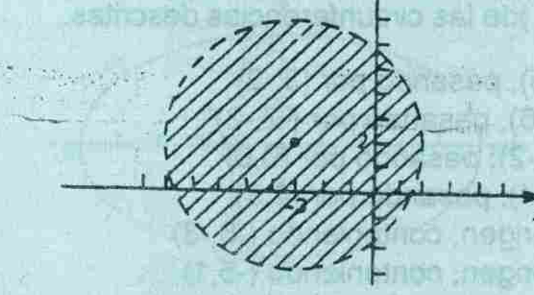


Figura 6.2*d*

Los siguientes ejercicios son para que practiques las gráficas de círculos y regiones circulares dados por la ecuación o desigualdad.

Ejercicio 6.2

Para los ejercicios del uno al diez, completa el trinomio cuadrado perfecto (si es necesario) para encontrar el centro y el radio. Después dibuja la gráfica.

1. $x^2+y^2-10x+8y+5=0$
2. $x^2+y^2+12x-2y+21=0$
3. $x^2+y^2-6x-4y-12>0$
4. $x^2+y^2+16x+10y-11<0$
5. $x^2+y^2-8x+6y-56\leq 0$
6. $x^2+y^2+4x-18y+69\geq 0$
7. $x^2+y^2+4x-5=0$
8. $x^2+y^2-14y+48=0$
9. $x^2+y^2=49$
10. $x^2+y^2=4$
11. Dados los puntos A(-1,5) y B(-5,-7) encuentra la ecuación de la circunferencia si el segmento $\overline{AB}$ es un diámetro.
12. Dados los puntos A(0,6) y B(3,-1) encuentra la ecuación de la circunferencia si el segmento $\overline{AB}$ es un diámetro.
13. Dados los puntos A(-12,10), B(-2,-2) en encuentra la ecuación de la circunferencia si el segmento $\overline{AB}$ es un diámetro.

14. Encuentra la ecuación de la circunferencia de diámetro, el segmento que une los puntos (6,-2) y (2,-4).
15. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro (-2,3) que sea tangente a la recta 20x -21y - 42 = 0 .
16. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro (5,-2) y que es tangente a la recta 3x -4y +4 = 0.
17. Encuentra la ecuación de la circunferencia con centro (2,-1) que sea tangente a la recta 3x- 4y+ 5=0.
18. Encuentra la ecuación de la circunferencia con centro (-3,-4) y que es tangente a la recta 3x +4y - 15 = 0

Para problemas del 19 al 25 escribe la ecuación en forma reducida ($r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$)de las circunferencias descritas.

19. Centro en (7,5), pasando por (3,-2)
20. Centro en (-4,6), pasando por (-2,-3)
21. Centro en (-9,-2), pasando por (0,0)
22. Centro en (5,-4), pasando por (0,3)
23. Centro en el origen, conteniendo (-6,-8)
24. Centro en el origen, conteniendo (-5,1)
25. Escribe la ecuación en forma reducida para una circunferencia :
    a. de radio *r*, con centro en un punto del eje *x*
    b. de radio *r*, con centro en un punto del eje *y*
    c. con radio *r*. y centro en el origen.
26. ¿Qué supones que significa círculo de un punto? ¿Cómo puedes saber de la ecuación, que el círculo, es un círculo de un punto?
27. A veces la gráfica de una relación cuadrática no tiene puntos ¿Cómo puedes saber a base de la ecuación si esto va a suceder?
28. Introducción a Elipses. En este problema vas a encontrar como es la gráfica, si los coeficientes de x^2 y y^2 no son iguales, pero tienen el mismo signo. Haz las siguientes cosas para la relación cuya ecuación es :

$$9x^2+25y^2=225$$

    a. Resuelve la ecuación para *y* en términos de *x*
    b. Explica porque hay dos valores para *y* por cada valor de *x* entre -5 y 5.
    c. Explica porque no hay valores reales para *y* cuándo *x*>5 y *x*<-5
    d. Calcula valores para *y* por cada valor entero de *x* entre -5 y 5.
    e. Traza la gráfica, debes obtener una figura cerrada llamada Elipse.

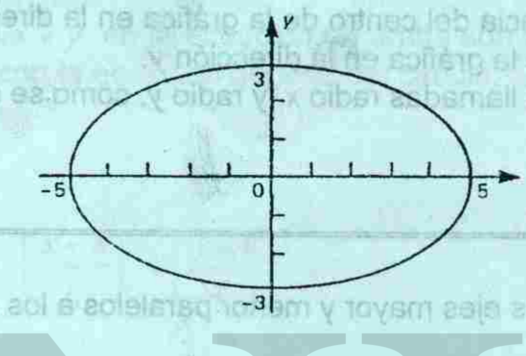
6.3 Elipse

Objetivo

Dada la ecuación de una elipse.
a. Dibuja la gráfica b. Calcula el radio focal y traza los focos

Si en la ecuación del círculo los coeficientes de x^2 y y^2 son iguales, en la Elipse son diferentes pero con el mismo signo. Si hiciste el problema 20 del ejercicio 8.2 encontraste que la gráfica de :

$$9x^2+25y^2=225$$



$9x^2 + 25y^2 = 225$

Mostrada en la figura 6.3*a* es una Elipse.

Figura 6.3*a*

Aprenderás en esta sección las propiedades de las Elipses que te van a permitir trazar las gráficas rápidamente.
Las partes de la gráfica de una Elipse tienen nombres especiales como lo muestra la figura 6.3*b*. Ahora si tu sabes cuál es el centro y cuánto mide el eje mayor y el menor, puedes dibujar la gráfica rápidamente. El truco está en transformar la ecuación, para que estas longitudes aparezcan.

Ejemplo

Empezaremos con $9x^2+25y^2=225$
divides ambos miembros de la igualdad por 225 para que el miembro derecho sea igual a 1.

$$\frac{9x^2}{225}+\frac{25y^2}{225}=\frac{225}{225}$$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{29}=1$$

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2=1$$

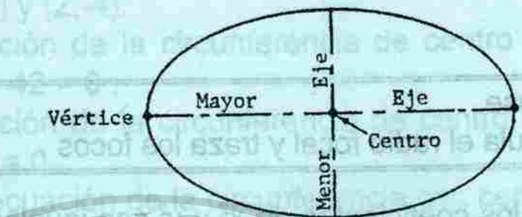


Figura 6.3b

El 5 bajo x es la distancia del centro de la gráfica en la dirección x. El 3 bajo y es la distancia del centro de la gráfica en la dirección y.
Estas distancias serán llamadas radio x y radio y, como se muestra en la figura 6.3*c*

Definición

Radio x y radio y.
Si una elipse tiene sus ejes mayor y menor paralelos a los ejes coordenados entonces
El radio x es la distancia del centro de la Elipse en la dirección x y,
El radio y es la distancia del centro de la elipse en la dirección y.

Comparando las gráficas en las figuras 6.3*b* y 6.3*c*, puedes ver que el radio x y el radio y son cada uno la mitad del eje mayor o menor.

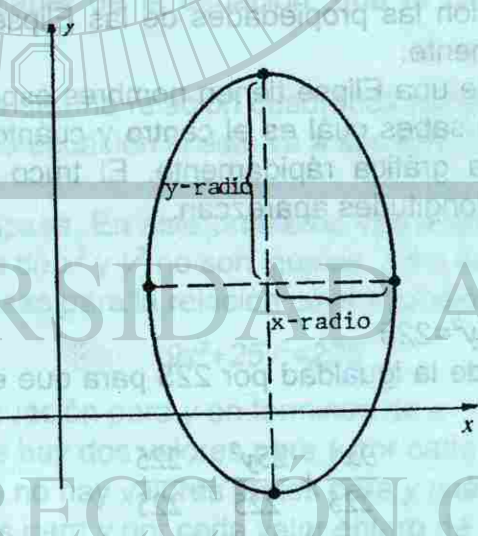


Figura 6.3*c*

La mitad del eje mayor es llamado semi eje mayor. La mitad del eje menor es llamado semi eje menor. El eje mayor de una elipse puede ser vertical como en la figura 6.3*c* u horizontal como en la figura 6.3*a*. El semi eje mayor es igual al radio y o al radio x, según sea el caso.
Sea r_x y r_y los radios x y y respectivamente la ecuación general de una elipse con centro en el origen es

$$\left(\frac{x}{r_x}\right)^2+\left(\frac{y}{r_y}\right)^2=1$$

Si el centro es $(h.k)$ entonces x y y en la ecuación de arriba son reemplazados por $(x-h)$ y $(y-k)$, como lo hicimos con la ecuación general del círculo.

