Ejercicio 4.7

Resuelve los siguientes problemas del mundo real.

1. Dos lados de un paralelogramo son 83 y 140 m., y una de las diagonales mide 189 m. Calcular el área de uno de los triángulos que forma la diagonal con los lados del paralelogramo.

2. Calcular el perímetro y el área de un paralelogramo, si una de sus diagonales mide 17 m. y los ángulos que forma ésta con los lados del paralelogramo son de 35° y 49°.

3. Dos hombres que están en el campo, separados 3000 m. uno del otro, observan un helicóptero. Sus ángulos de elevación respecto al helicóptero son de 60° y 75°. Determina la altura del helicóptero.

4. Los tres lados que limitan un terreno miden 320, 480 y 500 m. respectivamente. Calcula los ángulos que forman dichos lados.

5. Un puente de 24 m. de largo une dos colinas cuyas laderas forman con el horizonte ángulos de 23° y 32° ¿Cuál es la altura del puente con respecto al vértice del ángulo formado por las laderas?

6. Para medir la altura de una montaña, una persona ve hacia la cresta desde un punto A y encuentra su Angulo de elevación de 35°40' después desde un punto B, alejado 500 m. de A. Encuentra su ángulo de elevación de 21°30'. ¿Cuál es la altura de la montaña?

7. Un buque sale de un puerto hacia el sur y navega 84km. Después vira al sudoeste y navega 120 km.
   a ¿Qué distancia tendrá que recorrer para regresar al puerto?
   b ¿Qué rumbo habrá de tomar?

8. Una pieza de artillería está en A y no puede ver el blanco C. Si el puesto de mando B está a 35 km. de A y a 22 km. de C, calcula la distancia de la pieza al blanco si el ángulo ABC es de 50°10'.

9. Tres circunferencias cuyos radios miden 115, 150 y 225 cm. son tangentes exteriormente entre sí. Encuentra los ángulos que forman cuando se unen los centros de dichas circunferencias.

10. Para calcular la anchura BC de una bahía se miden, desde un punto A, dos distancias, AB y AC, y el ángulo BAC. AB=8 km, AC=9 km y ∠ BAC=65°30' ¿Cuál es el ancho de la bahía?

CAPÍTULO 5

GEOMETRÍA ANALÍTICA
PRIMERA PARTE

La idea básica de la Geometría Analítica consiste en sustituir problemas de índole geométrica por otros de carácter algebraico, lo cual se logra mediante el empleo de ciertos recursos que son los llamados: Sistemas de Coordenadas.

Comenzaremos por presentar los más frecuentemente utilizados, que son los sistemas de coordenadas Cartesianas, así llamados en honor de René Descartes, filósofo, matemático y físico francés, nacido en 1596 y fallecido en 1650, quién escribió una obra de extraordinaria importancia para la Ciencia Universal, que incluía en su última parte lo que fue de hecho el primer tratado de Geometría Analítica, la obra se llamaba: Discurso del Método.

Podemos afirmar que después del florecimiento de la Geometría en la época de los griegos, se produjo un estancamiento en esta importantísima rama de la Matemática, del que no saldría, hasta la publicación en 1637, de la Geometría de Descartes, y que sin la Geometría Analítica es imposible dominar el Cálculo Diferencial e Integral, que constituye a su vez, una herramienta imprescindible en la formación de Ingenieros, Físico - Matemáticos, Químicos, Economistas y otros profesionistas.

Así pues, lo que vas a estudiar a continuación puede ser de extraordinaria importancia para ti. Confiamos en que te será útil.

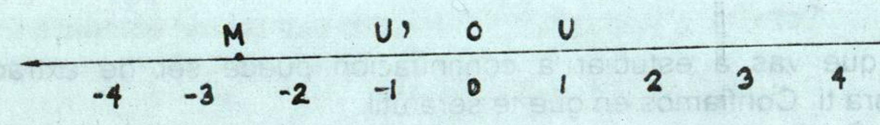
5.1 Sistema de coordenadas cartesianas

Objetivo

Localizar de manera rápida y correcta diferentes puntos usando sus coordenadas en la recta numérica y en el plano cartesiano.

