CAPÍTULO 3

TRIGONOMETRÍA
PRIMERA PARTE

La trigonometría se considera como la rama de la geometría métrica que, como lo inica su nombre, estudia las relaciones matemáticas entre las longitudes de los lados y los ángulos de los triángulos; aunque sus aplicaciones se extienden a funciones y ángulos en general. También se les ha definido como la ciencia de las medidas "indirectas", ya que es útil para calcular longitudes, distancias y ángulos, los cuales de otra forma no podrían ser medidos directamente; como la profundidad de un precipicio, la altura de una montaña, la distancia de la tierra a la luna, etc.

En la tecnología moderna, la trigonometría desempeña un papel importante en la ingeniería, navegación, mecánica, en las aplicaciones de los vectores, movimientos ondulatorios, funciones periódicas, sonido, luz, electricidad, etc.

En este capítulo sólo verás la trigonometría aplicada a la geometría plana, ya que es un medio muy importante para el estudio de los fenómenos físicos, así como también para estudios más avanzados de las matemáticas.

3.1 Funciones trigonométricas de un ángulo agudo

Objetivo

Con respecto a cualquiera de los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo definir las seis funciones trigonométricas y sus relaciones y utilizarlas para encontrar el valor de una de ellas si se conoce el valor de una de ellas

Actualmente la trigonometría tiene muchas aplicaciones que nada tienen que ver con triángulos, pero los conceptos básicos se entienden mejor todavía en relación con el triángulo rectángulo.

Iniciamos nuestro estudio de la trigonometría con un breve análisis del $\angle A$ del triángulo rectángulo de la figura 3.1

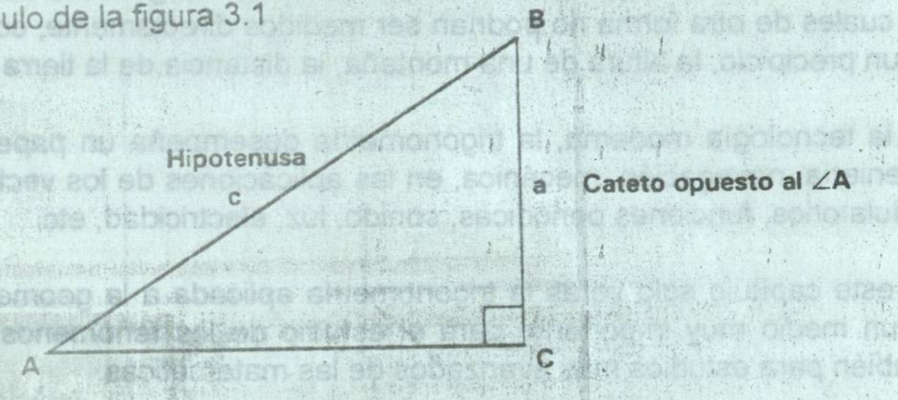

Fig. 3.1

Frecuentemente los lados de un triángulo rectángulo son referidos a uno de los dos ángulos agudos. Por ejemplo, el lado de longitud "a" se denomina "cateto opuesto" al $\angle A$, el lado de longitud "b" se denomina "cateto adyacente" al $\angle A$, y el lado de longitud "c" se denomina "hipotenusa".

Por inspección puedes ver que pueden formarse seis relaciones diferentes con los lados del triángulo rectángulo:

$$\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{c}{a}$$

Las seis razones son independientes del tamaño del triángulo, pero son dependientes de la magnitud del ángulo agudo. (Esta propiedad ya la conocías, cuando calculaste pendientes de rectas). estas relaciones son funciones del $\angle A$ y por lo tanto se les llaman "funciones trigonométricas". Para facilitar su análisis, cada una recibe un nombre en especial, como se indica en la siguiente definición.