Conclusión
La gráfica de :

$$\left(\frac{x-h}{r_x}\right)^2+\left(\frac{y-k}{r_y}\right)^2=1$$

es una elipse con centro en el punto (h,k) que tiene r_x unidades desde el centro en la dirección positiva y negativa de x. r_y unidades desde el centro en la dirección positiva y negativa de y.

Ejemplo 1.

Dibuja la gráfica de :

$$25x^2+9y^2-200x+18y+184=0$$

Solución

Para dibujar la gráfica rápidamente debes transformar la ecuación a la forma anterior completando el cuadrado. Primero restas 184 a ambos miembros, conmutas y asocias lo que te queda en el miembro izquierdo, obteniendo

$$(25x^2-200x)+(9y^2+18y)=-184$$

Sacando de factor común los coeficientes de x^2 y y^2 nos queda

$$25(x^2-8x+\_)+9(y^2+2y+\_)=-184$$

los espacios en blanco son para que completes el cuadrado, agregando 16 y 1 completas los cuadrados en el miembro izquierdo y requieres agregar 25· 16 y 9· 1 en el miembro derecho para balancear la igualdad o sea,

$$25(x^2-8x+16)+9(y^2+2y+1)=-184+25\cdot 16+9\cdot 1$$

Escribiendo en términos de cuadrados perfectos el miembro izquierdo y haciendo operaciones en el derecho nos queda :

$$25(x-4)^2+9(y+1)^2=225$$

Dividiendo ambos miembros por 225 obtenemos la ecuación de la forma deseada

$$\frac{25(x-4)^2}{225}+\frac{9(y+1)^2}{225}=\frac{225}{225}$$

$$\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{25}=1$$

$$\left(\frac{x-4}{3}\right)^2+\left(\frac{y-(-1)}{5}\right)^2=1$$

La gráfica es una elipse con centro en el punto (4,-1) con radio x de 3 unidades y radio y de 5 unidades.
La gráfica debe ser dibujada rápidamente trazando los cuatro puntos críticos como lo muestra la figura 6.3*d*

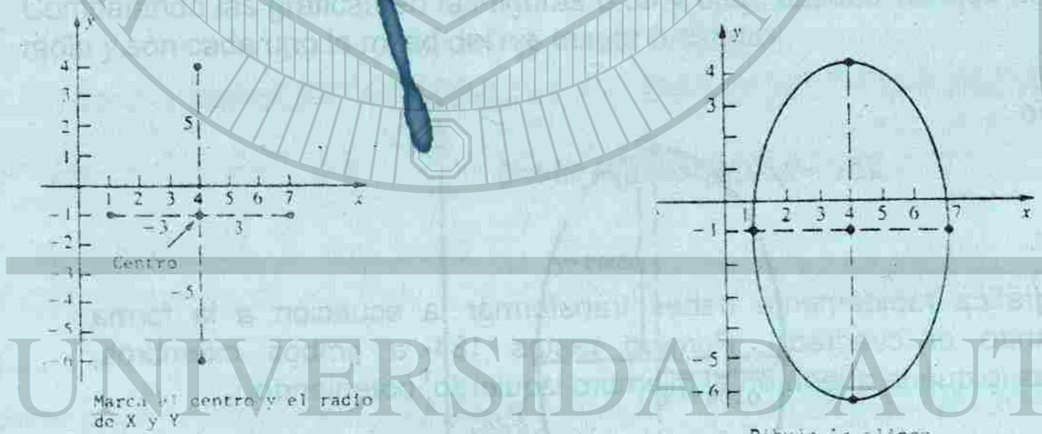
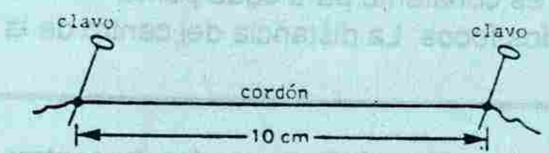


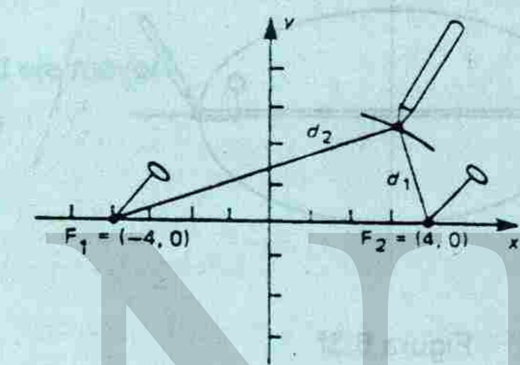
Figura 6.3*d*

Si el símbolo de = es reemplazado por los de "< ó >", entonces la gráfica va a ser la región de adentro de la elipse o afuera de la elipse respectivamente.

Hay un par de puntos asociados con la elipse que tienen propiedades geométricas importantes. Imagina que amarras dos alfileres a un pedazo de cuerda de tal manera que hay 10 cm de cuerda entre ellos. Después fijas los alfileres en los puntos $F_1=(4,0)$ y $F_2(-4,0)$ del sistema coordenado cartesiano. (Ver figura 6.3*e*).

Poniendo un lápiz como lo muestra la figura y manteniendo la cuerda apretada, puedes dibujar una curva que resulta ser la elipse de la figura 6.3*a*.





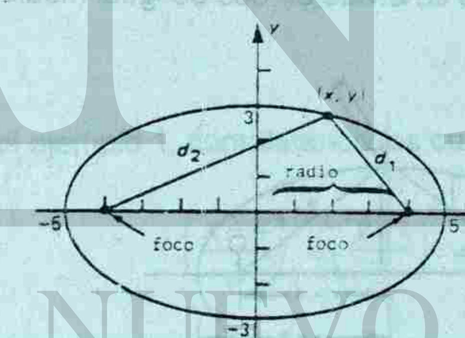


Figura 6.3*e*

Definición

Una elipse es un conjunto de puntos en un plano. La suma de sus distancias d_1+d_2 desde dos puntos fijos F_1 y F_2 es constante para cada punto.
Cada punto F_1 y F_2 son llamados focos. La distancia del centro de la elipse al foco es llamada radio focal.

Colocando el lápiz en dos puntos estratégicos puedes encontrar la manera de calcular el radio focal.
Colocando en el eje *x* como en la figura 8.3*f* puedes ver que la longitud del eje mayor es igual a la de la cuerda. Esto es la suma constante de las distancias d_1+d_2, es igual a la longitud del eje mayor.

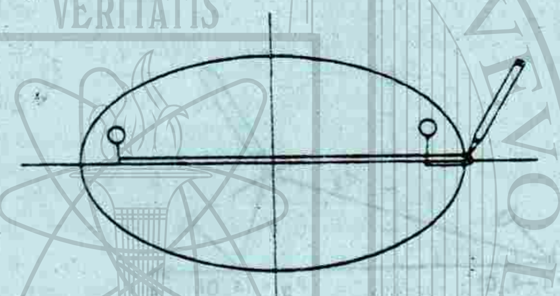


Figura 6.3f

Colocando el lápiz en el eje *y*, como en la figura 6.3*g*. Se forma un triángulo isósceles, cuya longitud de la cuerda se divide en dos de igual medida.

