

- | | | | | | |
|-------------------------------|---|-----------|-------------------------------|---|------------|
| 5. $\angle A = 73^\circ 44'$ | y | $a = 36$ | 6. $\angle A = 59^\circ 29'$ | y | $b = 33$ |
| 7. $\angle A = 61^\circ 56'$ | y | $b = 32$ | 8. $\angle A = 64^\circ 57'$ | y | $c = 85$ |
| 9. $\angle B = 12^\circ 41'$ | y | $b = 36$ | 10. $a = 13$ | y | $b = 84$ |
| 11. $a = 180$ | y | $b = 33$ | 12. $a = 15$ | y | $c = 113$ |
| 13. $a = 96$ | y | $c = 146$ | 14. $b = 16$ | y | $c = 65$ |
| 15. $b = 12$ | y | $c = 37$ | 16. $\angle B = 26^\circ$ | y | $a = 80$ |
| 17. $\angle B = 6^\circ 44'$ | y | $a = 144$ | 18. $\angle B = 48^\circ 40'$ | y | $c = 22.5$ |
| 19. $\angle B = 43^\circ 36'$ | y | $b = 20$ | | | |

20. Problema de la cuerda de la bandera.
Si necesitas comprar cuerda para el asta de una bandera y observas que la sombra del asta en el piso es 11.6 m. y el ángulo de elevación del sol es de $35^\circ 40'$. ¿De qué tamaño debes de comprar la cuerda?
21. Problema de la torre de observación.
La torre más alta del mundo mide 553 m. de altura y se encuentra en Toronto, si la sombra que proyecta en el piso mide 1100 metros de longitud ¿Cuál será el ángulo de elevación del sol a esa hora del día?
22. Problema del faro de luz.
Un observador ve desde lo alto de un faro de 60 m. de altura un barco en el agua, con un ángulo de depresión de $12^\circ 42'$ ¿Cuál será la distancia del barco a la torre?
23. Problema de la radioterapia.
Un tubo de rayos gamma es usado para tratar un tumor que se encuentra 5.7 cm. debajo de la piel del paciente, para no dañar un órgano que esta arriba del tumor, el técnico mueve el tubo 8.3 centímetros hacia un lado. ¿Cuál será el ángulo del tubo para que los rayos peguen en el tumor? ¿Cuánto tendrá que viajar el rayo a través de la piel?
24. Problema de la inclinación de la calle.
Cierta persona desea saber cuál es el ángulo de inclinación de una calle. Se da cuenta que los ladrillos de una barda son horizontales con respecto a la calle y mide desde un punto, la distancia horizontal es de 35 cm. y de ahí hacia abajo el ladrillo mide 6 cm. de distancia vertical hacia la calle. ¿Cuál es el ángulo de inclinación?
25. Problema del misil.
Un observador se encuentra a 4.8 km. del lanzamiento de un misil y lo ve ascender.
a. A un determinado tiempo, el ángulo de elevación es $30^\circ 25'$ ¿Qué tan alto está el misil? ¿Qué tan lejos esta del observador?
b. ¿Cuál será el ángulo de elevación cuando el misil alcance 30 km. de altura?

CAPÍTULO 4

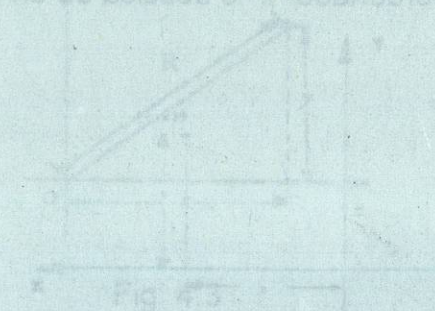
TRIGONOMETRÍA
SEGUNDA PARTE

Unos de los principales usos de las funciones trigonométricas es para calcular dimensiones en triángulos rectángulos. Esto puede parecer principalmente de interés académico, pero como verás en las próximas secciones, los tipos de aplicaciones pueden ser bastante modernos.

A menudo en las aplicaciones aparecen datos incompletos sobre los ángulos o longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo, datos cuyos valores son necesarios. Al proceso de determinar las partes restantes de un triángulo rectángulo, si se conocen algunas de ellas, se le llama "resolución de un triángulo rectángulo".

Un triángulo está compuesto básicamente de seis partes, los tres lados y los tres ángulos; un triángulo rectángulo queda determinado completamente si conoces, aparte del ángulo recto: a) un lado y un ángulo agudo, o b) dos lados.

