Elevando al cuadrado los binomios,

$$a^2 = b^2Cos\ ^2A - 2bc\ Cos\ A + c^2 + b^2\ Sen^2\ A$$

Asociando $Sen^2\ A + Cos\ ^2A$ y teniendo de factor común la b^2.

$$a^2 = b^2\ (Cos^2\ A + Sen^2A) - 2bc\ Cos\ A + c^2$$

$$\text{como } Cos^2\ A + Sen^2A = 1$$

$$\text{Entonces } a\ ^2 = b^2 - 2bc\ Cos\ A + c^2$$

El cuál usualmente se escribe de la siguiente manera :

LEY DE LOS COSENOS
$a\ ^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ Cos\ A$

Esta ecuación es llamada Ley de los Cosenos porque en ella aparece el coseno del ángulo. Si el ángulo A es igual a 90°, entonces el Cos A = 0 y la Ley de los Cosenos se reduce a :

$$a\ ^2 = b^2 + c^2$$

el cual es el Teorema de Pitágoras.

De igual manera la Ley de los Cosenos se puede escribir de las siguientes formas si son dados otros datos :

$$b\ ^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ Cos\ B$$

$$c\ ^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ Cos\ C$$

$$\frac{y}{r} = Sen A$$

$$y = rSen A$$

Multiplicando ambos miembros por *r*

Como $h = y$ y $c = r$ entonces sustituyendo tenemos

$$h = c\ Sen\ A$$

Sustituyendo h en la ecuación del área, entonces:

$$\boxed{Area = \frac{1}{2}bc\ Sen\ A}$$

Ejemplo 1

Encuentra el área del triángulo $\triangle ABC$ si b=13, c=15 y $\angle A$= 70°

Solución:

Aplicando la fórmula.

$$Area = \frac{1}{2}(13)(15)Sen\ 70°$$

$$Area = \frac{1}{2}(13)(15)(0.9397)$$

$$\underline{Área = 91.62}$$

Ejemplo 2

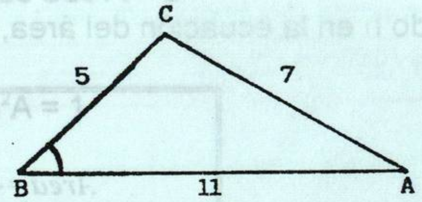
Encuentra el área del Δ ABC si a= 5, b= 7.

Solución :

Primero tienes que encontrar uno de los ángulos, utilizando la ley de los cosenos.

$$b^2= a^2+c^2- 2ac \text{ Cos } B$$

Despejando



$$2ac \text{ Cos } B = a^2+c^2-b^2$$

$$\text{Cos } B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$\text{Cos } B = \frac{(5)^2+(11)^2-(7)^2}{2(5)(11)}$$

$$\text{Cos } B = \frac{25+121-49}{110}$$

$$\text{Cos } B = \frac{97}{110}$$

$$\text{Cos } B = 0.8818$$

$$\angle B = 28°08'$$

Aplicando la ecuación del área.

$$Area = \frac{1}{2} ac \text{ Sen } B$$

$$A = \frac{1}{2}(5)(11) \text{ Sen } 28°08'$$

$$\text{Área} = 12.96$$

Ejercicio 4.3

Para los siguientes problemas encuentre el área de cada triángulo.

1. Δ *ABC*, si *a*= 6, *b*= 10 y $\angle$ *C*= 15°.

2. Δ *ABC*, si *b*= 8, *c*=4 y $\angle$ *A*= 66°

3. Δ *DEF*, si *d*= 4.8, *f*= 3.7 y $\angle$ *E*= 43°12'

4. Δ *XYZ*, si *y*= 34.28, *z*= 28.35 y $\angle$ *X*= 138°25'

5. Δ *ABC*, si *a*= 6, *b*= 9, *c*= 13

6. Δ *ABC*, si *a*= 5.1, *b*= 12.2, *c*= 13.3

4.4 Triángulo Oblicuángulo - Ley de los Senos.

La Ley de los Cosenos puede ser usada directamente cuando conoces dos lados y el ángulo incluido. Si solo conoces un lado, la Ley de los Cosenos no puede ser usada; para este caso se utilizará la Ley de los Senos.