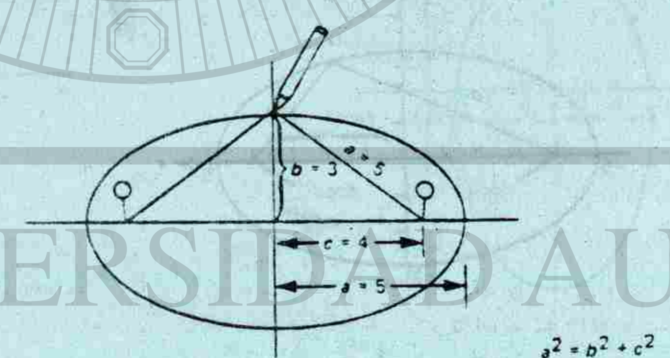


Figura 6.3*g*.

Si los radios *x* y radio *y* son conocidos entonces el semi eje mayor es más largo y el semi eje menor el más pequeño. Dejando que *a* represente el semi eje mayor, y *b* el semi eje menor y *c* el radio focal, entonces la siguiente conclusión es cierta.

Conclusión

En una Elipse
Si:
a es la longitud del semi eje mayor.
b es la longitud del semi eje menor.
c es el radio focal y
d_1 y d_2 son las distancias desde un punto *(x,y)* en la elipse a los dos focos.
Entonces
$d_1+d_2=2a$= longitud eje mayor.
$a^2=b^2+c^2$ de donde
$c^2=a^2-b^2$

Ejemplo 2.

Encuentra los focos de :

$$25x^2+9y^2-200x+18y+184=0$$

Solución.

Esta es la elipse del ejemplo 1, completando los cuadrados nos dá

$$\left(\frac{x-4}{3}\right)^2+\left(\frac{y+1}{5}\right)^2=1$$

entonces $a=5$ y $b=3$. Usando el hecho de que

$$c^2=a^2-b^2$$

$$c^2=5^2-3^2$$

$$c^2=16$$

$$c=4$$

Ya que el eje mayor está en dirección de y, los focos van a estar ubicados verticalmente en 4 unidades desde el centro de la elipse (figura 6.3*h*)

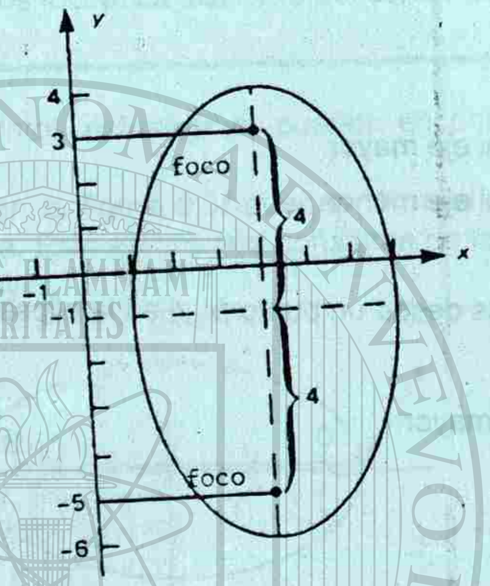


Figura 6.3*h*

El siguiente ejercicio está diseñado para darte práctica dibujando las gráficas de las elipses y encontrando los focos.

Ejercicio 6.3

a. Cuál es el radio del círculo $(x-5)^2+(y-2)^2=49$
b. Donde esta el centro del círculo $(x+3)^2+(y-4)^2=25$
c. Completa el cuadrado x^2+2ax+ ____________
d. Escribe $x^2-8x+16$ como un binomio al cuadrado
e. Encuentra k, si (3,4) está en la gráfica de $y=kx^2$
f. Resuelve
g. Resuelve $|x-11|=2$
h. Simplifica $7+3(x-5)$
i. Encuentra el 90% de 90
j. Resuelve $-3x<10$

Para problemas del 1 al 16

a. Dibuja la gráfica de la relación
b. Calcula el radio focal y traza los dos focos
c. Transforma la ecuación a la forma canónica y graficala.

1. $4x^2+9x^2-16x+90y+205=0$
2. $12x^2+y^2=48$
3. $4x^2+36y^2+40x-288y+532=0$
4. $5x^2+8y^2=77$
5. $49x^2+16y^2+98x-64y-671=0$
6. $25x^2+49y^2=1225$
7. $25x^2+4y^2-150x+32y+189=0$
8. $100x^2+36y^2=3600$

9. $x^2+4y^2+10x+24y+45=0$
10. $36x^2+9y^2-216x=0$
11. $16x^2+y^2-128x-20y+292=0$
12. $16x^2+25y^2-300y+500=0$
13. $25x^2+9y^2+50x-36y-164<0$
14. $x^2+9y^2=36$
15. $4x^2+36y^2+48x+216y+324\geq 0$
16. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}<1$

17.Imagina que eres el jefe de matemáticas de la compañía de construcción Amado Garza. Tu compañía tiene un contrato para construir un estadio de fútbol en la forma de dos elipses concéntricas. Con el terreno adentro de la elipse interior y los asientos entre las dos elipses. Los asientos están en la intersección de las gráficas de :

$$x^2+4y^2>100 \quad y \quad 25x^2+36y^2<3600$$

Donde cada unidad de la gráfica representa 10 metros.

a. Dibuja el área donde están los asientos
b. Tu encuentras que el área de una región elíptica es , donde *a* y *b* son los semi ejes y el departamento de ingeniería estima que cada asiento ocupa 0.8 metros cuadrados. ¿Cuál es la capacidad del área de asientos del estadio?

18. Muestra que la ecuación de una elipse

$$\left(\frac{x-h}{r_x}\right)^2+\left(\frac{y-k}{r_y}\right)^2=1$$

se reduce a la ecuación de un círculo si $r_x=r_y$

19. Introducción a las Hipérbolas.
Las elipses que has trazado en ésta sección tienen ecuaciones en donde los términos x^2 y y^2 tienen el mismo signo. En este problema vas a ver como es la gráfica si los signos de x^2 y y^2 son opuestos. Haz las siguientes indicaciones que se te piden de la ecuación :

$$9x^2-16y^2=144$$

a. Resuelve la ecuación para y en términos de x
b. Explica porque no va a haber valores reales para y, cuando $-4<x<4$
c. Explica porque va a haber 2 valores para y por cada valor de x, cuando $x>4$ ó $x<-4$
d. Haz una tabla de valores de y por cada valor entero de x, desde 4 hasta 8, incluyendo aproximaciones decimales, donde sea necesario.
e. Explica porque puedes usar la misma tabla de valores de y. Por valores de x entre $-4y$, -8
f. Traza la gráfica de la relación desde $x=-4$ hasta $x=-8$ y desde $x=4$ hasta $x=8$

g. En el mismo sistema coordenado cartesiano traza las gráficas de las líneas

$$y = \frac{3}{4}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{3}{4}$$

Si la gráfica de la parte *f* es correcta, entonces estas rectas son las **asíntotas** diagonales de la curva.
La gráfica es llamada Hipérbola y es una curva no cerrada con dos ramas.

6.4 Hipérbola

En la ecuación de la elipse los coeficientes de x^2 y y^2 no son iguales pero tienen el mismo signo. En cambio si x^2 y y^2 tienen signos opuestos, tal como

$$9x^2-16y^2=144$$

Entonces la gráfica luce como la figura 6.4*a* y es llamada una Hipérbola. Tu descubriste esto haciendo el problema 19 del ejercicio 6.3

Objetivo

Dada la ecuación de la Hipérbola, ser capaz de dibujar la gráfica rápidamente.

