Ejemplo 1

Hallar la distancia entre los puntos: A(-2,6) y B(1,10).

Solución

1^{er} paso.- Diferencia de abscisa: 1 - (-2) = 3, cuadrado de esta: 9
2° paso.- Diferencia de ordenadas: 10 - 6 = 4, cuadrado de esta: 16
3^{er} paso.- Suma de los cuadrados 9 + 16 = 25
4° paso.- Raíz cuadrada de la suma: 5

Ejercicio 5.3

1) Encuentra la distancia entre los puntos cuyas coordenadas son :

a) (7,3) y (12,5)

b) (-7,4), (1,-11)

c) (-2,8), (-6,1)

d) (2,-6), (2,-2)

e) (-1,-5), (2,-3)

f) (-3,-1) y (9,4)

g) (1,-5), (6,2)

2) Demuestra que los puntos A (-5,3), B (3,2) y C (-1,-4) son vértices de un triángulo isósceles

3) Demuestra que (-1,4), (-3,-6) y (3,-2) son los vértices de un triángulo isósceles

4) Demuestra que los puntos ; A (6,5), B (3,7) y C (2,-1) son los vértices de un triángulo rectángulo

5) Demuestre que (-8,-3), (-2,6), (8,5) y (2,-4) son los vértices de un paralelogramo

6) ¿Para qué valores de x la distancia entre (1,7) y (x,3) es igual a 5 ?.

De manera que, si tienes las coordenadas de los extremos de un segmento y necesitas hallar las de su punto medio, sumas las abscisas y divide la suma por dos, hacer exactamente lo mismo con las ordenadas, y ¡eso es todo!

Ejemplo 1

Dados los puntos A(-4, 8) y B(8, 0). Sean M el punto medio de AB y N el punto medio de AM. Hallar las coordenadas de N.

Solución

Si M tiene coordenadas (x_M, y_M), donde :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-4+8}{2} = 2$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{8+0}{2} = 4$$

Ahora:

$$x_N = \frac{x_A + x_M}{2} = \frac{-4+2}{2} = -1$$

$$y_N = \frac{y_A + y_M}{2} = \frac{8+4}{2} = 6$$

Respuesta: N(-1, 6).

Ejemplo 2

Hallar las coordenadas del punto situado sobre el eje Y que equidista de los puntos M(5, 5) y N(4, 2).

Solución

Como el punto pedido, P, está sobre el eje Y su abscisa es cero, su ordenada la designamos por y, entonces P(0, y).
La distancia de P a M es:

$$\sqrt{(5-0)^2 + (5-y)^2}$$

y la de P a N es:

$$\sqrt{(4-0)^2 + (2-y)^2}\ .$$

Como ambas deben ser iguales:

$$\sqrt{5^2+(5-y)^2}=\sqrt{4^2+(2-y)^2}$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad y efectuamos los cuadrados indicados, quedando:

$$25 + 25 - 10\,y + y^2 = 16 + 4 - 4y + y^2$$

Cancelando y^2 y dejando en el primer miembro solamente los términos en y:

$$-10y + 4y = 16 + 4 - 25 - 25$$

lo que nos lleva a y = 5. La respuesta es pues: (0, 5).

Ejemplo 3

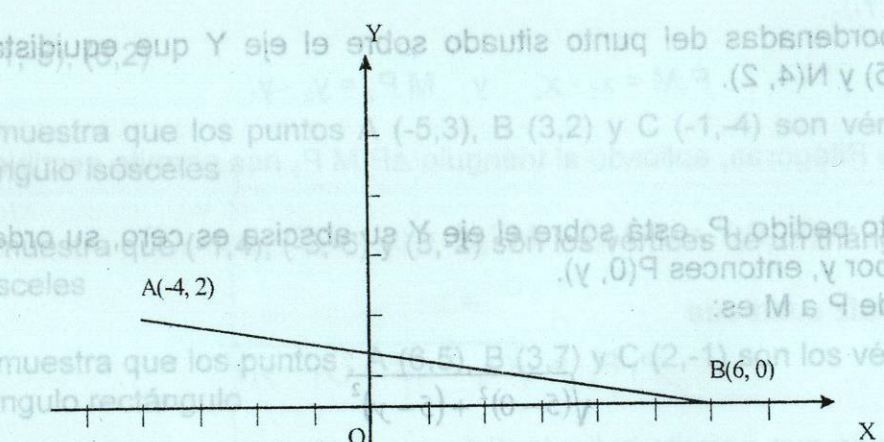
Dados los puntos: A(-4, 2) y B(6, 0).

a) Represéntalos y traza el segmento que los une.

b) Halla las coordenadas del punto medio M.