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

seno del $\angle A$ =	$\frac{\text{cateto opuesto al } \angle A}{\text{hipotenusa}}$	$\rightarrow$ sen A = $\frac{a}{c}$ (abreviado)
coseno del $\angle A$ =	$\frac{\text{cateto opuesto al } \angle A}{\text{hipotenusa}}$	$\rightarrow$ cos A = $\frac{b}{c}$ (abreviado)
tangente del $\angle A$ =	$\frac{\text{cateto opuesto al } \angle A}{\text{hipotenusa}}$	$\rightarrow$ tan A = $\frac{a}{b}$ (abreviado)
cotangente del $\angle A$=	$\frac{\text{cateto opuesto al } \angle A}{\text{hipotenusa}}$	$\rightarrow$ cot A = $\frac{b}{a}$ (abreviado)
secante del $\angle A$ =	$\frac{\text{cateto opuesto al } \angle A}{\text{hipotenusa}}$	$\rightarrow$ sec A = $\frac{c}{b}$ (abreviado)
cosecante del $\angle A$ =	$\frac{\text{cateto opuesto al } \angle A}{\text{hipotenusa}}$	$\rightarrow$ csc A = $\frac{c}{a}$ (abreviado)

Deberás tomarte el tiempo necesario para memorizarte la definición de cada una de las funciones trigonométricas, puesto que son las piedras angulares de la trigonometría. Deberás conocerlas tan bien, que cuando alguien mencione "sen θ", automáticamente pienses en "opuesto a θ sobre hipotenusa".

Como consecuencia inmediata de estas definiciones, se pueden observar algunas relaciones entre las funciones trigonométricas. Por ejemplo, observa que los ángulos agudos ($\angle A$ y $\angle B$) del $\triangle ABC$ son complementarios, es decir, $\angle A + \angle B = 90°$

La tabla 2 muestra las definiciones de las funciones trigonométricas para los dos ángulos agudos del $\triangle ABC$ de la figura 3.1

sen A =	$\frac{\text{op al } \angle A}{\text{hip}} = \frac{a}{c}$	sen B =	$\frac{\text{op al } \angle B}{\text{hip}} = \frac{b}{c}$
cos A =	$\frac{\text{op al } \angle A}{\text{hip}} = \frac{b}{c}$	cos B =	$\frac{\text{op al } \angle B}{\text{hip}} = \frac{a}{c}$
tan A =	$\frac{\text{op al } \angle A}{\text{hip}} = \frac{a}{b}$	Tan B =	$\frac{\text{op al } \angle B}{\text{hip}} = \frac{b}{a}$
cot A =	$\frac{\text{op al } \angle A}{\text{hip}} = \frac{b}{a}$	cot B =	$\frac{\text{op al } \angle B}{\text{hip}} = \frac{a}{b}$
sec A =	$\frac{\text{op al } \angle A}{\text{hip}} = \frac{c}{b}$	sec B =	$\frac{\text{op al } \angle B}{\text{hip}} = \frac{c}{a}$
csc A =	$\frac{\text{op al } \angle A}{\text{hip}} = \frac{c}{a}$	csc B =	$\frac{\text{op al } \angle B}{\text{hip}} = \frac{c}{b}$

Por inspección puedes observar que
sen A = cos B
cos A = sen B
tan A = cot B
cot A = tan B
sec A = csc B
csc A = sec B

Pero como B= 90° - A se define que

COFUNCIONES
sen A = cos (90° - A)
tan A = cot (90° - A)
sec A = csc (90° - A)

El prefijo "co" indica que el coseno de un ángulo es igual al seno de su complemento y viceversa; que la cotangente es igual a la tangente de su complemento; y que la cosecante a la secante de su complemento y viceversa. Así toda función de un ángulo agudo es igual a la cofunción correspondiente de su ángulo complementario.

Ejemplo 1

Si tanθ =cot 51°; encuentra el valor de θ

Solución
Como la cofunción de la tangente es la cotangente, los dos ángulos deben de ser complementarios:
θ + 51°= 90°
θ = 90°- 51°
θ = 39°

Observa también que por cada función hay una "función recíproca" (recuerda que el producto de dos recíprocos es igual a 1). Considera las funciones seno y cosecante del ∠A de la figura 3.1

$\text{sen } A = \frac{a}{c}$ y $\csc A = \frac{c}{a}$

Si multiplicas: (sen A) (csc A) obtienes

$$(\text{sen } A)(\csc A) = \left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{ac}{ca} = 1$$

Así el seno y cosecante son funciones recíprocas, es decir:

$\text{sen } A = \frac{1}{\csc A}$ ó $\csc A = \frac{1}{\text{sen} A}$

Análogamente, el coseno y la secante y la tangente y la cotangente son recíprocas.