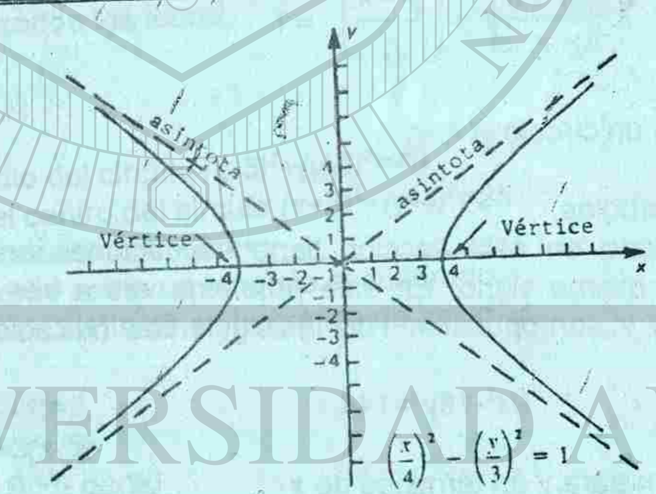


Figura 6.4*a*

Las Hipérbolas tienen dos ramas separadas, cada rama se aproxima a una asíntota diagonal.
Tu puedes ver porque transformando la ecuación de manera que *y* esté sola en el miembro izquierdo

$$-16y^2=-9x^2+144$$

$$16y^2= 9x^2-144$$

$$16y^2= 9(x^2-16)$$

$$y^2 = \frac{9}{16}(x^2-16)$$

$$y = \pm\frac{3}{4}\sqrt{x^2-16}$$

Dos observaciones acerca de la gráfica, se pueden hacer de esta ecuación.

1. No hay valores reales de *y* cuando *x* está entre -4 y 4 porque el radical x^2-16 sería negativo
2. Cuando *x* es mayor, la diferencia entre $\sqrt{x^2-16}$ y $\sqrt{x^2}$ se acerca a cero. Por ejemplo si *x=100*, entonces

$$\sqrt{x^2-16} = \sqrt{10{,}000-16} = \sqrt{9984} = 99.92$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{10{,}000} = 100.$$

Consecuentemente mientras *x* sea mayor, y se acerca a $\pm\frac{3}{4}\sqrt{x^2}$ o $\pm\frac{3}{4}x$, que son las asíntotas de la gráfica, cuyas inclinaciones son $\frac{3}{4}$ y $-\frac{3}{4}$

El 4 y el 3 en las inclinaciones de las asíntotas pueden mostrarse en la ecuación haciendo el miembro derecho igual a 1.

$$9x^2-16y^2=144$$

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2-\left(\frac{y}{3}\right)^2=1$$

En esta forma, el 4 abajo de la *x* está en la misma posición que el radio *x* para una elipse. El 3 bajo *y* está en la misma posición que el radio *y* como se muestra en la figura 6.4*b*, el radio *x*, es, en este caso, la distancia del centro al vértice de la hipérbola en la dirección *x*. El radio *y* es la distancia entre el vértice y la asíntota, ya sea hacia arriba o hacia abajo.

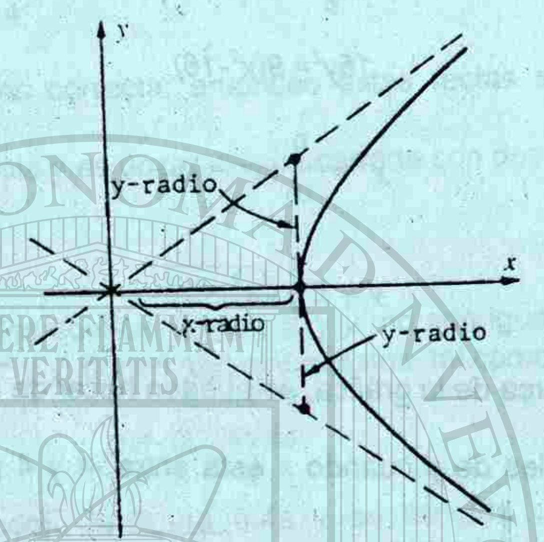


Figura 6.4*b*

Si los signos han sido invertidos, como por ejemplo

$$-\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2=1$$

entonces la hipérbola va a tener dos ramas abriéndose en la dirección *y*. Las asíntotas van a seguir teniendo sus pendientes y Pero los vértices van a ser 3 unidades desde el centro en la dirección *y*, ya que el radio *y* es 3. El radio *x* será la distancia del vértice de la hipérbola a las asíntotas en la dirección *x*. La gráfica se muestra en la figura 6.4*c*

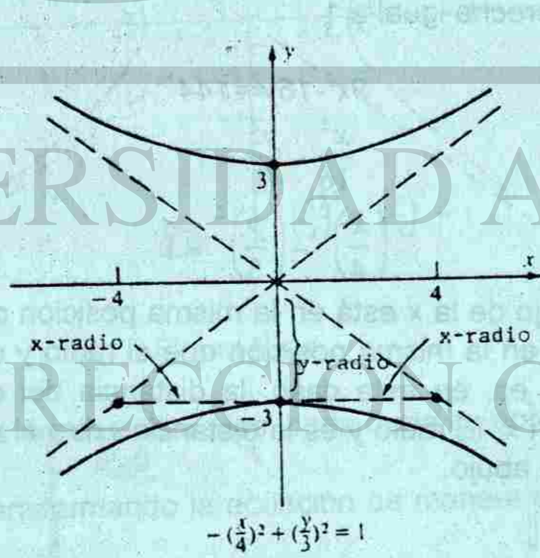


Figura 6.4*c*

Las ecuaciones de las dos hipérbolas

$$-\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2=1 \quad \text{y} \quad \left(\frac{x}{4}\right)^2-\left(\frac{y}{3}\right)^2=1$$

Son similares con la excepción de que los signos están invertidos en el lado izquierdo. Las dos hipérbolas resultantes se dicen conjugadas una de la otra. Tienen las mismas asíntotas y los mismos radios de *x* y *y*. Pero una se abre en la dirección *y* y la otra se abre en la dirección *x*. Cuando la ecuación es escrita en la forma que aparece un uno en el miembro derecho como arriba. La hipérbola se abre en la dirección del término cuadrado que tenga signo positivo.
El eje que cruza la hipérbola, de vértice a vértice, es llamado el eje transverso. El otro es llamado el eje conjugado porque es el eje de la hipérbola conjugada.
Hay una definición geométrica de la hipérbola similar a la elipse. Para cada punto de la hipérbola la diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.

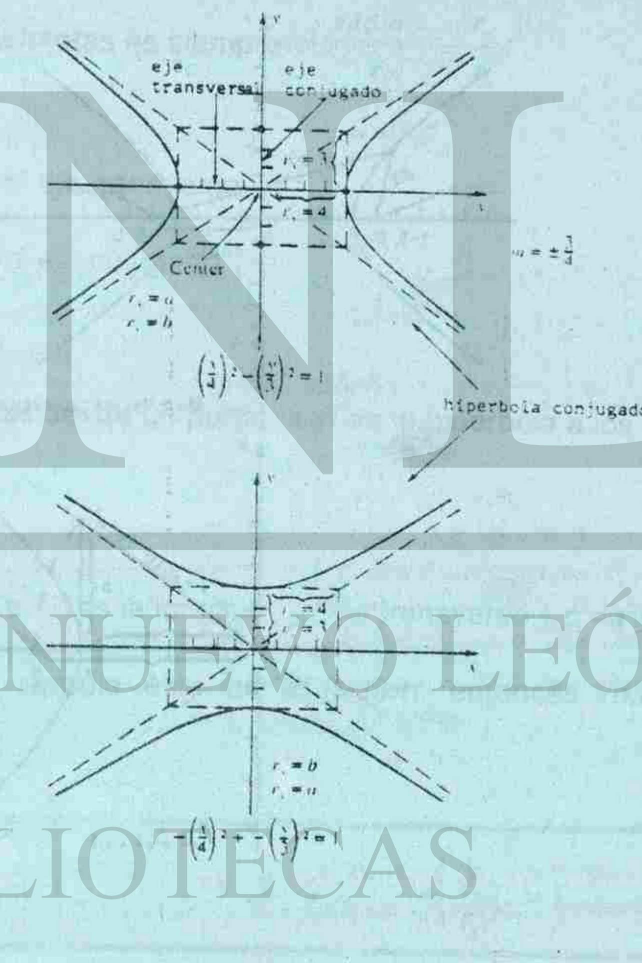


Figura 6.4*d*

Definición

Una hipérbola es un conjunto de puntos en un plano. Para cada punto (x,y) de la hipérbola, la diferencia entre sus distancias desde dos puntos fijos llamados focos es una constante.