Solución

a)



b) Si $M(x_M, y_M)$, sabemos que:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}\;;\;y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$$

$$x_M=\frac{-4+6}{2}=1\;;\;y_M=\frac{2+0}{2}=1$$

Respuesta: M(1, 1)

Ejemplo 4

Uno de los extremos de un segmento es el punto A(4, 6) y su punto medio es: M(0, -1). Halla las coordenadas del otro extremo del segmento.

Solución

Sea $B(x_B, y_B)$ el otro extremo. Sabemos que:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}\quad y\quad y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$$

Sustituyendo $x_A = 4$, $y_A = 6$; $x_M = 0$, $y_M = -1$, tenemos que:

$$0=\frac{4+x_B}{2}\quad y\quad -1=\frac{6+y_B}{2}$$

De los cuales obtenemos, respectivamente: $x_B = -4$ y $y_B = -8$.

Ejercicio 5.4

1) Hallar las coordenadas del punto medio de los segmentos de recta cuyos puntos extremos son :

a) (8,-5), (-2,9)

b) (3,2), (7,6)

c) (-2,3), (-9,-6)

d) (5,15), (-7,-11)

e) (-3,3), (5,7)

f) (7,-4), (-9,6)

2) El punto (7,3) biseca el segmento de recta que une a (x,6) y (9,y). Encuentra los valores de x y de "y".

3) El punto (4,1) es el punto medio del segmento de recta que une a (x,7) y (5,y). Encuentra los valores de x y de "y"

4) Las coordenadas del punto medio del segmento AB son (-2,9). Si un extremo del segmento es A (-10,14). Encuentra las coordenadas del otro extremo.

5) El punto (5,-1), es el punto medio del segmento de recta $\overline{AB}$. Si las coordenadas del punto A son (3,-4). Encuentra las coordenadas del punto B.

6) El punto ($\frac{7}{5}$,-1), es el punto medio del segmento de recta $\overline{AB}$. Si las coordenadas del punto A son (3,- $\frac{7}{5}$). Encuentra las coordenadas del punto B.

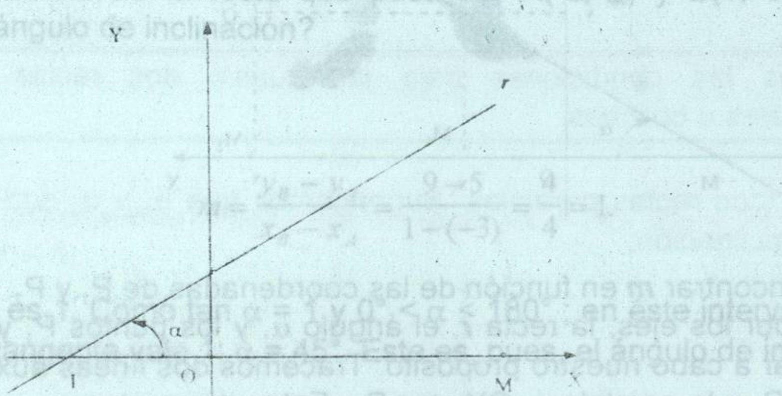
7) El punto ($\frac{7}{5}$,-3.27), es el punto medio del segmento de recta $\overline{AB}$. Si las coordenadas del punto A son (4.39,- $\frac{7}{5}$). Encuentra las coordenadas del punto B.

5.5 Ángulo de Inclinación de una recta. Pendiente.

Objetivo

Identificarás y calcularás el ángulo de inclinación y la pendiente de una recta.

Sea una recta que corta al eje X en un punto I, tal como se muestra en la figura y M un punto del Eje X con abscisa positiva.

