Sustituyendo

$$\cos\theta = \sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{225}{289}\right)} = \sqrt{\frac{64}{289}}$$

$\cos\theta = \dfrac{8}{17}$ (tomando solamente la raíz positiva, pues el $\angle\theta$ es agudo)

Ahora, utilizando las relaciones en forma de cociente

$$\tan\theta = \frac{\text{senq}}{\text{cosq}}$$

nos queda

$$\tan\theta = \frac{15/17}{8/17} = \frac{15}{8}$$

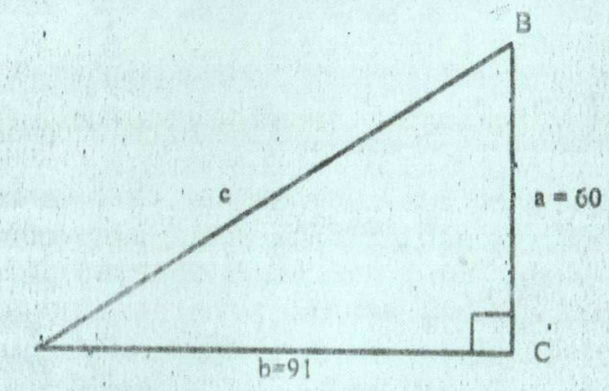
Por lo tanto,
$\cot\theta = 8/15$ (relaciones recíprocas)
$\sec\theta = 17/8$
$\csc\theta = 17/15$

Las relaciones recíprocas, las en forma de cociente y las pitagóricas que hemos encontrado en esta sección se refieren a funciones de un sólo ángulo, no pudiéndose utilizar estas fórmulas con dos ángulos diferentes a la vez. Así por ejemplo, no se puede decir que senA/cosB sea igual a tan A o a tan B, ni que $\text{sen}^2X + \cos^2Y$ sea igual a 1, sino tan sólo que para un ángulo cualquiera X, sen X/cos X = tanX, $\text{sen}^2X+\cos^2X=1$, etc.

En general, puedes determinar el valor de las funciones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo si sólo conoces el valor de una de ellas (como el ejemplo 4) o bien, si conoces al menos la longitud de dos de los lados del triángulo rectángulo, utilizando el teorema de Pitágoras y las definiciones de las funciones trigonométricas.

Ejemplo 5

Determina el valor de cada una de las funciones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo rectángulo ABC de la siguiente figura, si los catetos a y b miden 60 cm y 91 cm, respectivamente.



Solución

Por medio del teorema de Pitágoras se puede encontrar el tercer lado de un triángulo rectángulo conocidos los otros dos: si se conocen los catetos, la fórmula que da la hipotenusa es

$$c^2 = a^2+b^2$$

si se conocen la hipotenusa y uno de los catetos y se desconoce el otro cateto, este se puede encontrar a partir de la fórmula anterior trasponiendo términos. Entonces, resulta que

$$a^2 = c^2-b^2 \quad \text{o bien } b^2 = c^2-a^2$$

Por consiguiente, conocidos los catetos y valiéndonos de la primera de estas fórmulas encontraremos primero c de la siguiente manera:

$$c^2=a^2+b^2=(60)^2+(91)^2=3600+8281=11881$$

por lo tanto, c=109 cm

Ya tenemos ahora los tres lados a=60, b=91 y c=109; entonces podemos calcular inmediatamente las funciones trigonométricas de los ángulos A y B, puesto que ∠C=90°, mediante las definiciones de las funciones:

$$\text{sen}A = \frac{a}{c} = \frac{60}{109}$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{91}{109}$$

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{60}{91}$$

$$\cot A = \frac{b}{a} = \frac{91}{60}$$

$$\sec A = \frac{c}{b} = \frac{109}{91}$$

$$\cos A = \frac{c}{a} = \frac{109}{60}$$

Después de hallar senA=60/109 y cosA=91/109, se podría, desde luego, utilizar las relaciones en forma de cociente y las recíprocas y calcular tan A, cotA, secA y cscA de la manera siguiente:

$$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{1}{60/91} = \frac{91}{60}$$

o también

$$\cot A = \frac{\cos A}{\text{sen}A} = \frac{91/109}{60/109} = \frac{91}{60}$$

y

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{91/109} = \frac{109}{91}$$

$$\csc A = \frac{1}{\text{sen}A} = \frac{1}{60/109} = \frac{109}{60}$$

En la práctica el seno y el coseno se calculan por determinados métodos especiales y después se aplica este método para el cálculo de las demás funciones. Sin embargo, para familiarizarse con las definiciones de las funciones trigonométricas con los elementos del triángulo, es preferible calcular las funciones directamente a partir del triángulo en vez de hacerlo valiéndose de las relaciones que ligan a las funciones entre sí. Una vez determinadas las funciones por cálculo directo, es útil, sin embargo, utilizar estas relaciones como comprobación.

