Por lo tanto,

$$\text{sen } 2\alpha = 2 \text{ sen } \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \text{sen } \alpha \text{ sen } \alpha$$

Por lo tanto,

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha \quad \text{y} \quad \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan \alpha}$$

Por lo tanto,

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

Por último, las funciones trigonométricas de la mitad de un ángulo se expresan en función de las del ángulo por medio de las relaciones anteriores.

De la identidad $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$, si sustituimos $\cos^2\alpha$ por $1 - \text{sen}^2\alpha$, se deduce que

$$\cos 2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\text{sen}^2\alpha$$

y despejamos senα, nos queda

$$\text{sen}\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$$

si ahora hacemos $2\alpha = \theta$, entonces $\alpha = \theta/_2$ y se tiene

$$\text{sen } \theta/_2 = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

en rigor, se debería colocar el signo ± delante de la raíz cuadrada, lo cual significaría que el sen $\theta/_2$ es positivo o negativo según el cuadrante, tal como se ilustró en la sección anterior. Si se sobrentiende ésto, no resulta necesario colocar

el doble signo delante de las raíces cuadradas en ninguna de las fórmulas siguientes.

De la relación $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$, si sustituimos $\text{sen}^2\alpha$ por $1 - \cos^2\alpha$, se deduce que

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha)$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2\alpha - 1$$

y despejamos cosα, resulta

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$$

y si hacemos $2\alpha = \theta$, entonces $\alpha = \theta/_2$ y se tiene

$$\cos \theta/_2 = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

La $\tan \theta/_2$ se puede expresar como

$$\tan \theta/_2 = \frac{\text{sen } \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}}{\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}}$$

o sea que $\quad \tan \theta/_2 = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$

o bién, racionalizando el denominador, obtenemos que $\tan \theta/_2 = \frac{\text{sen } \theta}{1 + \cos \theta}$

Las identidades para la suma, diferencia, el doble y la mitad del ángulo con senos, cosenos y tangentes se resumen en la siguiente tabla;

Identidad para la suma de dos ángulos:

sen(α+β) = senα cosβ + senβ cosα **cos(α+β) = cosα cosβ - senα senβ**

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

Identidad para la diferencia de dos ángulos:

sen(α-β) = senα cosβ - senβ cosα **cos(α-β) = cosα cosβ + senα senβ**

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$$

Identidad para el doble del ángulo:

sen 2α = 2 senα cosα **cos 2α = cos²α - sen²α**

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

Identidades para la mitad del ángulo:

$$sen\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{sen\,\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Ejemplo 4

Simplifica cada una de las siguientes expresiones:

a) $(sen\alpha + sen\beta)^2 + (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + 2\cos(\alpha + \beta)$

b) $\dfrac{sen(\alpha+\beta) + sen(\alpha-\beta)}{sen\,2\alpha}$

Solución:

a) Desarrollando cada uno de los binomios al cuadrado

$(sen\alpha + sen\beta)^2 + (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + 2\cos(\alpha + \beta) =$

$= sen^2\alpha + 2\,sen\alpha\,sen\beta + sen^2\beta + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta\ 2(\cos\alpha\cos\beta - sen\alpha\,sen\beta)$

$= sen^2\alpha + 2sen\alpha sen\beta + sen^2\beta + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta - 2sen\alpha\,sen\beta$

combinando términos semejantes.

$= (sen^2\alpha + \cos^2\alpha) + (sen^2\beta + \cos^2\beta)$

$= 1 + 1$

$= 2$

b) $$\frac{sen(\alpha+\beta) + sen(\alpha-\beta)}{sen\,2\alpha} = \frac{sen\alpha\cos\beta + sen\beta\cos\alpha + sen\alpha\cos\beta - sen\beta\cos\alpha}{2sen\alpha\cos\alpha}$$

$$= \frac{2sen\alpha\cos\beta}{2sen\alpha\cos\alpha}$$

$$= \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

Ejemplo 5

Demuestra cada una de las siguientes identidades:

a) $\dfrac{2\,sen^3\theta}{sen2\theta} + \cos\theta = \sec\theta$

b) $\dfrac{2\tan\theta - sen2\theta}{2\,sen^2\theta} = \tan\theta$

Solución:

a) Desarrollando el miembro izquierdo de la ecuación y usando las relaciones siguientes: sen 2θ = 2 senθ cosθ y $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$, tenemos