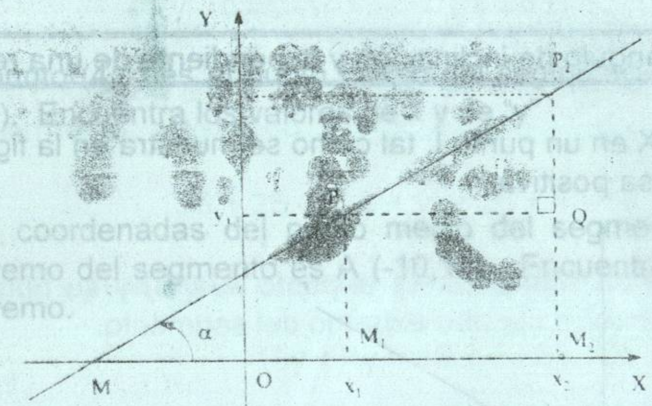


Hagamos girar la semirrecta MI en sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj (hasta que dicha semirrecta coincida por primera vez con parte de *r*. En el caso que consideramos 0° < α < 180°. Denotemos por α al ángulo de giro. Este ángulo se llama "ángulo de inclinación de la recta *r* " (en el sistema de coordenadas escogido). La tangente del ángulo de inclinación de una recta se llama **PENDIENTE DE LA RECTA.**
Este último concepto desempeña, como podrás apreciar posteriormente, un papel importantísimo en Geometría Analítica.

5.5.1 Pendiente de una recta dadas las coordenadas de dos puntos.

Sea "*r* " una recta que pasa los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$. Si $x_1 = x_2$, es decir, si la recta es vertical o, dicho de otro modo, su ángulo de inclinación es de 90°, la pendiente de *r* sería: tan 90°, pero en este caso la tangente (tan) no esta definida, no existe. Por tanto, si los dos puntos dados P_1 y P_2 tienen la misma abscisa, la recta *r* carece de pendiente, o sea, ésta no existe.
Supongamos ahora que $x_1 \neq x_2$. Si, partiendo de esta suposición, fuera $y_1 = y_2$, la recta *r* sería paralela al eje X, su ángulo de inclinación sería de 0° y, como la tan 0° = 0, la pendiente de *r* sería 0.

Supongamos por último, que $x_1 \neq x_2$ y $y_1 \neq y_2$. La recta *r* no sería vertical, ni tampoco paralela al eje X en un punto, sea este M. Designemos por α el ángulo de inclinación. La pendiente ***m*** de *r* es, por definición igual a tan α.



Nos proponemos encontrar ***m*** en función de las coordenadas de P_1 y P_2.
El dibujo formado por los ejes, la recta *r*, el ángulo α, y los puntos P_1 y P_2 no es suficiente para llevar a cabo nuestro propósito. Tracemos dos líneas auxiliares : la paralela a OX por P_1 y la paralela a OY por P_2. Estas dos rectas se cortan en Q formando un triángulo rectángulo, en el que $\angle QP_1P_2 = \alpha$ por ser estos ángulos correspondientes entre las paralelas OX y P_1Q cortadas por la transversal *r*.

Entonces:

$$m = \tan \angle QP_1P_2 = \frac{QP_2}{P_1Q} = \frac{M_2P_2 - M_2Q}{OM_2 - OM_1}$$

Por tanto:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

La pendiente buscada resulta ser el cociente o fracción que tiene por numerador la diferencia de ordenadas y por denominador la diferencia de abscisas en el mismo orden.
En la fórmula a la cual hemos llegado en el numerador y denominador aparecen como minuendos las coordenadas de P_2 pero esto no tiene que ser así.

En efecto, fíjate que:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_1 - y_2)}{-(x_1 - x_2)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Y, como vemos, los papeles de las coordenadas de P_1 y P_2 se han invertido.
Importante: Esta fórmula sirve para todos los casos, pues: Si $y_1 = y_2$, entonces ***m*** = 0 como ya sabíamos, y si $x_1 = x_2$, el denominador de la fórmula es cero (pero no el numerador) y ***m*** no estaría definida, lo cual también sabíamos.

Notemos además que si ***m*** > 0 y observamos el dibujo de izquierda a derecha, la recta ***r*** **sube**; al contrario si ***m*** < 0, la recta **baja** (al movernos de izquierda a derecha).