Así, al resolver triángulos rectángulos harás uso de las funciones trigonométricas, del teorema de Pitágoras y del hecho de que los dos ángulos agudos son complementarios. Usualmente encontrarás ventajoso hacer un bosquejo aproximado del triángulo; esto te ayudará a determinar que funciones trigonométricas puedes usar para encontrar las partes desconocidas.



4.1 Funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera

Objetivo

Encontrar los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo de cualquier magnitud, dado: a) un punto del lado terminal de un ángulo en posición normal o b) el valor de una función trigonométrica junto con información sobre el cuadrante en el que se localiza el ángulo. Encontrar los ángulos de referencia y usarlos para encontrar los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo mayor de 90°

En determinados tipos de problemas como los que hasta ahora hemos estudiado, en los que intervienen rectas y ángulos, estos elementos forman parte de triángulos rectángulos. Pero no siempre es éste el caso y, como veremos en el otro capítulo, es necesario muchas veces resolver triángulos oblicuángulos.

En los triángulos rectángulos los ángulos cuyas funciones trigonométricas hemos utilizado en los cálculos son siempre agudos. Sin embargo, en los triángulos oblicuángulos hay que operar con ángulos obtusos. Se presenta, pues, la necesidad de retomar el concepto de ángulo.

Un "sistema de coordenadas rectangulares" en un plano consiste en dos rectas numéricas perpendiculares entre sí (llamadas ejes), una horizontal y la otra vertical, cuyo punto de intersección (origen) es el cero de cada escala. Se acostumbra escoger la dirección positiva, en la escala horizontal (eje X), a la derecha del origen y hacia arriba del origen en la escala vertical (eje Y).

Gracias a este sistema, la posición de un punto P en el plano puede darse por medio de sus distancias dirigidas con respecto a estos ejes, a las que son llamadas "coordenadas" del punto. La coordenada "x" o abscisa de un punto P (fig. 4.1).

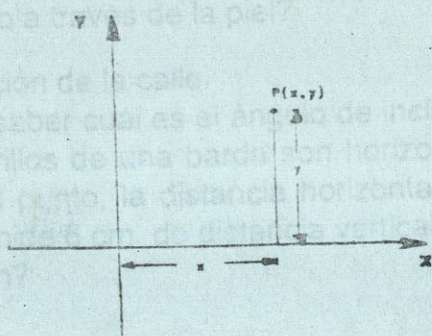


Fig. 4.1

es la distancia dirigida "x" desde el eje Y hasta el punto P, y la coordenada "y" u ordenada es la distancia dirigida "y" desde el eje X hasta el punto P. Un punto P con una abscisa "x" y una ordenada "y" se denotará como P(x, y).

Los ejes dividen al plano en cuatro partes llamadas "cuadrantes" y se enumeran en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Los cuadrantes numerados, junto con los signos de las coordenadas de un punto en cada uno de ellos, se muestran en la figura 4.2.

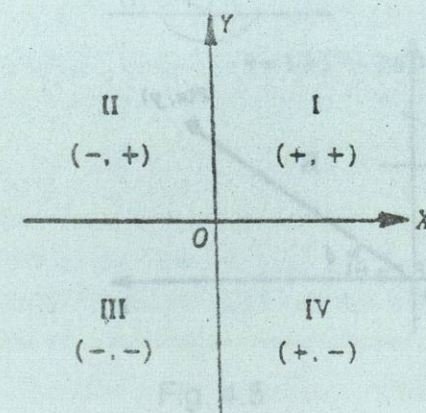


Fig. 4.2

Otra distancia por considerar es la distancia del origen O al punto P. Esta distancia llamada R (figura 4.3), es la "distancia radial" de P. La "distancia radial" de P no es una distancia dirigida, por lo cual siempre es un número no negativo. Utilizando el teorema de Pitágoras se puede determinar R en términos de "x" y de "y":

$$R^2 = x^2 + y^2$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

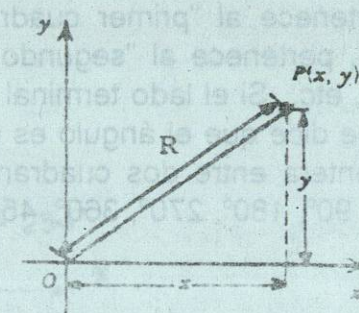


Fig. 4.3

Por lo tanto, a cada punto P localizado en un sistema de coordenadas rectangulares, se le asocian tres valores: "x", "y" y R.

