Las once identidades fundamentales y sus formas equivalentes se pueden aplicar para simplificar expresiones que contienen funciones trigonométricas. Simplificar quiere decir reducir el número de términos de la expresión o el número de funciones trigonométricas distintas que se usan. O también, se pueden utilizar para demostrar que ciertas ecuaciones relativamente complicadas también son identidades. Una demostración lógica puede requerir:

a) la transformación de uno de los miembros de la ecuación, o bien;
b) la transformación de ambos miembros de la ecuación.

En todo caso, no hay que pasar ningún término de un lado a otro de la ecuación, pues es incorrecto verificar una identidad empezando con la suposición de que "es" una identidad.

Una o más de las siguientes sugerencias te pueden ayudar a simplificar expresiones trigonométricas o a verificar identidades:

1) Conocer las once relaciones fundamentales y reconocer las formas equivalentes de cada una.
2) Conocer los procedimientos de adición, sustracción y reducción de fracciones en fracciones más simples.
3) Conocer las técnicas de factorización y de los productos especiales.
4) Usar sustituciones para cambiar todas las funciones trigonométricas en expresiones que contengan únicamente senos y cosenos, y entonces simplificar.
5) evitar sustituciones que introduzcan expresiones con radicales.

Ejemplo 1

Simplifica cada una de las siguientes expresiones:

a) $(\sec\theta+\tan\theta(1-\operatorname{sen}\theta)$

c) $\dfrac{\cot^3\theta-\tan^3\theta}{\cot\theta-\tan\theta}-\sec^2\theta$

b) $\cos^2\theta-\cos^4\theta+\operatorname{sen}^4\theta$

d) $\dfrac{\cos\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}-\dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

Solución

a) Escribimos cada una de las funciones en términos de seno y coseno

$$(\sec\theta+\tan\theta)(1-\operatorname{sen}\theta)=\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)(1-\operatorname{sen}\theta)$$

Sumamos las fracciones del primer factor

$$=\left(\frac{1+\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)(1-\operatorname{sen}\theta)$$

$$=\frac{(1+\operatorname{sen}\theta)(1-\operatorname{sen}\theta)}{\cos\theta}$$

Multiplicamos los factores del numerador de la fracción resultante

$$=\frac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta}$$

Usamos la relación pitagórica equivalente $1-\operatorname{sen}^2\theta=\cos^2\theta$

$$=\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta}$$

$=\cos\theta$

b) Agrupamos los primeros dos términos y factorizamos

$$\cos^2\theta-\cos^4\theta+\operatorname{sen}^4\theta=(\cos^2\theta-\cos^4\theta)+\operatorname{sen}^4\theta$$

$$=\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)+\operatorname{sen}^4\theta$$

Usamos la relación pitagórica equivalente $1-\cos^2\theta=\operatorname{sen}^2\theta$

$=\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta+\operatorname{sen}^4\theta$

Factorizamos y usamos la relación pitagórica $\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$

$$=\operatorname{sen}^2\theta(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)$$

$$=\operatorname{sen}^2\theta(1)$$

$$=\operatorname{sen}^2\theta$$

c) Factorizamos el numerador de la fracción (diferencia de dos cubos)

$$\frac{\cot^3\theta - \tan^3\theta}{\cot\theta - \tan\theta} - \sec^2\theta = \frac{(\cot\theta - \tan\theta)(\cot^2\theta + \cot\theta\tan\theta + \tan^2\theta)}{(\cot\theta - \tan\theta)} - \sec^2\theta$$

Se simplifica la fracción

$= \cot^2\theta + \cot\theta\tan\theta + \tan^2\theta - \sec^2\theta$

Usamos la relación recíproca equivalente $\tan\theta\cot\theta=1$

$= \cot^2\theta + 1 + \tan^2\theta - \sec^2\theta$

Luego la relación pitagórica $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ y simplificamos

$=\cot^2\theta + \sec^2\theta - \sec^2\theta$

$= \cot^2\theta$

d) Restamos las fracciones

$$\frac{\cos\theta}{1-sen\,\theta} - \frac{1+sen\,\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos^2\theta - (1+sen\,\theta)(1-sen\,\theta)}{(1-sen\,\theta)\cos\theta}$$

Efectuamos las operaciones indicadas en el numerador

$$= \frac{\cos^2\theta - (1-sen^2\theta)}{(1-sen\,\theta)\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta - \cos^2\theta}{(1-sen\,\theta)\cos\theta}$$ relación pitagórica $(1-sen^2\theta=\cos^2\theta)$

$$= \frac{0}{(1-sen\,\theta)\cos\theta}$$

$= 0$

Como puedes ver por el ejemplo anterior, una gran parte del proceso es algebraico. La serie de pasos usados en los procedimientos de simplificación no es única. La experiencia con el uso de las relaciones fundamentales y sus formas equivalentes al simplificar expresiones trigonométricas te dará alguna facilidad para escoger un procedimiento adecuado.