Objetivo

Dada la medida de un ángulo, su lado opuesto y la medida de otro ángulo, calcular la longitud de un lado.

En secciones anteriores aprendiste que el área de un triángulo tal como el ΔABC (Fig. 4.12) es :

$$\text{Área} = \frac{1}{2} bc\text{Sen} A$$

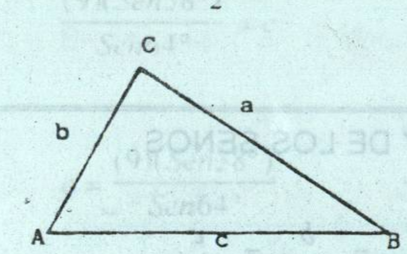


Fig. 4.12

El área también es igual a $\frac{1}{2}acSenB$ y $\frac{1}{2}abSenC$ como el área es constante, no importa el lado del triángulo que uses para medirla. Igualando estas expresiones obtienes:

$$\frac{1}{2}bcSenA = \frac{1}{2}acSenB = \frac{1}{2}abSenC$$

Multiplicando todos los miembros por 2 y dividiendo por abc nos queda:

$$\frac{2bcSenA}{2abc} = \frac{2acSenB}{2abc} = \frac{2abSenC}{2abc}$$

Eliminando términos semejantes:

LEY DE LOS SENOS

$$\frac{SenA}{a} = \frac{SenB}{b} = \frac{SenC}{c}$$

Esta fórmula es llamada la Ley de los Senos y es igual al seno del ángulo dividido entre su lado opuesto. Esta formula también puede ser escrita de la siguiente manera:

LEY DE LOS SENOS

$$\frac{a}{SenA} = \frac{b}{SenB} = \frac{c}{SenC}$$

Solo se invierten los numeradores y denominadores.

Los siguientes ejemplos te muestran cómo usar éstas formulas.

Ejemplo 1

Dados dos ángulos y un lado encontrar los otros lados

En el Δ *ABC*, $\angle$ *B*= 64°, $\angle$ *C*= 38° y lado *b*=9, encontrar lado *c*, y lado *a*. (Fig. 4.13)

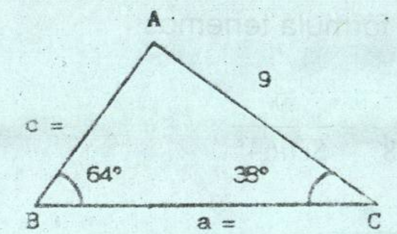


Fig. 4.13

Solución :

Sustituyendo los datos en la fórmula tenemos:

$$\frac{a}{SenA} = \frac{9}{Sen64°} = \frac{c}{Sen38°}$$

Como se puede observar, nos conviene tomar las dos últimas partes de la fórmula, ya que así, tendremos tres datos y sólo una incógnita.

$$\frac{9}{Sen64°} = \frac{c}{Sen38°}$$

Despejando c tenemos.

$$\frac{(9)(Sen38°)}{Sen64°} = c$$

o sea

$$c = \frac{(9)(Sen38°)}{Sen64°}$$

$$c = \frac{(9)(0.6157)}{0.8988}$$

Encontrando los valores

$\underline{c = 6.165}$

Haciendo operaciones y redondeando a tres cifras.

Para encontrar el lado *a*, primero tienes que encontrar el $\angle A$, entonces:

$$\angle A = 180° - 38° - 64° = 78°$$

Usando los dos primeros tramos de la fórmula tenemos:

$$\frac{a}{Sen78°} = \frac{9}{Sen64°}$$

Despejando a,

$$a = \frac{(9)(Sen78°)}{Sen64°}$$

Tomando los valores de los senos y haciendo operaciones

$$a = \frac{(9)(0.9781)}{0.8988}$$

$\underline{a = 9.794}$

Ejemplo 2

Dados dos ángulos y un lado encontrar otro lado.