A un punto P se le asocia también un cuarto valor, θ , donde θ es la medida de un ángulo dirigido (positivo, si se mide en contra de las manecillas del reloj y negativo, si se mide a favor)

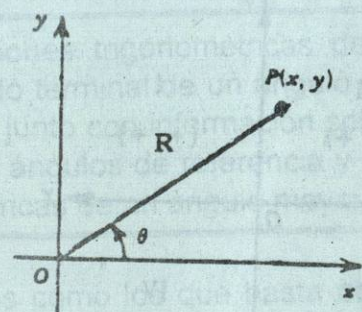


Fig. 4.4

Este ángulo tiene como lado inicial la parte positiva del eje X y como lado terminal el rayo que sale del origen O y que pasa por el punto P. (Fig. 4.4) observa que no hay un único valor de θ para cada punto P; de hecho, hay un número ilimitado de valores de θ que pueden asociarse a cada punto P, que pueden encontrarse agregando múltiplos enteros de 360° al valor del ángulo específico.

Con respecto a un sistema de coordenadas rectangulares, se dice que un ángulo se encuentra en "posición normal", cuando su vértice está en el origen y su lado inicial coincide con el eje positivo X.

Un ángulo en posición normal pertenece al "primer cuadrante" cuando su lado terminal cae dentro del cuadrante I, pertenece al "segundo cuadrante" si su lado terminal cae dentro del cuadrante II, etc. Si el lado terminal de un ángulo coincide con uno de los ejes coordenados, se dice que el ángulo es un "ángulo cuadrantal" (ya que el lado terminal es una frontera entre dos cuadrantes adyacentes). Por ejemplo, los ángulos situados en 0° , 90° , 180° , 270° , 360° , 450° , 540° , 630° ; etc. son cuadrantales.

Observa que R puede rotar, ya sea en la dirección en que giran las manecillas del reloj, o bien en la dirección contraria hacia el punto P. También R puede rotar dando una o más vueltas completas hasta llegar al punto P.

Los ángulos de medidas distintas pero con el mismo lado terminal se llaman "ángulos coterminales". Los ángulos son coterminales si sus lados terminales coinciden al estar los ángulos en posición normal. La figura 4.5 muestra tres ángulos coterminales:

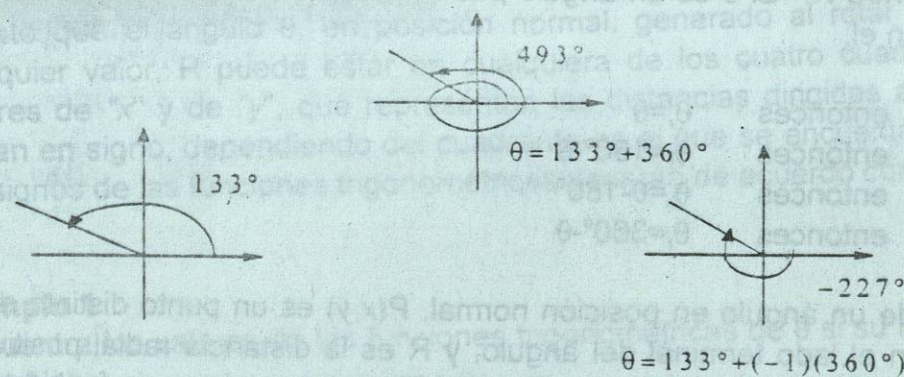


Fig. 4.5

Para dibujar un ángulo en posición normal y localizar R exactamente, nos podemos auxiliar encontrando el ángulo agudo entre el eje X (parte positiva o negativa) y el lado terminal R del ángulo dado. A este ángulo se le llama "ángulo de referencia" (θ_r). La figura 4.6 muestra ángulos de referencia para algunos valores de θ .

