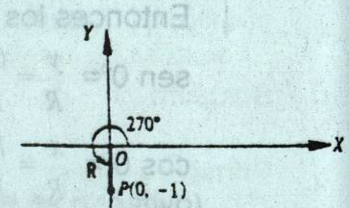
Entonces los valores de las funciones de 180° son:

sen 180° = $\frac{y}{R} = \frac{0}{1} = 0$ csc 180° = $\frac{R}{y} = \frac{1}{0}$ = *indefinido*

cos 180° = $\frac{x}{R} = \frac{-1}{1} = -1$ sec 180° = $\frac{R}{x} = \frac{1}{-1} = -1$

tan 180° = $\frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$ cot 180° = $\frac{x}{y} = \frac{-1}{0}$ = *indefinido*

d) El lado terminal coincide con la parte negativa del eje *Y*, por lo tanto, θ es el ángulo cuadrantal de 270°; donde x=0 y y=-1



R= $\sqrt{x^2+y^2} = \pm\sqrt{(0)^2+(-1)^2} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

R=1

Entonces los valores de las funciones de 270° son:

sen 270°= $\frac{y}{R} = \frac{-1}{1} = -1$ csc 270°= $\frac{R}{y} = \frac{1}{-1} = -1$

cos 270°= $\frac{x}{R} = \frac{0}{1} = 0$ sec 270°= $\frac{R}{x} = \frac{1}{0}$ = *indefinido*

tan 270°= $\frac{y}{x} = \frac{-1}{0}$ = *indefinido* cot 270°= $\frac{x}{y} = \frac{0}{-1} = 0$

Por lo tanto, los resultados obtenidos en el ejemplo 3 se pueden resumir en la tabla 3 siguiente:

	senθ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
0°	0	1	0	--	1	--
90	1	0	--	0	--	1
180°	0	-1	0	--	-1	--
270°	-1	0	--	0	--	-1

Tabla 3

Los signos asociados a los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo dependen del cuadrante en el que encuentre el lado final del ángulo. El valor de R

siempre es positivo; así los signos de las funciones dependen de los signos de *"x"* y de *"y"*. Si θ está en el primer cuadrante, tanto *"x"* como *"y"* son positivas; por lo tanto, todas las razones trigonométricas en el primer cuadrante son positivas. Si θ está en el segundo cuadrante, el *"x"* es negativa y la *"y"* es positiva; así que las razones en las que aparezca *"x"* son negativas y las demás positivas. Por lo tanto, en el cuadrante II únicamente son positivas el seno y el cosecante, y el coseno, la tangente, la cotangente y la secante son negativas. Después de analizar los signos de las funciones para cada cuadrante, podemos resumir los resultados en la Tabla 4.

	senθ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
I	+	+	+	+	+	+
II	+	-	-	-	-	+
III	-	-	+	+	-	-
IV	-	+	-	-	+	-

Tabla 4

También se pueden resumir estos resultados, para su mayor retención, como se muestra en Figura 4.8 (las funciones que no aparecen son negativas en ese cuadrante).

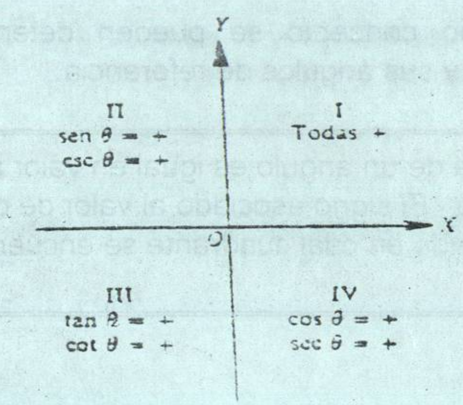


Fig. 4.8

Es evidente que las definiciones de las funciones trigonométricas son válidas independientemente del cuadrante en el que se encuentre R y sus valores para un ángulo dado, también son independientes del punto P en su lado terminal; pero los diagramas de la Figura 4.9, demuestran que los valores de las funciones trigonométricas para un ángulo θ cambian de acuerdo con el valor de θ y están relacionados con el valor de las funciones del ángulo de referencia (θ_r) correspondiente.