Ejemplo 2

Demuestra que cada una de las siguientes ecuaciones son identidades

a) $\dfrac{sen^4\theta - \cos^4\theta}{sen^2\theta - \cos^2\theta} + \cot^2\theta = csc^2\theta$

b) $\dfrac{csc\,\theta}{\cos\theta} - sen\,\theta\sec\theta = \dfrac{\tan\theta\, csc^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

Solución

a) **Aquí, simplificaremos el lado izquierdo de la ecuación, factorizando el numerador de la fracción.**

$$\frac{(sen^2\theta + \cos^2\theta)(sen^2\theta - \cos^2\theta)}{(sen^2\theta - \cos^2\theta)} + \cot^2\theta = csc^2\theta$$

$(sen^2\theta + \cos^2\theta) + \cot^2\theta = csc^2\theta$ simplificando la fracción

$1+\cot^2\theta = csc^2\theta$ utilizando relaciones pitagóricas

$csc^2\theta = csc^2\theta$

b) **Aquí, el procedimiento más expedito es desarrollar ambos lados. Primeramente, por relaciones pitagóricas el denominador de la fracción del miembro derecho se puede escribir como $\sec^2\theta$.**

$$\frac{csc\,\theta}{\cos\theta} - sen\,\theta\sec\theta = \frac{\tan\theta\, csc^2\theta}{\sec^2\theta}$$

expresando ambos lados de la ecuación en términos de seno y coseno

$$\frac{\frac{1}{sen\theta}}{\cos\theta} - sen\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}\right) = \frac{\frac{sen\theta}{\cos\theta}\left(\frac{1}{sen\theta}\right)^2}{\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2}$$

$$\frac{1}{sen\theta\cos\theta} - \frac{sen\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{sen\theta}{\cos\theta} \bullet \frac{1}{sen^2\theta}}{\frac{1}{\cos^2\theta}}$$

$$\frac{1-sen^2\theta}{sen\theta\cos\theta} = \frac{\frac{sen\theta}{\cos\theta\, sen^2\theta}}{\frac{1}{\cos^2\theta}}$$

$$\rightarrow \frac{\cos^2\theta}{sen\theta\cos\theta} = \frac{\cos^2\theta\, sen\theta}{\cos\theta\, sen^2\theta} \rightarrow \frac{\cos\theta}{sen\theta} = \frac{\cos\theta}{sen\theta}$$

$$\cot\theta = \cot\theta$$

Muchas de las ecuaciones trigonométricas no son identidades; no son válidas para todos los valores de la variable. Para mostrar que una ecuación trigonométrica no es una identidad, basta con encontrar un ángulo que no satisfaga la ecuación. Tal ángulo sirve como un "contraejemplo". Al elegir un ángulo como contraejemplo, hay que evitar los ángulos cuadrantales, ya que se puede obtener una función trigonométrica indefinida.

Ejemplo 3

Muestra que $\frac{\cos\theta - sen\theta}{\cos\theta} = 1+\tan\theta$ no es una identidad.

Solución

El valor de θ se puede elegir de muchas formas; la elección es arbitraria. Por simplicidad en este caso, el valor que se usará de θ=60°

$$\frac{\cos 60° - sen\, 60°}{\cos 60°} = 1+\tan 60°$$

$$\frac{1/2-\sqrt{3}/2}{1/2} = 1+\sqrt{3}$$

$$\frac{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 1+\sqrt{3}$$

$$1-\sqrt{3} \neq 1+\sqrt{3}$$

A veces es necesario trabajar con expresiones referentes a la función trigonométrica de la suma o la diferencia de dos ángulos, tales como sen(α+β). Ahora veremos las identidades que se pueden usar para evaluar las funciones trigonométricas de las sumas de ángulos.

En primer lugar, hay que observar que no es correcto obtener el valor de la función de cada ángulo y entonces encontrar la suma de estos valores, pensar que sen (α+β) es igual sen α+sen β, porque hay que recordar que el significado de sen (α+β) no es el producto de (sen)·(α+β); significa que se trata del seno de un ángulo que sea suma de los ángulos α y β (esto se comprueba con facilidad tomando ejemplos numéricos concretos). La verdadera relación entre sen(α+β) y cos (α+β) se establece construyendo la siguiente figura.