En el Δ *ABC*, a=8, $\angle B = 64°$ y $\angle C = 38°$ encuentre lado *b* (Fig. 4.14)

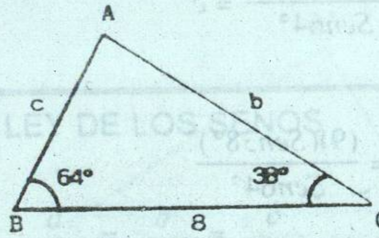


Fig. 4.14

Solución

Sustituyendo los datos en la fórmula.

$$\frac{8}{SenA} = \frac{b}{Sen64°} = \frac{c}{Sen38°}$$

Para poder usar la fórmula tenemos que encontrar primero el $\angle A$ (para tener tres datos y una incógnita)

$$\angle A = 180° - 64° - 38° = 78°$$

Así, usando las dos primeras partes de la fórmula tenemos:

$$\frac{8}{Sen78°} = \frac{b}{Sen64°}$$

Despejando *b*

$$b = \frac{(8)(Sen64°)}{Sen78°}$$

$$b = \frac{(8)(0.8988)}{0.9781}$$

$\underline{b = 7.351}$ Redondeando a tres cifras.

El siguiente ejercicio esta diseñado para que practiques la Ley de los Senos.

Ejercicio 4.4

Resuelve los siguientes problemas.

1. En Δ *ABC*, $\angle A = 54°$, $\angle B = 30°$ y lado a= 9, encuentra:
   - a. Lado b.
   - b. Lado c.
2. En Δ PQR, $\angle P = 15°$, $\angle Q = 130°$ y lado q= 9, encuentra:
   - a. Lado p.
   - b. Lado r.

3. En Δ AHS, ∠ A= 29°, ∠ H= 107°, lado a= 112, encuentra:

   a. Lado h.

   b. Lado s.

4. En Δ BIG, ∠ B= 2°, ∠ I= 79°, lado b= 20, encuentra:

   a. Lado i.

   b. Lado g.

5. En Δ PAF, ∠ P= 28°15', ∠ A= 117°30' y lado f= 8, encuentra:

   a. Lado a.

   b. Lado p.

6. En Δ JAW , ∠ J= 48°12', ∠ W= 73°27' y lado a= 5, encuentra:

   a. Lado j.

   b. Lado w.

7. En Δ ALP, ∠ A= 85°40', ∠ L= 87°50' y lado p= 30, encuentra:

   a. Lado a.

   b. Lado l.

8. Problema de los tres lados.

   La Ley de los Senos puede ser usada para conocer la medida de un ángulo pero para este caso primero tienes que usar la Ley de los Cosenos. Dados tres lados encontrar los ángulos.
   En el Δ ABC si lado a= 7, lado b= 4, lado c= 10 encuentra los ángulos.

   a. Usa la Ley de los Cosenos para encontrar el ∠ A.

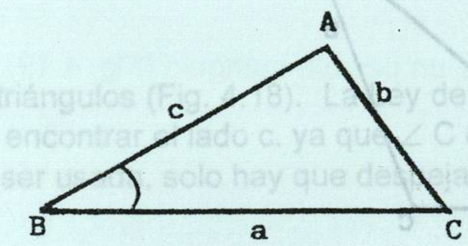
   b. Usa la respuesta anterior y con la Ley de los Senos encuentra el ∠ C.

   c. Encuentra otra vez el ∠ C, pero ahora usando la Ley de Cosenos.

   d. Probablemente las respuestas de b y c no sean iguales, explica porqué.

