Análogamente, en el triángulo rectángulo BCD el $\angle CBD$ es igual a 30° y por lo tanto, la altura BC es también bisectriz del $\angle ABD$.

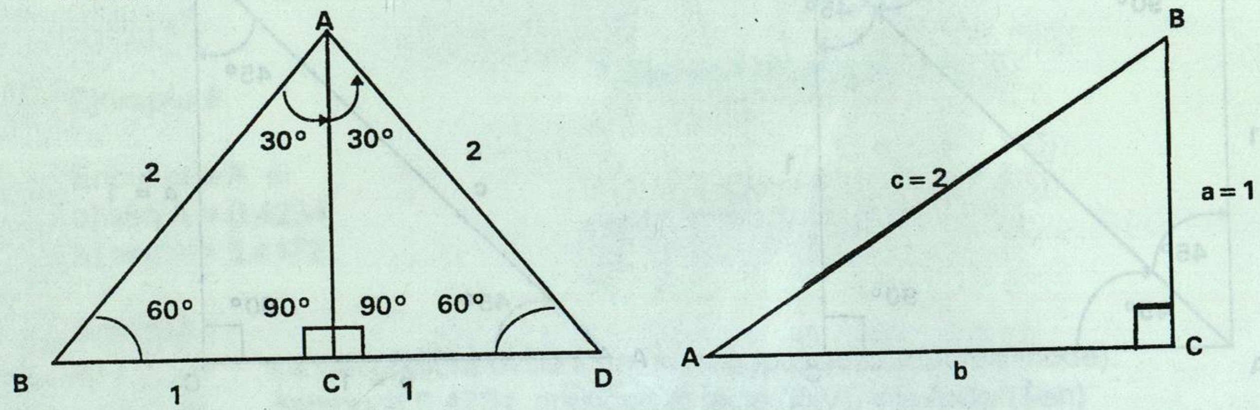

Fig. 3.3

Por tener los triángulos rectángulos ABC y BCD ángulos iguales, hipotenusas iguales, y un cateto BC igual, son iguales, y por lo tanto, lo son los catetos correspondientes AC y CD. La altura BC también bisecta a la base. Si tomamos los lados del _ABD iguales a dos unidades, tendremos que AC=CD=1, y el triángulo rectángulo ABC dibujado separadamente queda tal como se ilustra en la fig. 3.3. En este triángulo, por el teorema de Pitágoras, se tiene:

$a^2+b^2=c^2$
$a^2=c^2-b^2$
$a^2=2^2-1^2=4-1$
$a^2=3$
$a=\sqrt{3}$

Por lo tanto, de acuerdo al $\triangle ABC$ de la fig. 3.3, las funciones trigonométricas de 30° y 60° son:

$\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\cos 60° = \frac{1}{2}$

$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\qquad$ $\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

$\cot 30° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ $\qquad$ $\cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\qquad$ $\sec 60° = \frac{2}{1} = 2$

$\csc 30° = \frac{2}{1} = 2$ $\qquad$ $\csc 60° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Los resultados de la discusión anterior se pueden resumir en la tabla 3

θ	senθ	cosθ	tanθ	cotθ	secθ	cscθ
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2}{1} = 2$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2}{1} = 2$	$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Tabla 3

Los triángulos rectángulos con ángulos agudos de 45° y de 30° y 60° son muy importantes y conviene aprenderse de memoria los valores de las funciones trigonométricas de estos ángulos. Existe una manera muy sencilla para recordar los valores de las tres principales funciones escribiéndolas en forma radical:

θ	**senθ**	**cosθ**	**tanθ**
0°	$\sqrt{\frac{0}{4}}$	$\sqrt{\frac{4}{4}}$	$\sqrt{\frac{0}{4}}$
30°	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$
45°	$\sqrt{\frac{2}{4}}$	$\sqrt{\frac{2}{4}}$	$\sqrt{\frac{2}{2}}$
60°	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{3}{1}}$
90°	$\sqrt{\frac{4}{4}}$	$\sqrt{\frac{0}{4}}$	$\sqrt{\frac{4}{0}}$

Ejercicio 3.2

En los problemas del 1 al 10, encuentra el valor de cada una de las siguient funciones, utilizando las tablas trigonométricas o una calculadora y redondeando resultado con cuatro cifras decimales.

1. sen 76°	2. csc 64°14'
3. tan 18°	4. sen 40.4°
5. cos 32°10'	6. cos 55.5°
7. sec 28°40'	8. tan 62.6°
9. cot 54°30'	10. cot 37.7°

En los problemas del 11 al 20, utilizando las tablas trigonométricas o ur calculadora, encuentra la medida del ángulo agudo θ en grados decimales y e grados y minutos.

11. $\operatorname{sen}\theta = 0.3907$	12. $\csc\theta = 1.4897$
13. $\cos\theta = 0.4695$	14. $\operatorname{sen}\theta = 0.2686$
15. $\tan\theta = 0.6787$	16. $\cos\theta = 0.9258$
17. $\cot\theta = 0.3185$	18. $\tan\theta = 2.9460$
19. $\sec\theta = 1.1890$	20. $\csc\theta = 3.0150$

En los problemas del 21 al 30, utilizando los valores exactos de las funciones 3C 45° y 60°; demuestra que le miembro de la izquierda es igual al miembro de derecha.