El punto de partida de la Geometría Analítica son los llamados sistemas de coordenadas cartesianos, mediante los cuales pueden ser resueltos una gran variedad de problemas de Geometría, muy fácilmente, empleando recursos que ya conocemos del Algebra.

Seguramente recordarás que, mediante lo que se acostumbra llamar una recta numérica, se pueden representar los números reales, tanto los positivos como los negativos. En dicha recta se escogen dos puntos arbitrarios: O y U que van a ser las representaciones gráficas de los números cero y uno, respectivamente. A continuación te mostramos una recta numérica donde hemos situado varios puntos y los números que le corresponden. La ubicación de los puntos correspondientes a los números enteros no necesitan explicación. Supongamos que queremos representar el número -2.4. Como -3 < -2.4 < -2, dividimos el segmento que une los puntos asociados a -3 y a -2 en 10 partes iguales de las cuales tomaríamos 4 hacia la izquierda, a partir del -2, de esta manera localizaríamos la representación de -2.4, el punto M.



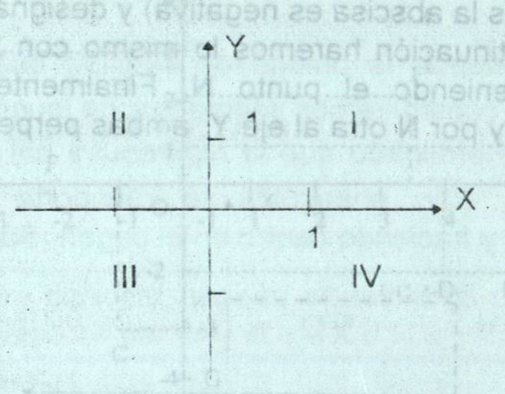
De manera análoga podríamos representar un número racional cualquiera, por ejemplo: 3.5, $-\frac{4}{3}$, etc. pero, ¿Cómo podríamos representar, por ejemplo el número $-\sqrt{10}$, que no es racional? Pues muy fácilmente. Dibujas un triángulo rectángulo de catetos 3 y 1 usando como unidad de longitud un segmento igual a OU. Como $10 = 9 + 1 = 3^2 + 1^2$, la longitud de la hipotenusa será $\sqrt{10}$: tomas un segmento igual a la hipotenusa, a partir de O, hacia la izquierda sobre la recta numérica, el extremo de dicho segmento es el punto que representa gráficamente a $-\sqrt{10}$. De esta manera, a todo número real x (racional o no) le corresponde un punto P y recíprocamente. Es decir que:

A todo punto P le corresponde un número real x (abscisa de P) que será positivo si P está a la derecha del origen O y negativo en caso contrario. Esta correspondencia entre los elementos de dos conjuntos es uno a uno (es decir a un punto le corresponde un número real y viceversa) es lo que se llama Biyección.

A una recta numérica se le llama también eje, y, en ocasiones, recta orientada. El eje está formado por dos semi-ejes o dos semirrectas. El semi-eje positivo es el que tiene origen en O y contiene al punto U, el otro semi-eje con origen en O y que contiene a U' se llama lógicamente el semi-eje negativo. Explicaremos ahora en qué consiste un sistema de coordenadas cartesianas y para que las utilizaremos.

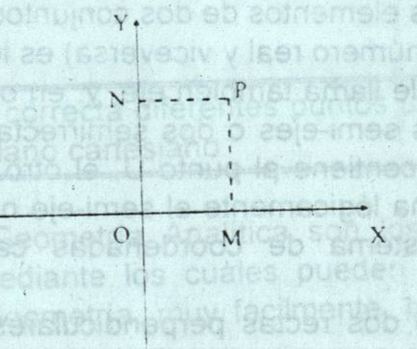
Comenzaremos trazando dos rectas perpendiculares, las que, desde luego, se cortan en un punto que designaremos por O y que llamaremos origen: para indicar el semi-eje que tomaremos como positivo, en cada caso dibujaremos la punta de una flecha, como mostramos en la figura.