$$\frac{2\,sen^3\theta + \cos\theta sen2\theta}{sen2\theta} = \sec\theta$$

$$\frac{2\,sen^3\theta + \cos\theta(2sen\theta\cos\theta)}{2sen\theta\cos\theta} = \sec\theta$$

$$\frac{2\,sen^3\theta + 2sen\theta\cos^2\theta}{2sen\theta\cos\theta} = \sec\theta$$

$$\frac{2sen\theta(sen^2\theta + \cos^2\theta)}{2sen\theta\cos\theta} = \sec\theta$$

$$\frac{2sen\theta}{2sen\theta\cos\theta} = \sec\theta$$

$$\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$

$$\sec\theta = \sec\theta$$

b) Se utilizan las relaciones

$\tan\theta = \frac{sen\theta}{\cos\theta}$ y sen 2θ = 2 sen θ cos θ y desarrollando el lado izquierdo de la ecuación

$$\frac{\frac{2sen\theta}{\cos\theta} - 2sen\theta\cos\theta}{2\,sen^2\theta} = \tan\theta$$

$$\frac{\frac{2sen\theta - 2sen\theta\cos^2\theta}{\cos\theta}}{2\,sen^2\theta} = \tan\theta$$

$$\frac{2sen\theta - 2sen\theta\cos^2\theta}{2\,sen^2\theta\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\frac{2sen\theta(1-\cos^2\theta)}{2\,sen^2\theta\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\frac{2sen\theta\,sen^2\theta}{2\,sen^2\theta\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\frac{sen\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

tanθ = tanθ

Ejercicio 3.3

Simplifica cada una de las siguientes expresiones:

1) $\frac{csc\theta}{\cot\theta}$

2) $\sec\theta(1 - sen^2\theta)$

3) $sen\theta\sec\theta$

4) $sen^2\theta(1+\cot^2\theta)$

5) $\frac{sen\theta}{\cot\theta} + \cos\theta$

6) $\cot^2\theta(1+\tan^2\theta)$

7) $\frac{sen\theta + \cos\theta}{sen\theta} + \cot\theta$

8) $\frac{sen\theta}{csc\theta} + \frac{\cos\theta}{\sec\theta}$

9) $\frac{(1+sen\theta)(1-sen\theta)}{\cos\theta}$

10) $(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)$

11) $csc\theta\sec\theta - \cot\theta$

12) $\frac{1}{1+sen\theta} + \frac{1}{1-sen\theta}$

13) $\frac{1+\sec\theta}{sen\theta + \tan\theta}$

14) $sen(\theta+\delta)\cos\theta - \cos(\theta+\delta)sen\theta$

15) $\cos(\theta-\delta)sen\theta - sen(\theta-\delta)\cos\theta$

16) $\cos(\theta+\delta)\cos\delta + sen(\theta+\delta)sen\delta$

17) $\frac{sen(\theta+\delta) + sen(\theta-\delta)}{\cos(\theta+\delta) + \cos(\theta-\delta)}$

18) $sen2\theta\sec\theta$

19) $2\cos^2\frac{\theta}{2}$

20) $(sen\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2})^2 - 1$

Demuestra que cada una de las siguientes ecuaciones son identidades

21) $\sec\theta + \cos\theta - sen\theta\tan\theta = 0$

22) $\cos\theta\tan\theta + \cos\theta\cot\theta = csc\theta$

23) $\dfrac{\tan^2\theta - sen^2\theta}{\tan^2\theta} = sen^2\theta$

24) $\dfrac{1}{\sec\theta + \tan\theta} + \tan\theta = \sec\theta$

25) $\dfrac{\sec\theta - \cos\theta}{\tan\theta} = sen\theta$

26) $\dfrac{\cos^2\theta}{1 + sen\theta} + sen\theta = 1$

27) $\dfrac{\cos\theta - sen\theta}{1 - \tan\theta} = \cos\theta$

28) $\dfrac{\cot\theta - sen\theta}{csc\theta - \tan\theta} = \cos\theta$

29) $\dfrac{csc^2\theta - \cot^2\theta}{\sec^2\theta} = \cos^2\theta$

30) $\dfrac{sen\theta}{1 + \cos\theta} + \dfrac{1 + \cos\theta}{sen\theta} = 2csc\theta$