21. $\csc 45^\circ = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 45^\circ}$	22. $\sec^2 60^\circ - \tan^2 60^\circ = 1$
23. $\sec 30^\circ = \csc 60^\circ$	24. $\operatorname{sen} 30^\circ \cos 60^\circ + \operatorname{sen} 60^\circ \cos 30^\circ = 1$
25. $\cot 60^\circ = \dfrac{\cos 60^\circ}{\operatorname{sen} 60^\circ}$	26. $\cos 30^\circ \cos 60^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{sen} 60^\circ = 0$
27. $\tan 45^\circ = \dfrac{\operatorname{sen} 45^\circ}{\cos 45^\circ}$	28. $\operatorname{sen} 60^\circ = 2 \operatorname{sen} 30^\circ \cos 30^\circ$
29. $\operatorname{sen}^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 1$	30. $\operatorname{sen} 30^\circ = \sqrt{\dfrac{1-\cos 60^\circ}{2}}$

3.3 Relaciones Fundamentales e Identidades

Objetivo

Usar las relaciones: recíprocas, de cocientes, pitagóras, de la suma y diferencia de dos ángulos, del ángulo doble y de la mitad del ángulo para simplificar espresiones, o bien, para demostrar que una ecuación trigonométrica dada es o no es una identidad.

En las secciones anteriores hemos tenido la ocasión de aprovechar con frecuencia las relaciones que desarrollamos en la sección 3.1 entre las funciones trigonométricas de un ángulo. Esas fórmulas y otras relaciones análogas tienen mucha aplicación en la parte de la trigonometría que constituye el llamado "Análisis trigonométrico", y en algunas otras ramas de las matemáticas superiores, como por ejemplo, en el "Cálculo infinitesimal". Son además sumamente útiles para la elaboración de las tablas trigonométricas y su deducción presenta un gran interés de tipo teórico.

Por estas razones damos en esta sección una breve introducción al Análisis trigonométrico, desarrollando algunas de las relaciones que ligan a las funciones trigonométricas de un ángulo y de más de un ángulo.

Hay once relaciones "fundamentales" que ya debes de estar familiarizado con ellas, pues las estudiaste en la sección 3.1, pero éstas se enlistan aquí para integridad:

RELACIONES RECIPROCAS

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\csc\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

RELACIONES DE COCIENTES

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

RELACIONES PITAGORICAS

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Estas once relaciones se llaman "identidades fundamentales" de la trigonometría y son válidas para todos los valores de θ para los cuales tienen significado las funciones en la expresión.

Las fórmulas anteriores nos permiten resolver el siguiente problema: conocida una de las funciones trigonométricas de un ángulo, determinar en función de ella todas las demás. Así, por ejemplo, para expresar todas las funciones trigonométricas en función del seno, se tiene:

senθ = senθ

según la relación pitagórica: $sen^2\theta+cos^2\theta=1$

$$cos^2\theta=1-sen^2\theta$$

por lo tanto, $\cos\theta=\sqrt{1-sen^2\theta}$

Según la relación de cocientes: $\tan\theta=\dfrac{sen\,\theta}{\cos\theta}$

por lo tanto, $\tan\theta=\dfrac{sen\,\theta}{\sqrt{1-sen^2\theta}}$

Para ser $\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$ **, resulta:**

$$\cot\theta=\frac{\sqrt{1-sen^2\theta}}{sen\,\theta}$$

Análogamente, de $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$ **y de** $\cos\theta=\sqrt{1-sen^2\theta}$ **se deduce:**

$$\sec\theta=\frac{1}{\sqrt{1-sen^2\theta}}$$

y finalmente, según ya hemos visto:

$$csc\,\theta=\frac{1}{sen\,\theta}$$

Las fórmulas anteriores expresan todas las funciones en términos de sen θ. De manera semejante se pueden expresar todas, en función de cos θ, etc. (Te recomendamos que lo hagas como ejercicio).

Pero el objetivo más importante de esta sección es el que aprendas cómo simplificar o alterar la forma de expresiones trigonométricas usando las relaciones trigonométricas fundamentales.

Se pueden obtener varias formas equivalentes de las identidades fundamentales mediante la manipulación algebraica. Dichas formas alternas se dan en la siguiente tabla:

IDENTIDAD FUNDAMENTAL	FORMAS	EQUIVALENTES
Recíprocas		
$sen\,\theta=\dfrac{1}{csc\,\theta}$	$csc\,\theta=\dfrac{1}{sen\,\theta}$	**sen θ csc θ = 1**
$\cos\theta=\dfrac{1}{\sec\theta}$	$\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$	**cos θ sec θ = 1**
$\tan\theta=\dfrac{1}{\cot\theta}$	$\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$	**tan θ cot θ = 1**
Cocientes		
$\tan\theta=\dfrac{sen\,\theta}{\cos\theta}$	**senθ=tanθcosθ**	$\cos\theta=\dfrac{sen\,\theta}{\tan\theta}$
$\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{sen\,\theta}$	**cosθ=cotθsenθ**	$sen\,\theta=\dfrac{\cos\theta}{\cot\theta}$
Pitagóricas		
$sen^2\theta+cos^2\theta=1$	$sen^2\theta=1-cos^2\theta$	$cos^2\theta=1-sen^2\theta$
$1+tan^2\theta=sec^2\theta$	$tan^2\theta=sec^2\theta-1$	$sec^2\theta-tan^2\theta=1$
$1+cot^2\theta=csc^2\theta$	$cot^2\theta=csc^2\theta-1$	$csc^2\theta-cot^2\theta=1$

Tabla 4