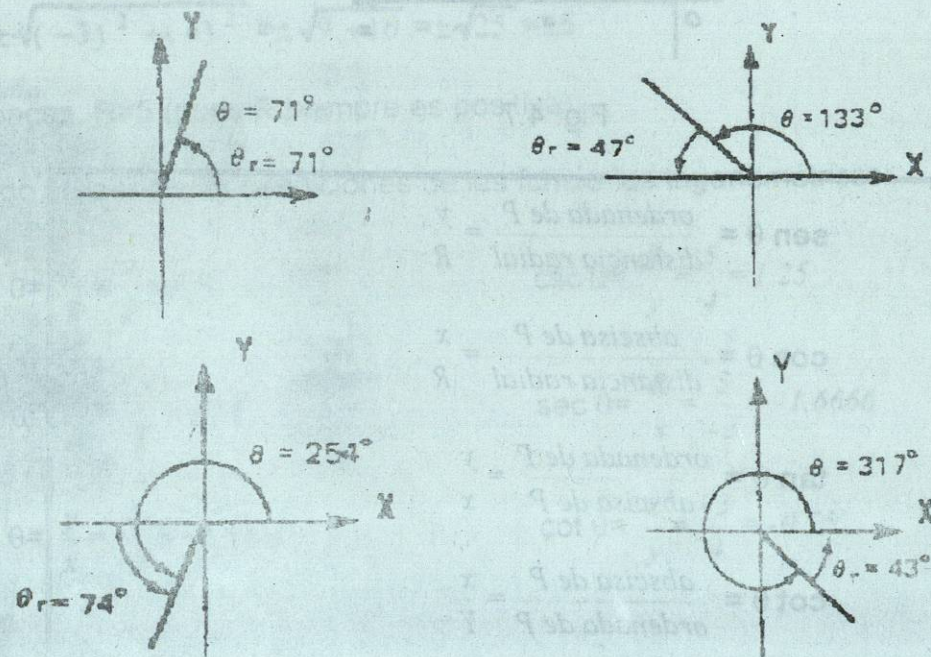


Fig. 4.6

En general, el valor del ángulo de referencia de un ángulo depende del cuadrante en el que se encuentre R. Si θ es un ángulo positivo en posición normal y el lado terminal de θ está en el:

Cuadrante I,	entonces	$\theta_r = \theta$
Cuadrante II,	entonces	$\theta_r = 180^\circ - \theta$
Cuadrante III,	entonces	$\theta_r = \theta - 180^\circ$
Cuadrante IV,	entonces	$\theta_r = 360^\circ - \theta$

Si θ es la medida de un ángulo en posición normal, $P(x,y)$ es un punto distinto del origen localizado en el lado terminal del ángulo, y R es la distancia radial positiva desde O hasta P (como se muestra en la Figura 4.7). entonces las seis funciones trigonométricas definidas ahora en términos de la abscisa, la ordenada y la distancia radial del punto P, queda como sigue:

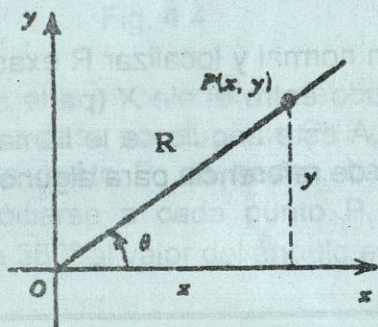


Fig. 4.7

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{ordenada de } P}{\text{distancia radial}} = \frac{y}{R}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{\text{abscisa de } P}{\text{distancia radial}} = \frac{x}{R}$$

$$\text{tan } \theta = \frac{\text{ordenada de } P}{\text{abscisa de } P} = \frac{y}{x}$$

$$\text{cot } \theta = \frac{\text{abscisa de } P}{\text{ordenada de } P} = \frac{x}{y}$$

$$\text{sec } \theta = \frac{\text{distancia radial}}{\text{abscisa de } P} = \frac{R}{x}$$

$$\text{csc } \theta = \frac{\text{distancia radial}}{\text{ordenada de } P} = \frac{R}{y}$$

Puesto que el ángulo θ , en posición normal, generado al rotar R, puede tomar cualquier valor, R puede estar en cualquiera de los cuatro cuadrantes. Así, los valores de "x" y de "y", que representan las distancias dirigidas a un punto en R, varían en signo, dependiendo del cuadrante en el que se encuentra R; por lo tanto, los signos de las funciones trigonométricas variarán de acuerdo con esto.

Ejemplo 1

Encuentra los valores de las funciones trigonométricas de θ si su lado terminal para por $(-3,4)$

Solución:

Primero se determina la distancia, R:

$$R^2 = x^2 + y^2$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$R = \pm \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \pm \sqrt{9 + 16} = \pm \sqrt{25} = \pm 5$$

entonces, $R=5$ (pues R siempre es positiva).