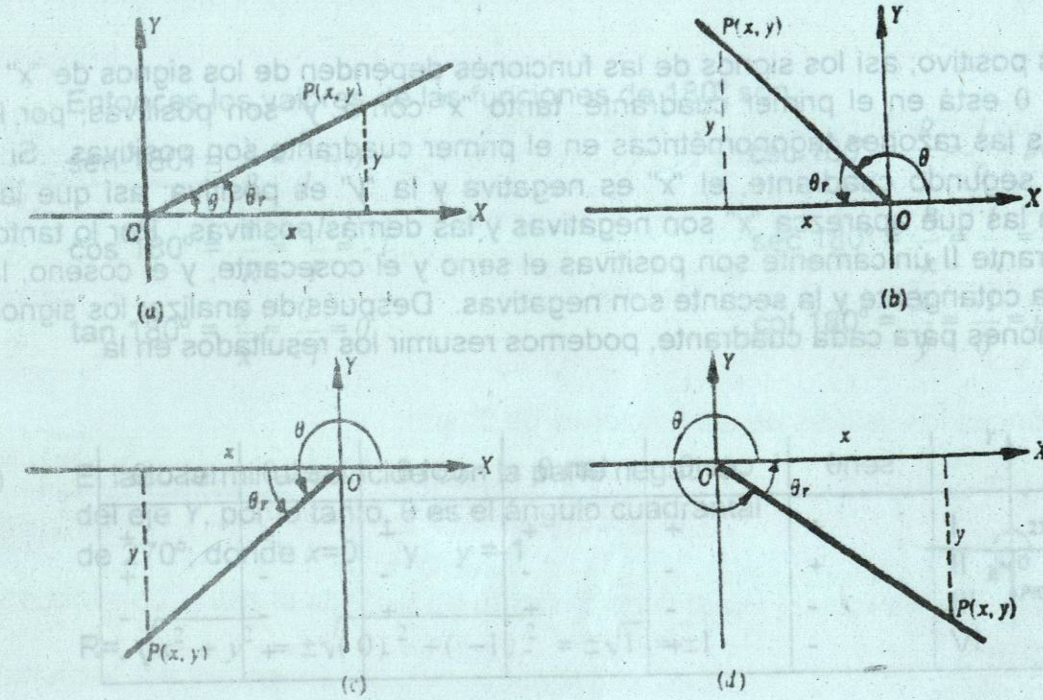


Fig. 4.9

Haciendo uso de este último concepto se pueden determinar las funciones trigonométricas de los ángulos y sus ángulos de referencia.

Cualquier función trigonométrica de un ángulo es igual en valor absoluto, al mismo valor de su ángulo de referencia. El signo asociado al valor de cada función trigonométrica se determina viendo en cuál cuadrante se encuentra el lado terminal del ángulo dado

Por ejemplo
$|\text{sen}\,\theta| = \text{sen}\,\theta_r$

o bien,
$\text{sen}\,\theta = \pm\,\text{sen}\,\theta_r$

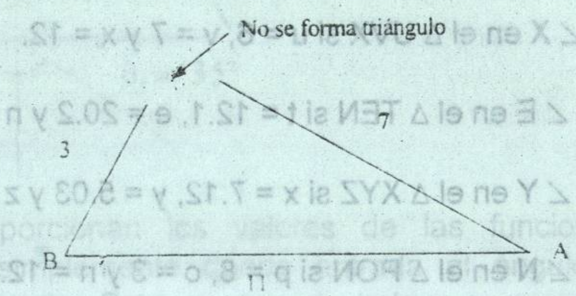
Este procedimiento se puede aplicar a todas las funciones trigonométricas en todos los cuadrantes, por lo que el concepto anterior se puede aplicar a cualquier ángulo entre 0° y 360°. Por lo demás, si el ángulo es mayor de 360° o menor de 0° (ángulo

Ejemplo 4

En el Δ ABC si a = 3, b = 7 y c = 11. Encuentra ∠ C.