4.5 Los casos ambiguos

Ahora resolverás un triángulo cuando tenemos de datos conocidos dos lados y un ángulo no comprendido (Fig. 4.15)



Datos: lado a, lado b, ∠ B

Fig. 4.15

Hay 4 formas de que un triángulo ABC puede resolverse si conoces los lados a, b y el ángulo B. Para que veas porqué, es útil construir un triángulo. La figura 4.16 muestra el lado a y el ángulo B construido.

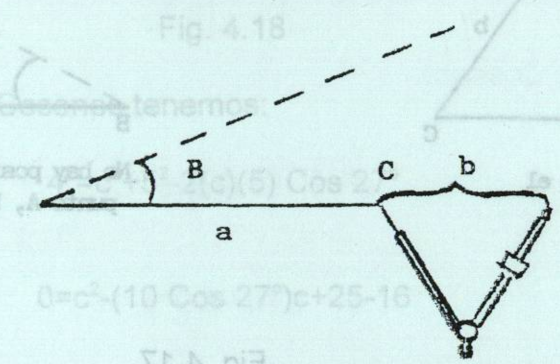


Fig. 4.16

Como el lado c no esta dado, simplemente dibuja una línea punteada en la dirección correcta, formando en ángulo B con el lado a. Luego para completar el triángulo, pon un compás en el punto c con una abertura igual al del lado b, y después traza su arco, donde el arco del compás toque la línea punteada, ahí será la posición correcta del punto A. La figura 4.17 muestra como hay cuatro formas posibles de trazar el punto A.