31) $(\sec\theta - \cos\theta)\cos\theta = sen^2\theta$

32) $1 - sen\theta\cos\theta\tan\theta = \cos^2\theta$

33) $(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = 1$

34) $(\sec\theta + \tan\theta)(1 - sen\theta) = \cos\theta$

35) $\dfrac{sen2\theta}{1 - \cos 2\theta} = \cot\theta$

36) $\dfrac{\cos 2\theta}{sen\theta} + \dfrac{sen2\theta}{\cos\theta} = csc\theta$

37) $\dfrac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos^2\theta} = \tan^2\theta$

38) $\dfrac{sen2\theta}{sen\theta} - \dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta} = \sec\theta$

39) $\cot\theta - \dfrac{\cos 2\theta}{sen\theta\cos\theta} = \tan\theta$

40) $\dfrac{\tan\theta - \tan\delta}{\sec\theta\sec\delta} = sen(\theta - \delta)$

3.4 Resolución de triángulos rectángulos

Objetivo

Usar las funciones trigonométricas para encontrar datos faltantes de triángulos rectángulos y resolver problemas de aplicación que los involucren.

Supongamos, por ejemplo, que se desea sujetar un poste de 8 m. de altura por medio de un tirante de alambre sujeto a lo alto del poste y a una estaca situada a una distancia de 5 m. del pie del mismo sobre un suelo horizontal. ¿Cual deberá ser la longitud del alambre que se necesita y cual su inclinación con respecto al suelo y con respecto al poste? Este problema se resuelve con facilidad por medio de las relaciones trigonométricas anteriormente vistas.

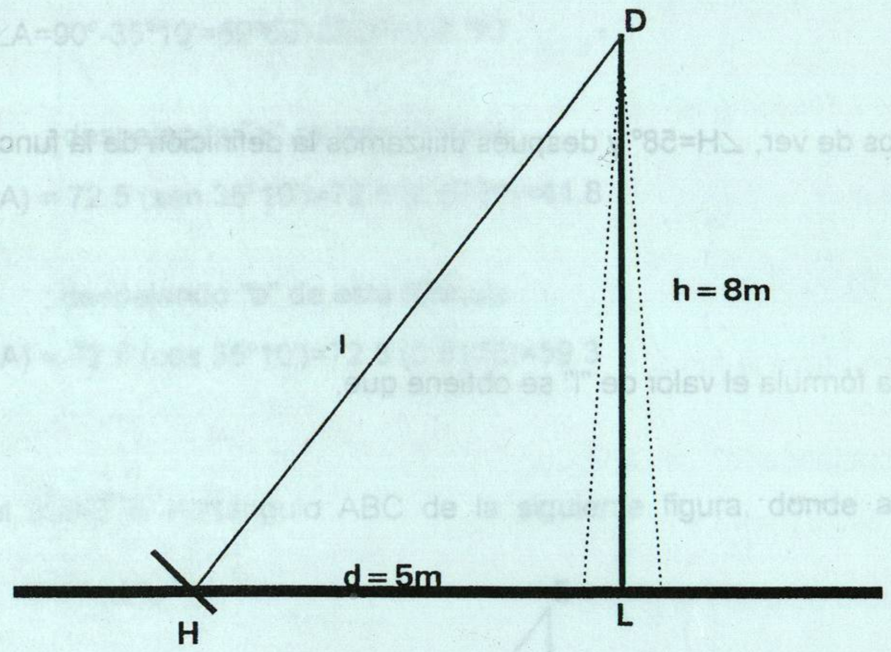

Fig. 3.6

En efecto, si DL es el poste (Fig. 3.6) y "h" su altura conocida de 8 m., "d" la distancia HL de 5 m. Desde la estaca al pie del poste, y DH representa el alambre de longitud "l" sujeto a la estaca en H; el DHL es un triángulo rectángulo en L en el que, como sabemos, $l^2 = d^2 + h^2$, de donde , $l = \sqrt{d^2 + h^2}$. Puesto que "d" y "h" se conocen, esta fórmula nos permite calcular inmediatamente "l".

$l = \sqrt{d^2 + h^2} = \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{25 + 64} = \sqrt{89} = 9.43m$

La inclinación del alambre con respecto al suelo es el $\angle$H, y de la definición de la función tangente, deducimos que