La figura 6.4*e* ilustra esta definición, deja que *a* y *b* representen los semi ejes transverso y conjugado respectivamente. Los valores de *a* y *b* van a ser los radios de *x* y *y*. Si la hipérbola se abre en la dirección *x*, entonces $a=r_x$. Si se abre en la dirección de *y* entonces $a=r_y$.

Para las hipérbolas, la hipotenusa del triángulo mostrado en la derecha de la figura 6.4*e* es igual al radio focal. Dejando que *c* represente el radio focal, el teorema de Pitágoras nos da $c^2=a^2+b^2$,entonces en este caso $c^2=4^2+3^2=25$, por lo que $c=5$

La discusión anterior ha sido para una hipérbola con centro en el origen. Si el centro está en (h,k), la *x* en la ecuación es reemplazada por $(x-h)$ y *y* es reemplazada por $(y-k)$.

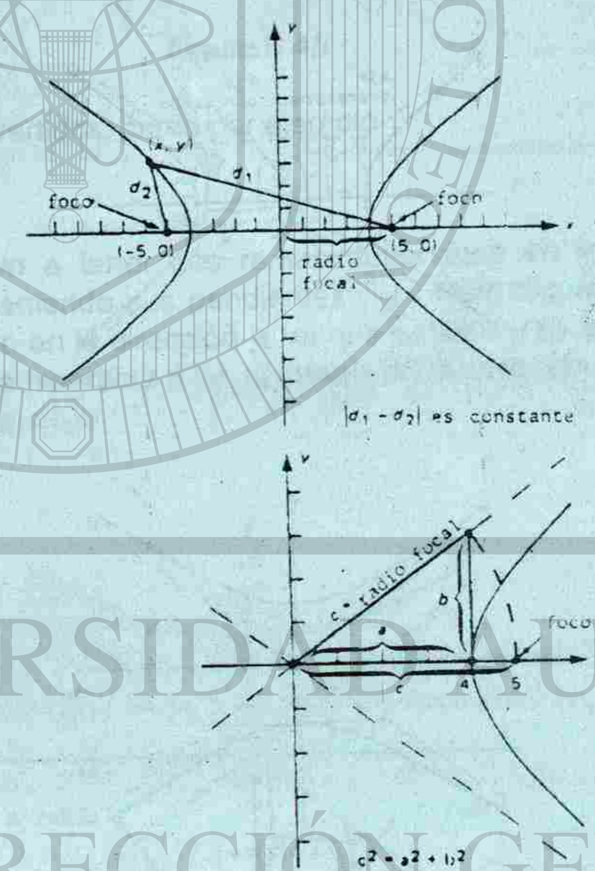


Figura 6.4*e*

Conclusiones

La ecuación general de una hipérbola es

$$\left(\frac{x-h}{r_x}\right)^2-\left(\frac{y-k}{r_y}\right)^2=1 \quad ó \quad -\left(\frac{x-h}{r_x}\right)^2+\left(\frac{y-k}{r_y}\right)^2=1$$

La hipérbola se abre en la dirección de *x*. Si el signo del término que contiene x es positivo.

La hipérbola se abre en la dirección de *y*. si el signo del término que contiene y es positivo.

La inclinación de las asíntotas es siempre $\pm\frac{radio\ y}{r_x}=\frac{r_y}{r_x}$

Si:

a es la longitud del semi eje transverso

b es la longitud del semi eje cojugado

c es el radio focal , y

d_1 y d_2 son las distancias desde un punto (x,y) en la hipérbola a los dos focos.

Entonces:

[illegible]a es la longitud [illegible]el eje transverso y $c^2=a^2+b^2$

[illegible] centro de la [illegible]pérbola está en el origen, entonces $(h,k)=(0,0)$ y estas [illegible]

$$\left(\frac{x}{r_x}\right)^2-\left(\frac{y}{r_y}\right)^2=1 \quad ó \quad -\left(\frac{x}{r_x}\right)^2+\left(\frac{y}{r_y}\right)^2=1$$

Ejemplo 1

Dibuja la gráfica de la ecuación : $9x^2-4y^2+90x+32y+197=0$

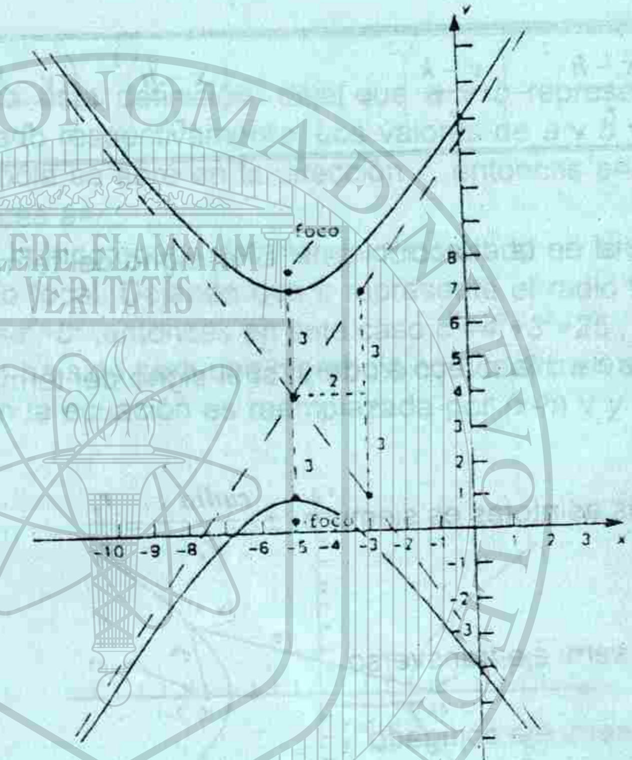


Figura 6.4*f*

Solución

Primero trans[illegible] la ecuación completando los trinomios cuadrados perfectos de la siguiente ma[illegible]ra :

$$9(x^2+10x+\quad)-4(y^2-8y+\quad)=-197$$

$$[illegible]x-25)-4(y^2-8y+16)=-197+9.25-4.16$$

$$9(x+5)^2-4(y-4)^2=-36$$

[illegible] $= 1$

$$-\left(\frac{x+5}{2}\right)^2+\left(\frac{y-4}{3}\right)^2=1$$

La gráfica es una hipérbola abriéndose en la dirección de *y* con centro en (-5,4). Las asíntotas son de inclinaciones $\pm\frac{3}{2}$ y vértices del eje transverso 3 unidades hacia arriba, y hacia abajo en la dirección de *y*.

Usando esta información, primero debes localizar el centro después, dibujar las asíntotas con la inclinación apropiada. Los únicos puntos que necesitas trazar son los vértices. Con esta información procedes a gráficar la hipérbola como se muestra en la figura 6.4*f*

Ejemplo 2

Encuentra y traza los focos de la hipérbola del ejemplo 1.

Solución

$$c^2=a^2+b^2$$

$$c^2=2^2+3^2$$

$$c^2=13$$

$$c=\sqrt{13}$$

$$c=3.61$$

Los focos son ±3.61 unidades desde el centro, como lo muestra la figura.