Las dos rectas que hemos trazado dividen el plano en cuatro regiones que se llaman cuadrantes, el primer cuadrante será el que ocupa la parte superior derecha, que designaremos como I; el 2° cuadrante será el que ocupa la parte superior izquierda, designado por II; el 3^er^ cuadrante será el de la parte inferior izquierda y se designará por III y el último, el de la parte inferior derecha o 4° cuadrante, se designará con el IV, como te mostramos en la siguiente figura :

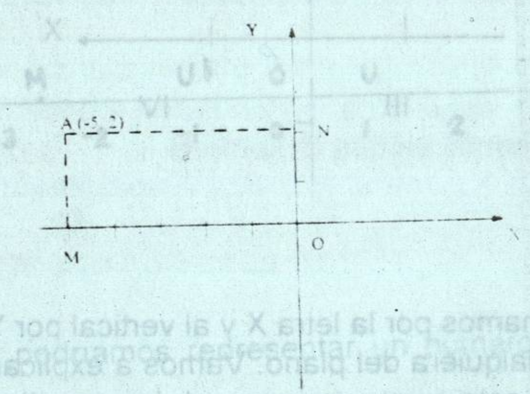


El eje horizontal lo designamos por la letra X y al vertical por Y.

Sea ahora P un punto cualquiera del plano. Vamos a explicarte a qué llamaremos coordenadas de P. Por este punto trazamos la perpendicular al eje X al cual cortará en un punto: M en la figura. Al punto M le corresponderá , en la recta numérica horizontal, un número real "x" que llamaremos abscisa de P. Por este mismo punto trazamos otra perpendicular, pero ahora al eje Y, al cual cortará en el punto N ; a este corresponderá, en la recta numérica o eje Y, un número real, "y", que llamaremos ordenada de P.



De este modo hemos hecho corresponder a cada punto del plano, dos números reales: "x" que escribiremos en primer lugar, "y" que pondremos en segundo lugar, ambos dentro de un par de paréntesis, formando así una pareja ordenada de números reales; el paréntesis irá precedido de la letra P, (u otra cualquiera), que designa al punto P(x ,y).
Así: A(-5, 2) servirá para designar el punto A cuya abscisa es -5 y cuya ordenada es 2. Para representar el punto A tomamos 5 unidades en el eje X a partir de O hacia la izquierda (pues la abscisa es negativa) y designamos por M el extremo de este segmento; a continuación haremos lo mismo con 2 unidades a partir de O sobre el eje Y, obteniendo el punto N. Finalmente trazamos por M, una perpendicular al eje X y por N otra al eje Y; ambas perpendiculares se cortarán en el punto A.



Hemos dicho que, mediante un sistema de coordenadas, hacemos corresponder, a cada punto P del plano, una pareja ordenada (x, y) de números reales. Debemos ahora añadir que también ha quedado establecida la correspondencia al revés, es decir, a cada par de números reales ordenados, le corresponde un punto del plano.
Es costumbre representar, al conjunto de todas las parejas ordenadas de números reales, por $\Re^2$. Podemos pues, decir que hemos logrado establecer una

Biyección entre el conjunto de todos los puntos del plano y $\Re^2$ [1]. Es muy importante insistir en que se trata de parejas ordenadas pues no es lo mismo, por supuesto, el punto A(-5, 2) que el B(2, -5). En general, no es lo mismo el punto (x, y) que el (y, x) excepto si x = y en cuyo caso coinciden.

Observaciones Importantes:

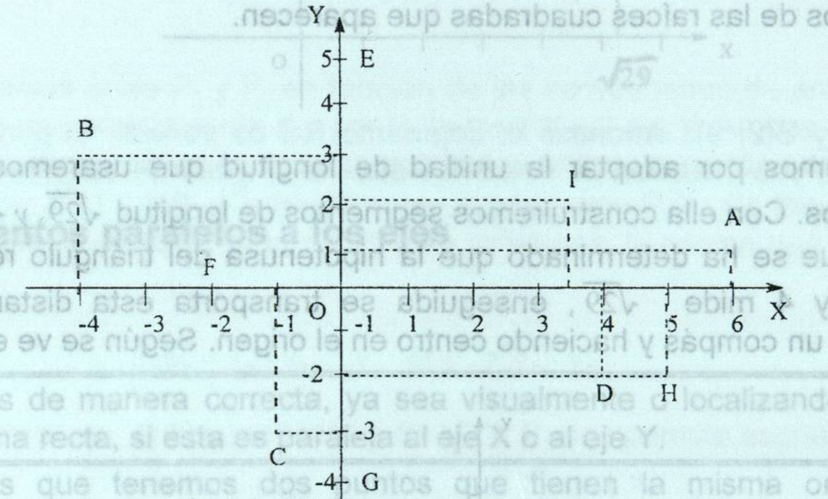
1. Un punto esta en el eje X si su ordenada es cero y recíprocamente.
2. Un punto esta en el eje Y si su abscisa es cero y recíprocamente.
3. Un punto esta en el interior del primer cuadrante si x > 0 y y > 0, en el 2° si x < 0 y y > 0 ; en el 3° si x < 0 y y < 0 y en el 4° si x > 0 y y <0.

Si en el cuadrante considerado incluimos los semi-ejes que lo forman entonces en cada caso anterior se incluirá el cero en la desigualdad.

Ejemplo 1

En un sistema de coordenadas rectangulares de un plano, situar los puntos:

A(6,1); B(-4; 3); C(-1, -3); D(4, -2); E(0, 5); F(-2, 0); G(0, -4); H(5, -2); I(3.5, 2)

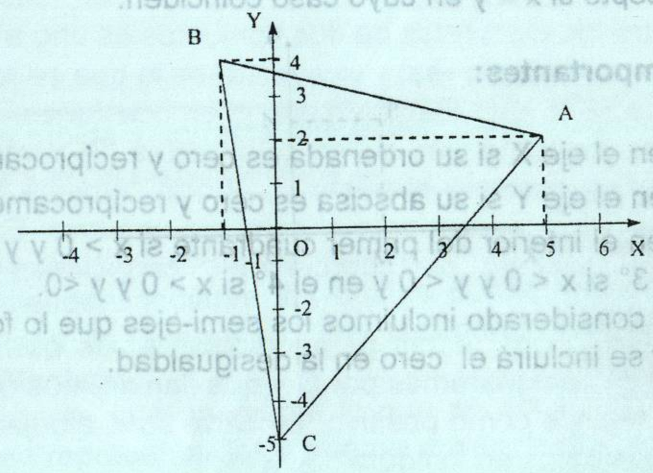


Ejemplo 2

Dibuja el triángulo cuyos vértices son los puntos: A(5, 2); B(-1, 4) y C(0, -6).

[1] *Después de esto, no debe haber confusión si no tenemos en cuenta la diferencia entre puntos (objetos geométricos) y pares ordenados de números reales (objetos algebraicos).*
Así pues, en lo que sigue usaremos frases tales como : el punto P(-10, 4) ;
o los puntos $(-2,\frac{5}{3})$ y $(\sqrt{2},-\frac{1}{2})$.

Solución

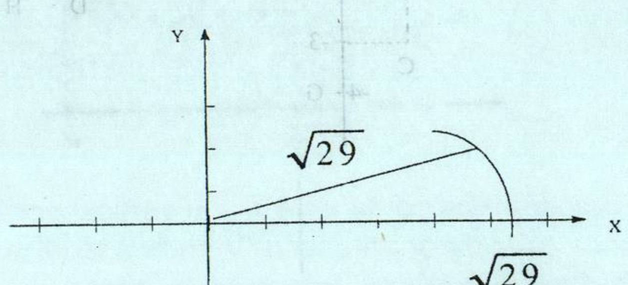


Ejemplo 3

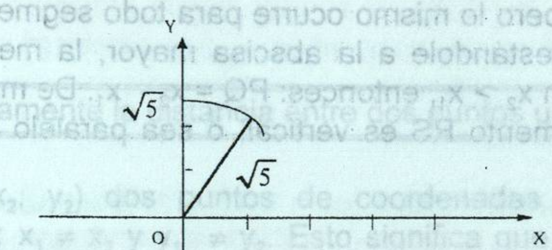
Representar el punto $M(\sqrt{29}, \sqrt{5})$, sin calcular, por ninguna vía, los valores aproximados de las raíces cuadradas que aparecen.