Para determinar el valor de las funciones trigonométricas correspondientes al ∠B del triángulo rectángulo de la figura anterior, se puede utilizar la relación que liga a las funciones de los ángulos complementarios A y B y escribir las funciones y cofunciones de B deducidas de las correspondientes respectivas cofunciones y funciones del ∠A ya encontradas. Esto será un ejercicio muy instructivo para ti, pero aquí calcularemos todas las funciones de ∠B directamente a partir del triángulo:

$$\text{sen}B = \frac{b}{c} = \frac{91}{109}$$

$$\cos B = \frac{a}{c} = \frac{60}{109}$$

$$\tan B = \frac{b}{a} = \frac{91}{60}$$

$$\cot B = \frac{a}{b} = \frac{60}{91}$$

$$\sec B = \frac{c}{a} = \frac{109}{60}$$

$$\cos B = \frac{c}{b} = \frac{109}{91}$$

En todas las fracciones que dan las doce funciones de A y de B, tanto el numerador como el denominado están expresados en las mismas unidades. El valor de una función es pues, sencillamente, un "numero" que no va expresado en ninguna clase de unidad. Lo mismo da por consiguiente, que los lados 60, 91, 109 de la figura anterior, estén expresados en centímetros, en pulgadas, en metros, en pies, en millas o en otra unidad cualquiera que ésta sea, con tal de que se emplee la misma unidad para medir los tres lados. Así, por ejemplo, si nos dicen que "a" mide 0.6 m, "b" mide 91 cm y "c" mide 1.09 m, hay que empezar por expresar las longitudes en centímetros o las tres en metros, ya que con cualquiera de esas unidades se obtiene el mismo valor de la función "para el mismo ángulo".

Ejercicio 3.1

Utiliza las relaciones fundamentales para encontrar el valor exacto de la función trigonométrica indicada. Considera que el ángulo indicado es agudo.

1. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{8}$, encuentra $\csc\theta$
2. $\cos\phi = \frac{3}{5}$, encuentra $\sec\phi$
3. $\tan\beta = 4$, encuentra $\cot\beta$
4. $\sec\delta = \frac{10}{7}$, encuentra $\cos\delta$
5. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$, encuentra $\cos\alpha$
6. $\operatorname{sen} w = \frac{1}{2}, \cos w = \frac{\sqrt{3}}{2}$ encuentra $\tan w$
7. $\csc\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$, encuentra $\tan\theta$
8. $\cos\phi = \frac{3}{5}$, encuentra las otras cinco
9. $\operatorname{sen}\beta = \frac{5}{13}$, encuentra las otras cinco
10. $\tan\delta = \frac{21}{20}$, encuentra las otras cinco

Utiliza las relaciones fundamentales y una calculadora para encontrar las funciones trigonométricas indicadas.

11. $\operatorname{sen}\theta = 0.4313$, encuentra $\csc\theta$
12. $\cos\theta = 0.1155$, encuentra $\sec\theta$
13. $\tan\beta = 2.397$, encuentra $\cot\beta$
14. $\csc A = 1.902$, encuentra sen A
15. $\sec B = 2.03$, encuentra tan B

En los siguientes ejercicios "c" representa la hipotenusa y las otras dos letras los catetos de un triángulo rectángulo. Dibuja una figura para cada uno, indicando los ángulos opuestos a los lados respectivos por las correspondientes letras mayúsculas. Partiendo de los dos lados que se dan como datos, en cada caso, hallar el tercero y calcular después las seis funciones trigonométricas de cada ángulo agudo del triángulo.

16. a=28
b=45
c=

17. p=36
q=77
c=

18. c=37
m=35
n=

19. c=73
f=48
g=

20. c=41
x=9
y=

3.2 Valores de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo

Objetivo

Utilizando las tablas trigonométricas o la calculadora, encontrar los valores aproximados de las funciones trigonométricas de ángulos agudos o encontrar un ángulo agudo a partir del valor de una función trigonométrica. Encontrar los valores exactos de las seis funciones trigonométricas, si la medida del ángulo es 30°, 45° ó 60°.

Hasta esta parte del capítulo se han calculado los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo utilizando las longitudes de los lados del triángulo rectángulo. Sin embargo, como se dijo anteriormente, los valores de las funciones trigonométricas dependen únicamente de la magnitud del ángulo y no del tamaño del triángulo; así, para encontrar el valor de una función trigonométrica sólo se necesita la medida del ángulo.

Los valores de las funciones trigonométricas las necesitarás principalmente para resolver los problemas de aplicación propuestos en las próximas secciones, y los puedes encontrar generalmente enlistados en forma de tablas trigonométricas, o bien, utilizando una calculadora. Se han elaborado tablas trigonométricas adaptadas a diferentes fines, que dan los valores de las funciones con ocho o diez cifras decimales y para ángulos dados a intervalos de un minuto y hasta de un segundo, por ejemplo, como las utilizadas en Astronomía y Topografía. Estas tablas se imprimen en formas muy diversas; algunas muestran las diferentes funciones en sitios separados de la tabla, impresos en páginas distintas.