Ejercicio 6.4

Contesta las preguntas.

a. Evalúa : $7x^2+3x+\frac{9}{96}$

b. Simplifica: $-3x$ [illegible] $+5|-17$

c. Multipl[illegible] [illegible] $x-xy)$

d. factoriz[illegible] $(x+$ [illegible]

e. ¿Qu[illegible] ene la ecuación general $y=a\cdot b^x$?

Para pro[illegible]

a. Com[illegible] adrad[illegible] (si es necesario) encuentra el centro, dibuja las asíntotas, traza los [illegible]tices, desp[illegible]s dibuja [illegible]rafica

b. [illegible] la [illegible] focal y traza los focos.

1. [illegible] $96y-444=0$
2. $4x^2-9y^2+16x+108y-344=0$
3. $-9y^2+30$[illegible]$126y+684=0$
4. $4x^2-36y^2-40x+216y-80=0$
5. y^2+4x+1[illegible]$=0$
6. $x^2-y^2-4x-8y+796=0$
7. $9x^2-y^2-90x+4$[illegible]$+302=0$
8. $x^2-4y^2+4x+32y-96=0$

9. $9x^2-4y^2-54x-16y-79=0$
10. $25x^2-4y^2+200x-8y+796=0$
11. $16x^2-9y^2+144=0$
12. $25x^2-144y^2-3600=0$
13. $4x^2-5y^2=16$
14. $27x^2-4y^2=-36$
15. $16x^2-3y^2=-11$
16. $5x^2-7y^2=17$
17. $9x^2-y^2=0$
18. $4x^2-y^2=0$

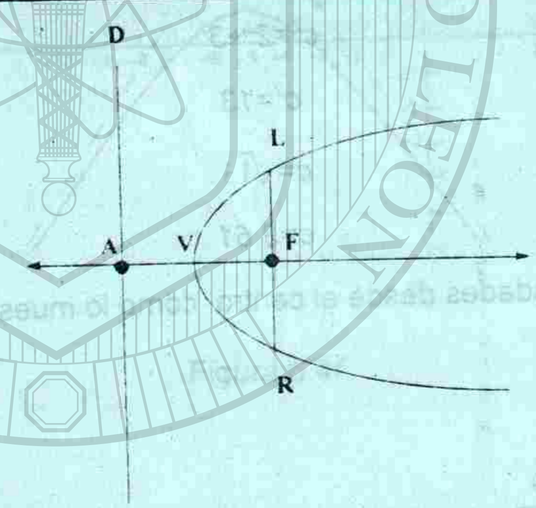
6.5 La Parábola

Objetivo

Dada la ecuación de la parábola, ser capaz de calcular el vértice, el foco y trazar la gráfica.

Definición

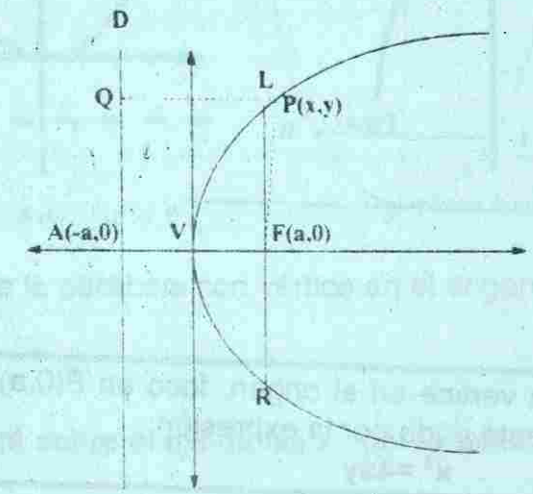
Una parábola es el conjunto de puntos en un plano que son equidistantes de un punto fijo y de una recta fija. El punto fijo F se llama foco y la recta fija D, directriz.



En la figura anterior, el punto **F** es el foco, la recta **D** es la directriz, y el punto **V** está a la mitad entre el foco y la directriz, es decir: $\overline{AV} = \overline{VF}$. El punto **V** se llama vértice y es el punto donde la parábola biseca a la recta AF, por esta razón es el eje de [illegible] dice que la parábola es simétrica con respecto a su eje. El segmento de recta $\overline{LR}$ es perpendicular a la recta AF y pasa por el foco, este segmento recibe el nombre de **lado recto.**
La recta AF biseca perpendicularmente al lado recto, es decir, $\overline{LF} = \overline{FR}$. A la recta AF que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz se le llama **eje de la parábola** o **eje focal**

Ecuación de la parábola con vértice en el origen.

Sean las coordenadas del vértice V(0,0); y del foco F(a,0), con a>0. Por lo tanto el eje de la parábola coincide con el eje de las x y la gráfica se abre hacia la derecha.



De acuerdo con la definición de la parábola $\overline{PF} = \overline{PQ}$, de donde resulta:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2} = \overline{PQ}$$
$$\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2} = x+a$$
$$\sqrt{x^2-2ax+a^2+y^2} = x+a$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación, tenemos:

$$x^2-2ax+a^2+y^2=(x+a)^2$$
$$x^2-2ax+a^2+y^2=x^2+2ax+a^2$$
$$y^2=x^2+2ax+a^2-x^2+2ax-a^2$$
$$y^2=4ax$$

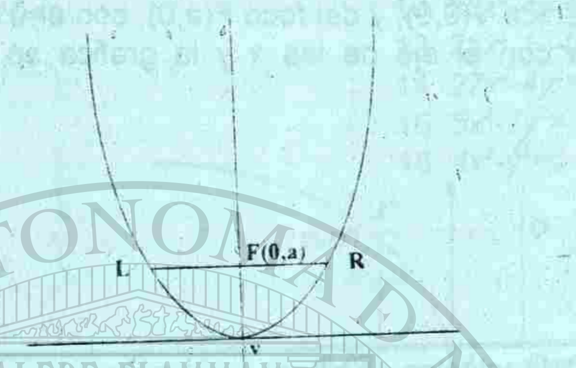
La ecuación de la parábola con vértice en el origen, eje de la parábola horizontal sobre el eje x, con a>0 está dada por:

$$y^2 = 4ax$$

En forma semejante podemos demostrar que si a<0, es decir la gráfica se abre hacia la izquierda, la ecuación de la parábola está dada por la expresión:

$$\boxed{y^2 = -4ax}$$

En el análisis anterior el foco se colocó sobre el eje de las *x*; ahora si el foco se coloca sobre el eje *y*, se intercambian los papeles de *x* y *y* , es decir, $x^2 = \pm 4ay$



La ecuación de la parábola con vértice en el origen, foco en F(0,a), a>0 y el eje focal coincide con el eje *y* a>0, está dada por la expresión:

$$x^2 = 4ay$$

Análogamente si a<0, la ecuación es: $x^2 = -4ay$

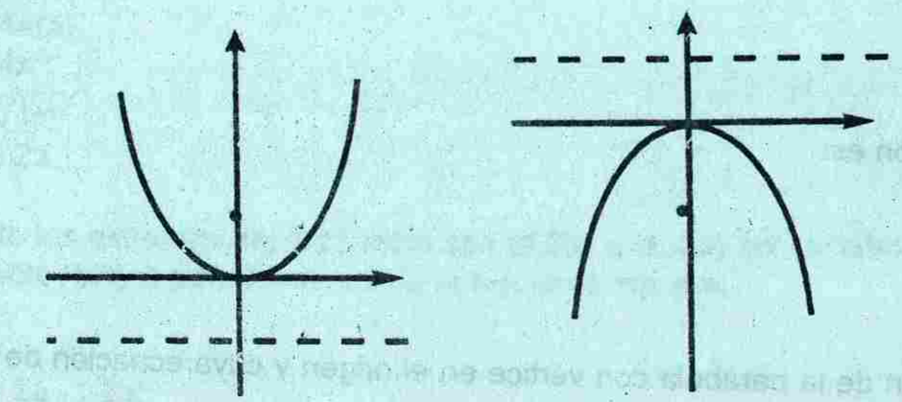
La ecuación de la parábola con vértice en el origen, foco en F(0,a), a<0 y el eje focal sobre el eje *y*, está dada por la expresión:

$$x^2 = -4ay$$

Concluyendo:

1) Si a es positivo, la parábola se abre hacia la derecha si el término cuadrático es y^2; o se abre hacia arriba si el término cuadrático si es x^2.
2) Si a es negativo, la parábola se abre hacia la izquierda si el término cuadrático es y^2 , o se abre hacia abajo si es x^2.