RELACIONES RECIPROCAS

$\text{sen } A = \frac{1}{\csc A}$ $\csc A = \frac{1}{\text{sen} A}$

$\cos A = \frac{1}{\sec A}$ $\sec A = \frac{1}{\cos A}$

$\tan A = \frac{1}{\cot A}$ $\cot A = \frac{1}{\tan A}$

Debido a estas relaciones recíprocas, se utiliza más frecuentemente una función de cada par de funciones trigonométricas recíprocas. Las funciones trigonométricas que se utilizan con más frecuencia son el seno, el coseno y la tangente.

Ejemplo 2

Si $\cos\theta = \frac{2}{3}$, encuentra el valor de sec θ

Solución

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ relaciones recíprocas

$\sec\theta = \frac{1}{2/3}$

$\sec\theta = \frac{3}{2}$

Otras relaciones que son de considerable importancia son las resultantes de dividir funciones trigonométricas. Por ejemplo, considera las funciones seno y coseno del $\angle A$ de la figura 3.1

$$\operatorname{sen}A = \frac{a}{c} \qquad \text{y } \cos A = \frac{b}{c}$$

Si divides: $\dfrac{\operatorname{sen}A}{\cos A}$; obtienes:

$$\frac{\operatorname{sen}A}{\cos A} = \frac{a/b}{b/c} = \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \qquad \text{(que es la definición de tan A)}$$

es decir, en términos de funciones trigonométricas

$$\frac{\operatorname{sen}A}{\cos A} = \tan A$$

y como la tangente y la cotangente son funciones recíprocas, se sigue también que

$$\cot A = \frac{\cos A}{\operatorname{sen}A}$$

RELACIONES EN FORMA DE COCIENTE

$$\tan A = \frac{\operatorname{sen}A}{\cos A} \qquad \text{y} \qquad \cot A = \frac{\cos A}{\operatorname{sen}A}$$

Ejemplo 3

Si senθ= 3/5 y cosθ=4/5; encuentra tanθ y cotθ

Solución

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \text{por relaciones en forma de cociente}$$

$$\tan\theta = \frac{3/5}{4/5} = \frac{(3)(5)}{(4)(5)} \qquad \text{y por lo tanto}$$

$$\tan\theta = \frac{3}{4} \qquad \text{relaciones recíprocas}$$

$$\cot\theta = \frac{4}{3}$$

Finalmente con la ayuda del teorema de Pitágoras derivaremos las siguientes relaciones muy importantes también. Para el $\angle A$ del triángulo rectángulo de la figura 3.1, se cumple que
(cateto op.)^2 + (cateto ady.)^2= (hip)^2
o sea

$$a^2+b^2=c^2$$

Si divides ambos miembros de esta ecuación entre c^2, obtienes

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \left(\frac{c}{c}\right)^2$$

es decir, en términos de las funciones trigonométricas
$(\operatorname{sen}A)^2 + (\cos A)^2 = 1$

Se acostumbra escribir $(\operatorname{sen}A)^2$ y $(\cos A)^2$ en la forma $\operatorname{sen}^2 A$ y $\cos^2 A$, respectivamente. Entonces la ecuación se expresa como:

$$\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$$

Similarmente se pueden derivar otras dos fórmulas dividiendo la ecuación original entre b^2 y a^2, respectivamente tenemos :

$$\tan^2 A+1 = \sec^2 A \qquad \text{y} \qquad \cot^2 A+1=\csc^2 A$$

RELACIONES PITAGORICAS

$$\operatorname{sen}^2 A+\cos^2 A=1$$
$$\tan^2 A+1=\sec^2 A$$
$$\cot^2 A+1=\csc^2 A$$

Ejemplo 4

Si $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{15}{17}$; encuentra el valor de las otras cinco funciones del $\angle\theta$.

Solución
Resolviendo la primera relación pitagórica para cosθ, tenemos:

$$\cos\theta = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}$$