Solución :

Aplicando la Ley de los Cosenos :



$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,\text{Cos C}$

Despejando Cos C tenemos :

$$\text{Cos C} = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}$$

$$\text{Cos C} = \frac{(11)^2 - (3)^2 - (7)^2}{-2(3)(7)}$$

$$\text{Cos C} = \frac{121 - 9 - 49}{-42}$$

$$\text{Cos C} = \frac{63}{-42} = -1.5$$

Nota. Como el coseno sólo tiene valores entre -1 y 1 inclusive, esto quiere decir que el triángulo no se cierra, o sea no se forma, por lo que no hay solución en este caso.

Ejercicio 4.2

Para los siguientes problemas encuentra el lado opuesto al ángulo dado.

1. En el Δ ABC si b = 4, c = 5 y ∠ A = 50°
2. En el Δ ABC si a = 7, c = 9 y ∠ B = 35°
3. En el Δ PQR si p = 3, q = 2 y ∠ R = 136°
4. En el Δ HJK si h = 8, j = 6.1 ∠ K = 172° 15'
5. En el Δ DEF si d = 35.3, f = 47.8 y ∠ E = 65° 40'
6. En el Δ BAD si a = 2.99, d = 5.92 y ∠ B = 119° 22'

Para los siguientes problemas encuentra el ángulo que se te indica

7. $\angle$ A en el Δ ABC si a = 2, b = 3 y c = 4.

8. $\angle$ F en el Δ DEF si d = 5, e = 6 y f = 8.

9. $\angle$ X en el Δ UVX si u = 6, v = 7 y x = 12.

10. $\angle$ E en el Δ TEN si t = 12.1, e = 20.2 y n = 16.3.

11. $\angle$ Y en el Δ XYZ si x = 7.12, y = 5.03 y z = 13.34.

12. $\angle$ N en el Δ PON si p = 8, o = 3 y n = 12.

4.3 Área de un Triángulo

Objetivo :

Dada la medida de dos lados y el ángulo incluido, encuentra el área del triángulo.

De geometría puedes recordar que el área de un triángulo es : (Fig. 4.11)

$$\text{Área} = \frac{1}{2}bh$$

Donde b = base y h = altura

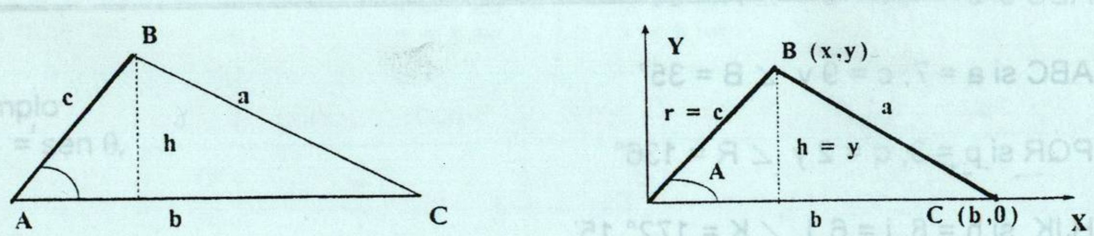
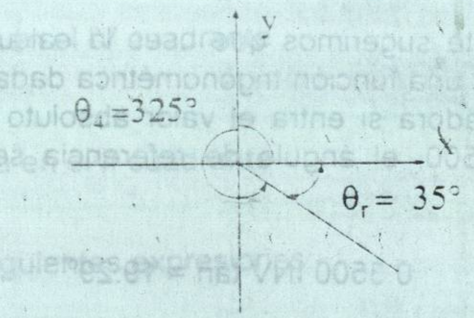


Figura 4.11

Si conoces los lados *b* y *c* y la medida del ángulo *A* puedes calcular la altura *h*. Construyendo el punto cartesiano *xy*. El punto *B(x,y)* se convierte en un punto en el sistema cartesiano. Por la definición de seno.