$y^2 = 4ax, \quad a > 0$ $\qquad$ $y^2 = -4ax, \quad a < 0$



$x^2 = 4ay, \quad a > 0$ $\qquad$ $x^2 = -4ay, \quad a < 0$

Ejemplo 1.
Encontrar la ecuación de la parábola con vértice en el origen y el foco en (4,0)

Solución:

El eje de la parábola está sobre el eje de las *x* , por lo tanto la ecuación será de la forma:

$y^2 = 4ax$, donde a = 4
$y^2 = 4(4)x$
$y^2 = 16x$

Ejemplo 2.
Encuentra la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco en (0,6).

Solución:

El eje de la parábola está sobre el eje *y* , por lo tanto la ecuación será de la forma:

$x^2 = 4ay$, donde a = 6
$x^2 = 4(6)y$
$x^2 = 24y$

Ejemplo 3.
Encuentra la ecuación de la parábola con vértice en el origen, su eje sobre el eje *x* y pasa por el punto (-3,6).

Solución:

Como el eje focal está sobre el eje *x* , la ecuación será de la forma: $y^2 = 4ax$
Como pasa por el punto (-3,6), utilizamos este punto para encontrar el valor de a.

$y^2 = 4ax$
$6^2 = 4a(-3)$
$36 = -12a$

$a = \dfrac{36}{-12}$

$a = -3$

Por lo tanto la ecuación es:

$y^2 = 4ax$

$y^2 = 4(-3)x$

$y^2 = -12x$

Ejemplo 4.
Encuentra la ecuación de la parábola con vértice en el origen y cuya ecuación de la directriz es $x + 4 = 0$

Solución:

$x + 4 = 0$, de donde resulta que $x=-4$. Como la distancia no dirigida de la directriz al vértice de la parábola es igual a la que hay del vértice al foco, entonces $a = 4$; por lo tanto:

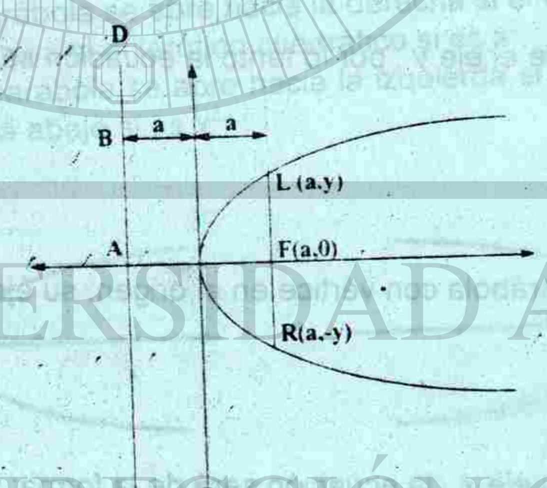
$y^2 = 4ax$

$y^2 = 4(4)x$

$y^2 = 16x$

Longitud del lado recto de la parábola

La longitud del lado recto es igual a cuatro veces la distancia del vétice al foco, es decir $\overline{LR} = 4a$ si $a>0$, como lo vamos a demostrar a continuación.



La ecuación de la parábola con vértice en el origen, con eje focal sobre el eje x como lo hemos visto es:

$y^2 = 4ax$

Si $x = a$, tenemos:

$y^2 = 4a(a)$

$y^2 = 4a^2$

$y = \sqrt{4a^2}$

$y = \pm 2a$

Por lo tanto los extremos del lado recto son $(a,2a)$ y $(a,-2a)$ por lo tanto la longitud del lado recto (LR) la determinamos de la siguiente manera:

$LR = y_2 - y_1$

$LR = 2a - (-2a)$

donde

$LR = 2a + 2a$

$LR = 4a$

La longitud del lado recto es igual a 4 veces la distancia del vértice al foco.

$LR = |4a|$

Ejemplo 5.

Dada la ecuación de la parábola: $y^2 = -16x$, encuentra:

a) La longitud del lado recto
b) Las coordenadas del foco
c) La ecuación de la directriz.

Solución:

La ecuación es de la forma $y^2 = 4ax$, por lo tanto

a)

$LR = |4a|$

$LR = |-16|$

$LR = 16$

b)

$y^2 = 4ax$

$4ax = -16x$

$4a = -16$

$a = -16/4$

$a = -4$

Por lo tanto, las coordenadas del foco son: $(-4, 0)$

c) La ecuación de la directriz es de la forma

$x + a = 0$, por lo tanto

$x - 4 = 0$ ó $x = 4$

Ejemplo 6.

Hallar: a) la longitud del lado recto, b) las coordenadas del foco y c) la ecuación de la directriz de la parábola: $x^2 = 8y$

Solución:

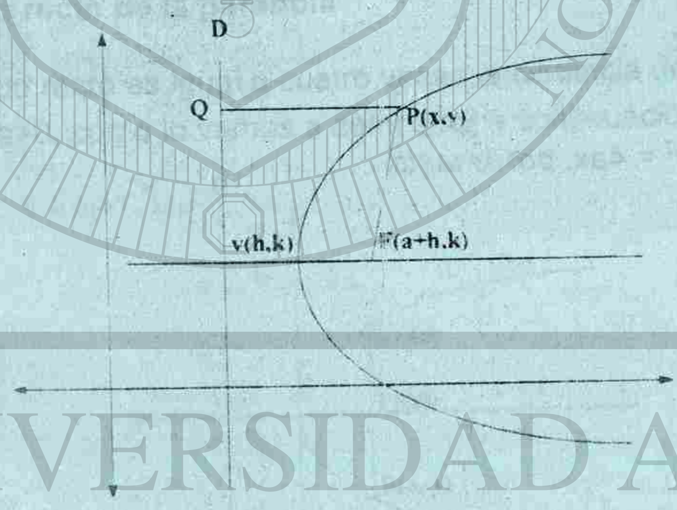
a) Lado recto. La ecuación es de la forma $x^2 = 4ay$
Por lo tanto $4a = 8$, de donde
$LR = |8| = 8$

b) Coordenadas del foco.
$4a = 8$, de donde $a = 8/4 = 2$
Por lo tanto las coordenadas del foco son (0,2)

c) Ecuación de la directriz:
$y + a = 0$
$y + 2 = 0$

Ecuación de la parábola con vértice (h,k) y eje paralelo a un eje coordenado

Consideremos ahora que el vértice de la parábola es cualquier punto (h,k) y su eje paralelo sea el eje *x*.



Consideremos la parábola de la figura anterior con vértice (h,k), eje focal paralelo al eje x y cuyo foco a una distancia *a* del vértice y a la derecha de el, directriz D y a una distancia de *a* a la izquierda del vértice, es decir, la distancia de la directriz al foco es $|2a|$. La ecuación de la directriz es: $x - h + a = 0$

Sea el punto p(x,y) un punto cualquiera de la parábola.
De acuerdo con la definición de la parábola, $\overline{PF} = \overline{PQ}$

Forma general de la ecuación de la parábola

Si en las ecuaciones: $(y-k)^2 = 4a(x-h)$, $(x-h)^2 = 4a(y-k)$, elevamos al cuadrado los binomios que se nos indican y se simplifica la expresión algebraica obtenida, obtendremos la ecuación de la forma:

$$\boxed{\begin{array}{c} y^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ x^2 + Dx + Ey + F = 0 \end{array}}$$

Al escribir así las ecuaciones de una parábola, decimos que las ecuaciones están expresadas en su **forma general**. Mientras si están escritas en la forma: $(y-k)^2=4(x-h)$ ó $(x-h)^2 = 4a(y-k)$ decimos que están escritas en la **forma reducida**.