Solución

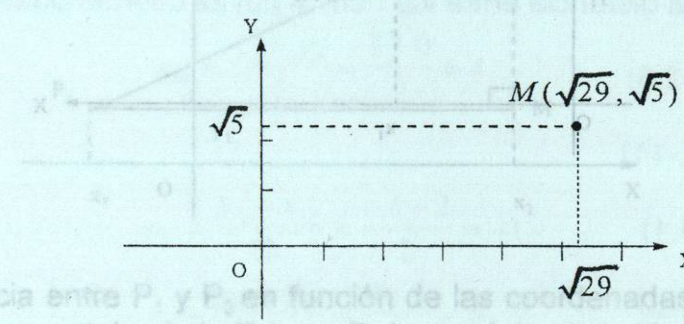
Comenzaremos por adoptar la unidad de longitud que usaremos en los ejes coordenados. Con ella construiremos segmentos de longitud $\sqrt{29}$ y $\sqrt{5}$.
Una vez que se ha determinado que la hipotenusa del triángulo rectángulo con catetos 5 y 4 mide $\sqrt{29}$, enseguida se transporta esta distancia al eje x empleando un compás y haciendo centro en el origen. Según se ve en la figura:



En forma similar se marca en el eje Y la distancia $\sqrt{5}$, distancia que representa la hipotenusa del triángulo rectángulo con catetos de medida 2 y 1, como mostramos a continuación:



Ahora, ya marcada en los ejes las distancias $\sqrt{29}$ y $\sqrt{5}$ se procede a localizar el punto M con las coordenadas $(\sqrt{29}, \sqrt{5})$, como se muestra en la siguiente figura:

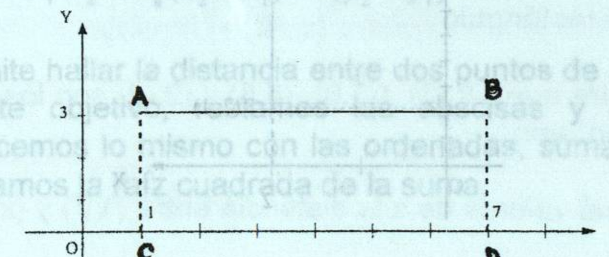


5.2 Segmentos paralelos a los ejes

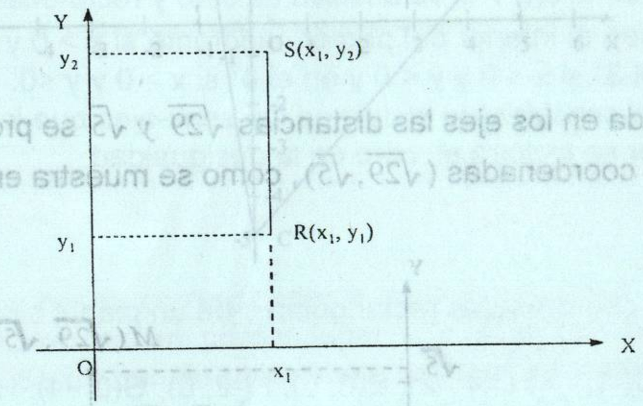
Objetivo

Reconocerás de manera correcta, ya sea visualmente o localizando dos o más puntos de una recta, si esta es paralela al eje X o al eje Y.