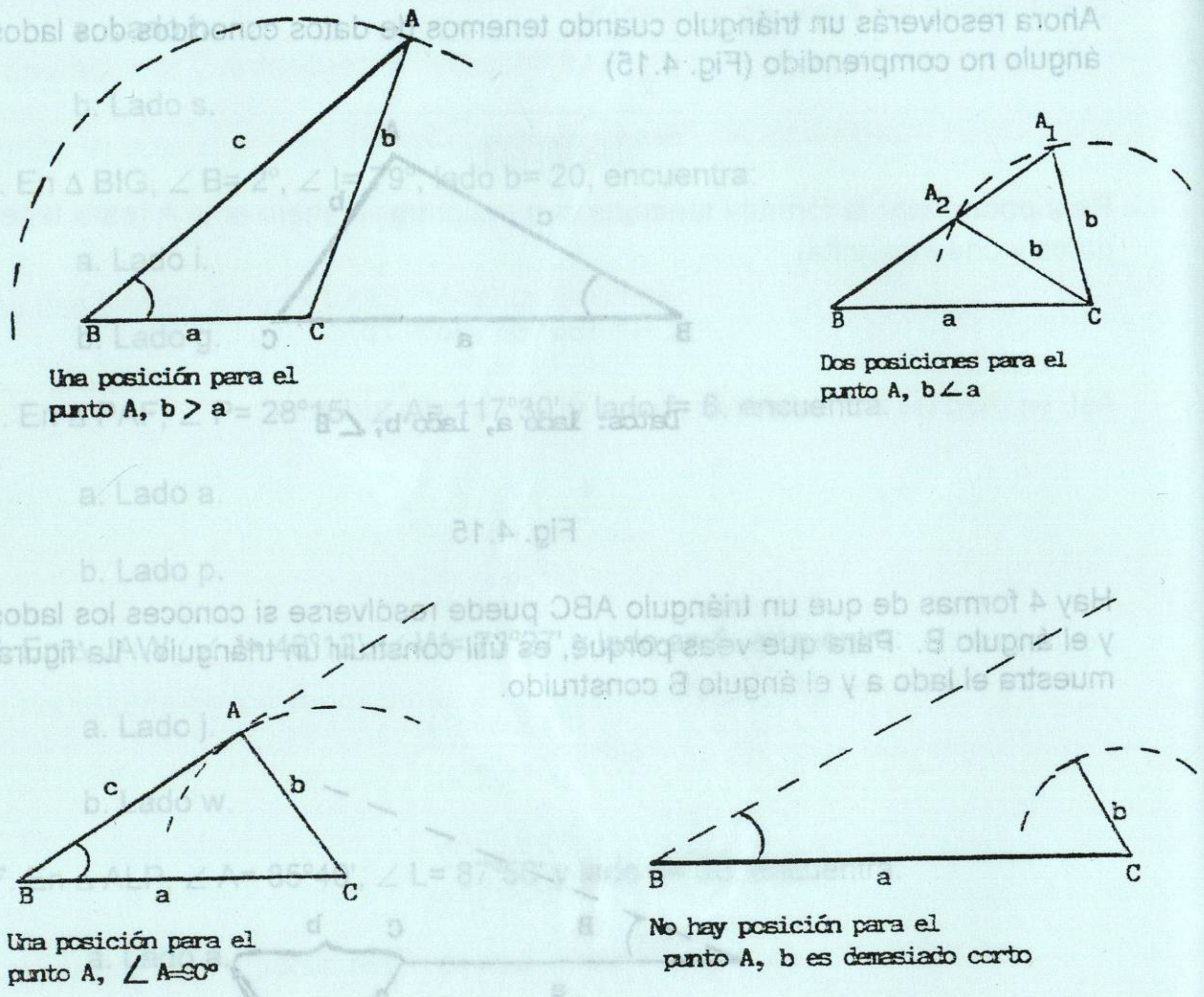


Fig. 4.17

Triángulos posibles dados, lado a, lado b y el ∠ B

Hay uno, dos o ningún posible triángulo cuando son dados dos lados y el ángulo no comprendido, es por esta razón que se llaman casos ambiguos. Ambiguo significa dos o más posibles significados.

Objetivo

Dados dos lados y el ángulo no comprendido. Determinar si hay o no triángulo, y si lo hay obtener las medidas del otro lado y el otro ángulo.

Ejemplo 1

En el triángulo Δ ABC si a=4, b=5 y ∠ A=27°. Encuentra los posibles valores de lado c.

Solución :

Como a<b, hay dos posibles triángulos (Fig. 4.18). La Ley de los Senos no puede ser usada directamente para encontrar el lado c. ya que ∠ C es desconocido. La Ley de los Cosenos si puede ser usada, solo hay que despejar el lado c.

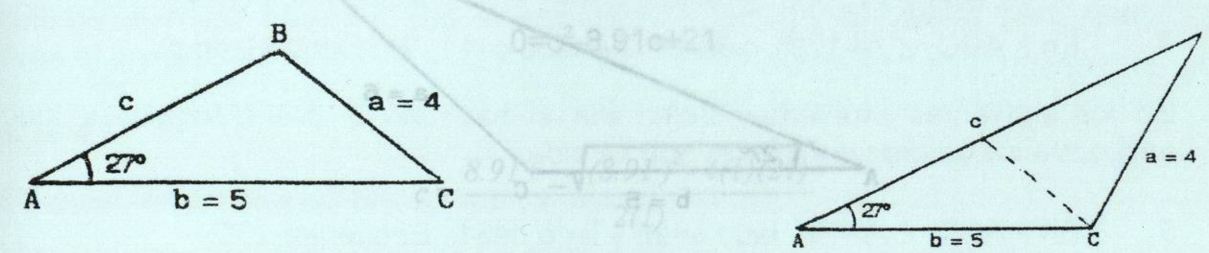


Fig. 4.18

Escribiendo la Ley de los Cosenos tenemos:

$$4^2=c^2+5^2-2(c)(5)\ \text{Cos}\ 27°$$

$$0=c^2-(10\ \text{Cos}\ 27°)c+25-16$$

$$0=c^2-8.912c+9$$

$$c=\frac{8.91\pm\sqrt{(8.91)^2-4(5)(9)}}{2(1)}$$

$$c=\frac{8.91\pm 6.58}{2}$$

$$c\approx 7.75 \text{ ó } 1.16$$