Ejemplo 1.

Encuentra la ecuación de la parábola con vértice (-4,-1) y foco (-4,-3). En sus dos formas: reducida y general.

Solución:

El foco está por debajo del vértice, por lo tanto la parábola se abre hacia abajo, el eje focal es paralelo al eje *y*. La ecuación de la parábola está dada por la expresión:

$(x-h)^2 = 4a(y-k)$
$(x+4)^2 = 4a(y+1)$
$a = \overline{VF}$
$a = -3-(-1)$
$a = -3+1$
$a = -2$

$(x+4)^2 = 4(-2)(y+1)$

Ecuación en forma reducida:
$(x+4)^2 = -8(y+1)$

$x^2 + 8x + 16 = -8y - 8$

$x^2 + 8x + 16 + 8y + 8 = 0$

Ecuación en forma general:
$x^2 + 8x + 8y + 24 = 0$

Reducción de la forma general de la ecuación de una parábola

Así como una ecuación escrita en su forma reducida la podemos escribir en su forma general, podemos también hacer lo contrario, es decir, dada una ecuación de un parábola expresada en forma general podemos obtener la ecuación en la forma reducida. Explicaremos este proceso algebraico mediante dos ejemplos.

Ejemplo 1.

Dada la ecuación de la parábola $y^2 - 8x - 8y + 64 = 0$ escribe la ecuación en la forma reducida, y encuentra la longitud del lado recto, las coordenadas del foco, del vértice y la ecuación de su directriz.

Solución:

$y^2 - 8x - 8y + 64 = 0$

Los términos -8x y 64 pasémoslos al lado derecho de la ecuación con signo contrario.

$y^2 - 8y = 8x - 64$

Con la expresión de lado izquierdo formemos un trinomio cuadrado perfecto y agregar el mismo número en el lado derecho de la ecuación, para obtener una ecuación equivalente.

$y^2 - 8y + (-8/2)^2 = 8x - 64 + (-8/2)^2$
$y^2 - 8y + 16 = 8x - 64 + 16$
$y^2 - 8y + 16 = 8x - 48$

Un trinomio cuadrado perfecto es igual a un binomio al cuadrado, por lo tanto, si factorizamos en ambos lados de la ecuación, nos queda como

$(y-4)^2 = 8(x-6)$

Que es la ecuación de la parábola en su forma reducida.
Al comparar la ecuación $(y-4)^2 = 8(x-6)$ con $(y-k)^2 = 4a(x-h)$ podemos determinar lo siguiente :

Longitud del lado recto
$LR = 4a$
$LR = 8$

Coordenadas del vértice
$V(h,k) = V(6,4)$

Coordenadas del foco

$F(a+h,k)$
$4a = 8$
$a = 8/4$
$a = 2$

$a+h = 2+6,$
$a + h = 8$
Por lo tanto las coordenadas del foco son

$F(8,4)$

Ecuación de la directriz:

$x-h+a = 0$
$x = h-a$
$x = 6-2$
$x = 4$

Ejemplo 2.

Dada la ecuación de la parábola $x^2 + 4x + 16y + 4 = 0$, escríbela en forma reducida y además encuentra:
a) La longitud del lado recto
b) Las coordenadas del vértice
c) Las coordenadas del foco
d) La ecuación de la directriz

Solución:

$x^2 + 4x = -16y - 4$
$x^2 + 4x + (4/2)^2 = -16y - 4 + (4/2)^2$
$x^2 + 4x + 4 = -16y - 4 + 4$
$x^2 + 4x + 4 = -16y$
$(x + 2)^2 = -16y$

Por analogía con la ecuación reducida resulta:

a) Longitud del lado recto
$LR = |-16| = 16$
b) Coordenadas del vértice

$V(h,k)$
$V(-2,0)$

c) Coordenadas del foco

$F(h, a+k)$

donde

$4a = -16$

$a = -16/4 = -4$

de donde $a + k = -4 + 0 = -4$

Por lo que

$F(-2,-4)$

d) Ecuación de la directriz

$y = k-a$

$y = 0 - (-4)$

$y = 4$

Ejercicio 6.5

En los ejercicios 1 al 10 encuentra: a) La longitud del lado recto, b) las coordenadas del foco y c) la ecuación de la directriz. Para cada una de las parábolas que se indican.

1) $y^2 = 16x$
2) $y^2 = -16x$
3) $y^2 = 4x$
4) $3y^2 = 16x$
5) $y^2 = 8x$
6) $y^2 = -2x$
7) $y^2 = 24x$
8) $x^2 = 4y$
9) $x^2 = -6y$
10) $x^2 = 8y$

En los ejercicios 11 al 30, encuentra la ecuación de la parábola con vértice en el origen y que satisface las condiciones dadas.

11) Foco en (4,0)
12) Foco en (3,0)
13) Foco en (0,0)
14) Foco en (0,3)
15) Foco en (-4,0)
16) Foco en (0,-5)
17) Directriz $x = 5$
18) Directriz $y = -2$
19) Directriz $x = -4$

20) La longitud del lado recto es 10 y se abre hacia la derecha
21) La longitud del lado recto es 16 y se abre hacia abajo
22) La longitud del lado recto es 20 y se abre hacia la izquierda
23) La longitud del lado recto es 12 y se abre hacia arriba
24) Para el punto (-3,6), su eje focal se encuentra sobre el eje *x*.
25) El foco está sobre el eje *x* y la parábola pasa por el punto (3,4)
26) La parábola pasa por el punto (-3,4) y su eje focal está sobre el eje *x* .
27) La parábola pasa por el punto (6,-3) y su foco está sobre el eje *y*
28) Su foco está sobre el eje *y* y la parábola pasa por el punto (2,3)
29) Su foco está sobre el eje *x* y la parábola pasa por el punto (2,-3)
30) Su foco está sobre el eje *y* y la parábola pasa por el punto (-3,-9)

En los ejercicios del 31 al 38 encuentra la ecuación de la parábola con los datos que se te indican. Escribe la ecuación en la forma general.

31) Foco en (-3,2) y Vértice en V(-3,-5)
32) Foco en (3,-8) y Vértice en V(3,-2)
33) Foco en (-1,0) y Vértice en V(-1,-4)
34) Foco en (-5,5) y Vértice en V(-5,8)
35) Foco en (-2,2) y Vértice en V(2,2)
36) Foco en (4,2) y Vértice en V(0,2)
37) Foco en (6,-2) y Vértice en V(4,-2)
38) Foco en (2,-3) y Vértice en V(4,-3)

En los ejercicios 39 al 48 expresa cada ecuación de la parábola en su forma reducida y encuentra: a) La longitud del lado recto, b) las coordenadas del vértice, c) las coordenadas del foco y d) la ecuación de la directriz.

39) $y^2 - 4y + 8x - 28 = 0$
40) $y^2 + 8y + 6x + 16 = 0$
41) $y^2 + 20x + 2y - 39 = 0$
42) $y^2 - 8x - 8y + 64 = 0$
43) $y^2 - 6x - 4y + 22 = 0$
44) $x^2 - 6x - 12y - 15 = 0$
45) $x^2 + 8y - 4x - 36 = 0$
46) $2x^2 + 2x - 3y + 1 = 0$
47) $x^2 - 8x - 6y - 8 = =$
48) $x^2 - 6x - y + 5 = 0$