Luego utilizando las definiciones de las funciones trigonométricas:

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{R} = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$\text{cos } \theta = \frac{x}{R} = \frac{-3}{5} = -0.6$$

$$\text{tan } \theta = \frac{y}{x} = \frac{4}{-3} = -1.3333$$

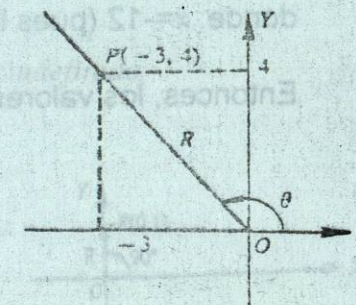
$$\text{csc } \theta = \frac{R}{y} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$\text{sec } \theta = \frac{R}{x} = \frac{5}{-3} = -1.6666$$

$$\text{cot } \theta = \frac{x}{y} = \frac{-3}{4} = -0.75$$

Ejemplo 2

Encuentra los valores de las cinco funciones trigonométricas restantes de θ , si θ está en posición normal en el tercer cuadrante y $\text{sen } \theta = -\frac{5}{13}$



Solución :

Como sabemos que $\sin \theta = \frac{y}{R}$ y $\sin \theta = \frac{-5}{13}$ ($y = -5$, $R = 13$)

entonces, $y = -5$ y $R = 13$; luego, utilizando el teorema de Pitágoras, para determinar la abscisa, x :

$$R^2 = x^2 + y^2$$

$$x = \pm \sqrt{R^2 - y^2}$$

$$x = \pm \sqrt{(13)^2 - (-5)^2} = \pm \sqrt{169 - 25} = \pm \sqrt{144} = \pm 12$$

donde: $x = -12$ (pues la abscisa de un punto en el tercer cuadrante es negativo).

Entonces, los valores de las demás funciones serán:

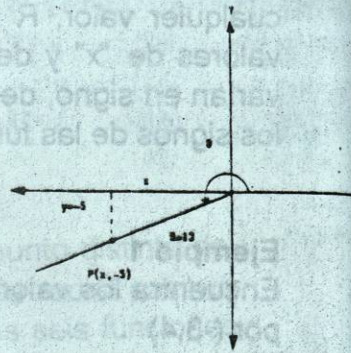
$$\csc \theta = \frac{R}{y} = \frac{13}{-5} = -2.6$$

$$\cos \theta = \frac{x}{R} = \frac{-12}{13} = -0.9231$$

$$\sec \theta = \frac{R}{x} = \frac{13}{-12} = -1.0833$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-5}{-12} = 0.4167$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-12}{-5} = 2.4$$



Ejemplo 3

Encuentra los valores de las funciones trigonométricas de θ si su lado terminal pasa por:

a) (1,0)

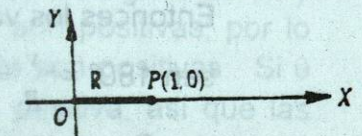
b) (0,1)

c) (-1,0)

d) (0,-1)

Solución :

a) El lado terminal coincide con la parte positiva del eje X, por lo tanto, θ es el ángulo cuadrantal de 0° ; donde: $x=1$ y $y=0$



$$R = \sqrt{x^2 + y^2} = \pm \sqrt{(1)^2 + (0)^2} = \pm \sqrt{1} = \pm 1$$

$$R = 1$$

Entonces los valores de las funciones de 0° son:

$$\sin 0^\circ = \frac{y}{R} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\csc 0^\circ = \frac{R}{y} = \frac{1}{0} = \text{indefinido}$$

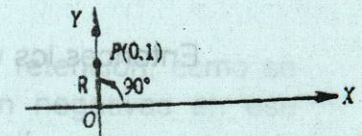
$$\cos 0^\circ = \frac{x}{R} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 0^\circ = \frac{R}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\tan 0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cot 0^\circ = \frac{x}{y} = \frac{1}{0} = \text{indefinido}$$

b) El lado terminal coincide con la parte positiva del eje Y, por lo tanto, θ es el ángulo cuadrantal de 90° ; donde: $x=0$ y $y=1$



$$R = \sqrt{x^2 + y^2} = \pm \sqrt{(0)^2 + (1)^2} = \pm \sqrt{1} = \pm 1$$

$$R = 1$$

Entonces los valores de las funciones de 90° son:

$$\sin 90^\circ = \frac{y}{R} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\csc 90^\circ = \frac{R}{y} = \frac{1}{1} = 1$$

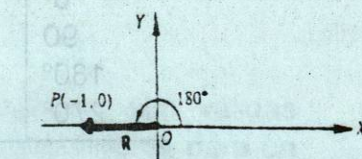
$$\cos 90^\circ = \frac{x}{R} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sec 90^\circ = \frac{R}{x} = \frac{1}{0} = \text{indefinido}$$

$$\tan 90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} = \text{indefinido}$$

$$\cot 90^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0$$

c) El lado terminal coincide con la parte negativa del eje X, por lo tanto, θ es el ángulo cuadrantal de 180° ; donde: $x=-1$ y $y=0$



$$R = \sqrt{x^2 + y^2} = \pm \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} = \pm \sqrt{1} = \pm 1$$

$$R = 1$$