Supongamos que tenemos dos puntos que tienen la misma ordenada, por ejemplo: A(1, 3) y B(7, 3). Si unimos A con B tendremos el segmento AB.
Hallemos la longitud de dicho segmento



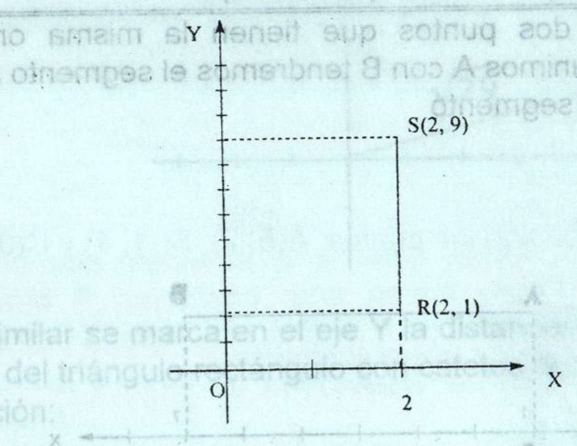
En la figura, de acuerdo con los datos OC = 1 y OD = 7, luego CD = 7 - 1 = 6. Este es un caso particular pero lo mismo ocurre para todo segmento paralelo al eje X : su longitud se halla restándole a la abscisa mayor, la menor. Es decir, que si $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_1)$ con $x_2 > x_1$, entonces: $PQ = x_2 - x_1$. De manera similar, si $R(x_1, y_1)$ y $S(x_1, y_2)$ el segmento RS es vertical, o sea paralelo al eje Y y, si $y_2 > y_1$, entonces: $RS = y_2 - y_1$.



Ejemplo 1

Si R(2, 1) y S(2, 9), entonces el segmento RS es vertical, el punto R está por debajo de S y la distancia de R a S, es decir la longitud del segmento RS es igual a 9 - 1 = 8.

Solución

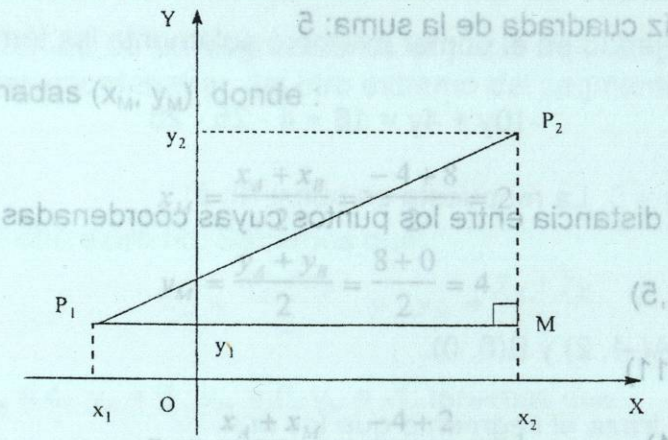


5.3 Fórmula de la distancia entre dos puntos.

Objetivo

Calcularás correctamente la distancia entre dos puntos usando fórmula.

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos de coordenadas conocidas con las restricciones siguientes: $x_1 \neq x_2$ y $y_1 \neq y_2$. Esto significa que la recta P_1P_2 no es paralela a ninguno de los ejes coordenados.



Hallemos la distancia entre P_1 y P_2 en función de las coordenadas de ambos. Por P_1 hemos trazado la paralela al eje X y por P_2 la paralela al eje Y. Ambas rectas se cortan perpendicularmente en M formándose así el triángulo rectángulo ΔP_1MP_2 cuyos catetos son: P_1M y MP_2 y la hipotenusa, desde luego P_1P_2. Es fácil ver que: la abscisa de M es la misma que la de P_2 y su ordenada, la misma que la de P_1, así que $M(x_2, y_1)$.
Entonces:

$$P_1M = x_2 - x_1 \quad \text{y} \quad MP_2 = y_2 - y_1$$

El teorema de Pitágoras, aplicado al triángulo $\Delta P_1M P_2$ nos permite escribir que:

$$(P_1 P_2)^2 = (P_1M)^2 + (MP_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

y extrayendo raíz cuadrada

$$P_1 P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

que es la fórmula que permite hallar la distancia entre dos puntos de coordenadas conocidas. Par lograr este objetivo, restamos las abscisas y elevamos la diferencia al cuadrado ; hacemos lo mismo con las ordenadas, sumamos los dos cuadrados obtenidos y hallamos la raíz cuadrada de la suma.