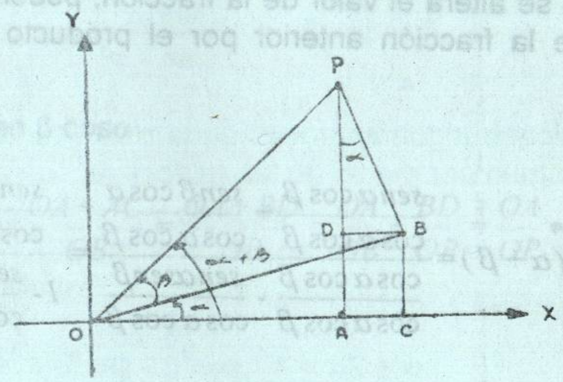

Fig. 3.4

Para construir esta figura, coloca el ∠α en posición normal y sitúa el ∠β de tal forma que su vértice se encuentre en el origen O y su lado inicial coincida con el lado final del ∠α. Si P es cualquier punto en el lado terminal del ∠(α+β) y trazas las rectas PA perpendicular a OX, PB perpendicular al lado terminal de α, BC perpendicular a OX y BD perpendicular a AP.

Ahora ∠APB=α (porque sus lados correspondientes son perpendiculares, OA y AP, OB y BP). Entonces,

$$sen(\alpha+\beta) = \frac{AP}{OP} = \frac{AD+DP}{OP} = \frac{CB+DP}{OP} = \frac{CB}{OP} + \frac{DP}{OP} = \frac{CB}{OB}\bullet\frac{OB}{OP} + \frac{BP}{OP}\bullet\frac{DP}{BP}$$

Por lo tanto,

sen(α+β)=senα cosβ+sen β cosα

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{OA}{OP} = \frac{OC-AC}{OP} = \frac{OC-DB}{OP} = \frac{OC}{OP} - \frac{DB}{OP} = \frac{OC}{OB}\bullet\frac{OB}{OP} - \frac{DB}{BP}\bullet\frac{BP}{OP}$$

Por lo tanto,

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

Puesto que la relación $\tan\theta=\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ es válida para cualquier ángulo, también lo será para el $\angle(\alpha+\beta)$ y tendremos

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

Si recordamos que al dividir el numerador y el denominador de una fracción por una misma cantidad no se altera el valor de la fracción, podemos dividir el numerador y el denominador de la fracción anterior por el producto cos α cosβ, con lo que resultará:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\bullet\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}$$

Por lo tanto,

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

Para deducir las fórmulas de sen(α-β) y de cos(α-β) procederemos de manera parecida a como lo hicimos en la discusión anterior.

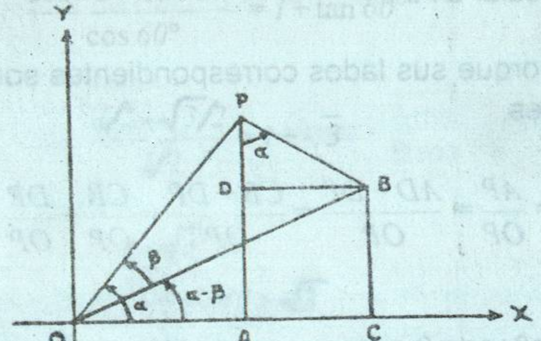

Fig. 3.5

Para construir la figura 3.5, coloca el ∠α en posición normal y sitúa el ∠β de tal forma que su vértice se encuentre en el origen y su lado inicial coincida con el lado final del ∠α. Si B es cualquier punto en el lado terminal del ∠(α-β) y trazas las rectas PA perpendicular a OX, PB perpendicular al lado terminal de α, BC perpendicular a OX y BD perpendicular a AP.

Ahora, ∠APB=α (porque sus lados correspondientes son perpendiculares, OA y AP, OB y BP). Entonces

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\frac{BC}{OB}=\frac{AP-PD}{OB}=\frac{AP}{OB}-\frac{PD}{OB}=\frac{AP}{OP}\bullet\frac{OP}{OB}-\frac{PB}{OB}\bullet\frac{PD}{PB}$$

Por lo tanto,

$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\beta\cos\alpha$

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{OC}{OB}=\frac{OA+AC}{OB}=\frac{OA+BD}{OB}=\frac{OA}{OB}+\frac{BD}{OB}=\frac{OA}{OP}\bullet\frac{OP}{OB}+\frac{BD}{PB}\bullet\frac{PB}{OB}$$

Por lo tanto,

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Si ahora en la fórmula $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$

sustituimos los valores encontrados anteriormente y siguiendo un proceso análogo al anterior, se obtiene que:

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

También se pueden establecer identidades acerca de funciones trigonométricas de ángulos dobles, tales como sen 2α, o mitades de ángulos como $\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

Supongamos que en las fórmulas de la suma de dos ángulos, los dos ángulos sean iguales, es decir α=β. Quedarán entonces,

$$\operatorname{sen}(\alpha+\alpha)=\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$