Para la solución del cuarto cuadrante:
θ_4=360°-35°=325°



La mayoría de las calculadoras proporcionan los valores de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo, simplemente dando entrada al ángulo y oprimiendo el botón de "función" apropiado. Esto es, la calculadora se toma el trabajo de encontrar funciones trigonométricas para ángulos que no son agudos.

Ejemplo 6

Utiliza la calculadora para encontrar: sen 192°

Solución:

En la calculadora puede evaluarse sen 192° poniendo simplemente la calculadora en el modo grados, dando entrada a 192 y oprimiendo el botón **sin**. En la pantalla se leerá -0.20791. Por lo tanto.

sen 192° = -0.2079

Notarás que cuando se usa una calculadora para encontrar un ángulo, cuando se conoce el valor de su función trigonométrica, se obtiene solamente un ángulo. Por ejemplo, si sen θ = -0.5, tu calculadora dará solamente el ∠θ = -30°. Sin embargo, si cos θ = -0.5, tu calculadora dará el ∠θ = 120°. La razón por la que obtenemos un ángulo agudo negativo en el primer caso y un ángulo obtuso positivo en el segundo es porque, por ejemplo, si quisiéramos encontrar el valor de θ para el cual tan θ = 1, desafortunadamente hay una infinidad de valores de θ, que satisfacen esta condición, algunos de los cuales son: 45°, 225°, 405°, 585°, 765°, 945°, etc., también, -135°, -315°, -495°, -675°, etc.; deberás estar consciente de las dificultades inherentes que representa para la calculadora resolver la ecuación tan θ = 1, ¿qué valor desplegaría en la pantalla como solución? Para evitar esta ambigüedad la calculadora restringe el dominio de tan θ al intervalo entre 0° y 180° o entre, 0° y -180°. Entonces, θ = 45°, que es el único valor de θ para el cual tan θ = 1. La situación descrita para la función tangente es cierta también para las demás funciones trigonométricas y los valores del dominio a los cuales se limita así una función trigonométrica se llaman "valores principales" de la función.

Sobre el dominio de valores principales, ecuaciones tales como sen $\theta = -0.5$, o $\cos\theta = -0.5$ tienen solamente una solución posible.

Para evitar confusiones, te sugerimos que uses la calculadora para encontrar el ángulo de referencia para una función trigonométrica dada. El ángulo de referencia se obtendrá de la calculadora si entra el valor absoluto de la función dada. Por ejemplo, si $\tan\theta = -0.3500$, el ángulo de referencia se encuentra presionando 0.3500. Esto es

$$0.3500 \text{ INV } \tan = 19.29^\circ$$

Los ángulos deseados se encuentran ahora mediante el procedimiento descrito previamente, esto es $\theta_{II} = 180^\circ - 19.29^\circ = 160.29^\circ$ y $\theta_{IV} = 360^\circ - 19.29^\circ = 340.71^\circ$

Ejemplo 7

Encuentra los valores de θ tales que $0^\circ \le \theta < 360^\circ$ si: sen$\theta = -0.5664$

Solución

Introduciendo el valor absoluto de la función y presionando las teclas INV sin. El ángulo de referencia resultante es:

$$0.5664 \text{ INV } \sin = 34.5^\circ$$

Ahora, puesto que el seno es negativo en el tercero y en el cuarto cuadrante, obtenemos:

$$\theta_{III} = 180^\circ + 34.5^\circ = 214.5^\circ$$

$$\theta_{IV} = 360^\circ - 34.5^\circ = 325.5^\circ$$

Ejercicio 4.1

En los problemas 1 y 2 encuentra el valor de las funciones trigonométricas del ángulo θ si su lado final pasa por:

1. (15,8)
2. (-7,-24)

En qué cuadrante quedaría localizado θ si:

3. sen θ es negativo y cos θ es positivo
4. sen θ y cos θ son negativos
5. sen θ es positivo y tan θ es negativo
6. sen θ y tan θ son positivos

Encuentra los valores de las demás funciones trigonométricas de θ, dado:

7. $\cos\theta = \frac{12}{35}$ y θ está en el IV cuadrante
8. $\tan\theta = -\frac{21}{20}$ y θ está en el II cuadrante

Evalúa cada una de las siguientes expresiones:

9. sen 0°+2 cos 0°+ 3 sen 90°+4 cos 90°+ 5 sec 0°+ 6 csc 90°
10. sen 180°+ 2 cos 180° + 3 sen 270° + 4 cos 270°- 5 sec 180°- 6 csc 270°
11. tan 180°-2 cos 180° + 3 csc 270° + sen 90°
12. sen 0° + 3 cot 90° + 5 sec 180° - 4 cos 270°
13. 4 cos(π/2) - 5 sen(3π/2) - 2 sen(π/2) + sen 0
14. 3 sen π + 4 cos 0 - 3 cos π + sen(π/2)

Expresa cada una de las funciones del ángulo dado, como la misma función de su ángulo de referencia y encuentra el valor de la función.

15. cot 147°
16. sec 333°
17. csc 233°
18. cos 100°
19. tan 590°
20. sen 1000°
21. cos (-345°)
22. sen (-965°)

Dado el valor de la función, encuentra la medida del ángulo θ, si $0^\circ \le \theta < 360^\circ$

23. cos θ=0.6157
24. tan θ=-1.376
25. sen θ=0.4014
26. sec θ=-1.035

27. Utiliza los valores de los ángulos especiales cuadrantales y el concepto del ángulo de referencia para encontrar los valores de las seis funciones trigonométricas de los ángulos: 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°, 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330° y 360° sin usar la calculadora o las tablas.

θ	sen θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
0°						
30°						
45°						
60°						
90°						
120°						
135°						
150°						
180°						
210°						
225°						
240°						
270°						
300°						
315°						
330°						
360°						

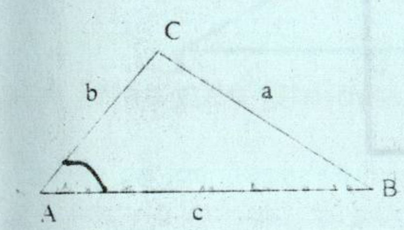
4.2 Triángulos Oblicuángulos - Ley de los Cosenos

Ahora aprenderás a resolver triángulos que no son rectángulos ; a estos les llamaremos triángulos oblicuángulos.

Objetivos

1. Dados dos lados y el ángulo incluido, encontrar la longitud del tercer lado.
2. Dados tres lados de un triángulo, encontrar la medida de un ángulo específico.

Supón que la longitud de los lados b y c del Δ ABC son conocidos, así como también la medida del ángulo incluido $\angle$ A se conoce (fig 4.10). Entonces se puede encontrar la medida del tercer lado.



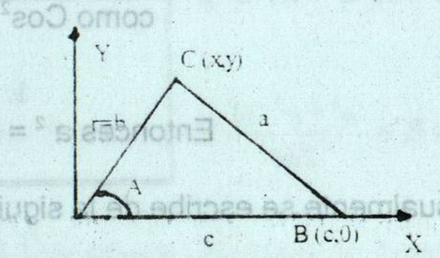


Figura 4.10

Si construyes un sistema coordenado xy con el ángulo A en posición estándar ; entonces **a** es la distancia entre los puntos B (c,0) y C (x, y). Con la fórmula de la distancia tenemos : $a^2 = (x - c)^2 + (y - 0)^2$

Para obtener a^2 en términos de b y c y el ángulo A, sólo tienes que observar que A es el ángulo y b es el radio del punto C (x, y). Por definición de seno y coseno.

$$\text{Cos A} = \frac{x}{b} \quad \text{y} \quad \text{Sen A} = \frac{y}{b}$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por b, obtienes:

$$x = b \text{ Cos A} \quad \text{y} \quad y = b \text{ Sen A}$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula anterior de la distancia tenemos :

$$a^2 = (b \text{ Cos A} - c)^2 + (b \text{ Sen A} - 0)^2$$