Ejemplo 1

Hallar la pendiente de la recta que pasa por A(-3, 5) y B(1, 9). ¿Cuál es la amplitud del ángulo de inclinación?

Solución

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{9-5}{1-(-3)} = \frac{4}{4} = 1.$$

La pendiente es 1. Como tan $\alpha = 1$ y $0° < \alpha < 180°$; en éste intervalo hay un solo ángulo cuya tangente vale 1: $\alpha = 45°$. Este es, pues, el ángulo de inclinación.

Ejemplo 2

Demostrar que los puntos A(-1, 1), B(2, 2), C(8, 4) y D(5,3) pertenecen a la misma recta.

Solución

Pendiente de AB con A(-1, 1) y B(2, 2): $m = \frac{2-1}{2-(-1)} = \frac{1}{3}$

Pendiente de AC con C(8, 4): $\frac{4-1}{8-(-1)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

sea que las rectas AB y AC tienen la misma pendiente y un punto común, A. Por lo tanto, coinciden, es decir que los puntos A, B y C pertenecen a la misma recta, o, dicho de otro modo, están alineados.

Si D(5,3), entonces: $m_{AD} = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{3-1}{5-(-1)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, que es igual a la pendiente

de AC, luego, A, C y D están alineados. Finalmente, si E(-4, 0), entonces:

$$m_{AE} = \frac{y_E - y_A}{x_E - x_A} = \frac{0-1}{-4+1} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}.$$

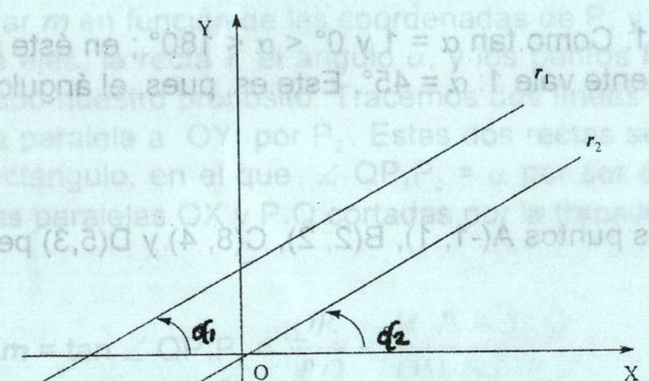
Por lo tanto A, B, C y D son colineales

5.5.2 Condición de paralelismo de dos rectas.

Objetivo

Determinarás las condiciones bajo las cuales dos rectas son paralelas, perpendiculares u oblicuas.

Sean r_1 y r_2 dos rectas paralelas. Supongamos que α_1 y α_2 son sus respectivos ángulos de inclinación.



Entonces α_1 y α_2 son ángulos correspondientes entre las paralelas r_1 y r_2 cortadas por una transversal (en este caso el eje X), por lo que, son iguales, es decir :

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

Sus tangentes también son iguales:

$$\tan \alpha_1 = \tan \alpha_2$$

Pero estas tangentes son las respectivas pendientes de r_1 y r_2, de modo que, si las rectas son paralelas, entonces sus pendientes son iguales.

El recíproco también es cierto, o sea, que si $m_1 = m_2$ entonces r_1 es paralela a r_2. Pues como $\tan \alpha_1 = \tan \alpha_2$ y α_1 y α_2 son ángulos en el intervalo [0°, 180°], necesariamente $\alpha_1 = \alpha_2$, lo que implica que $r_1 \,||\, r_2$.

Importante: Si las rectas fueran paralelas al eje X, sus pendiente serían ambas nulas; $m_1 = m_2 = 0$ y recíprocamente.

Resumiendo:

La condición necesaria para que dos rectas no verticales sean paralelas es que sus pendientes sean iguales. Por otra parte las rectas verticales son paralelas entre sí.

Ejemplo 1

Calcula el valor de la constante k para que la recta $kx + (k - 2)y - 16 = 0$, sea paralela a $4x + 3y - 7 = 0$

Solución

Pendiente de $4x + 3y - 7 = 0$ es $m = -\frac{4}{3}$

Pendiente de $kx + (k - 2)y - 16 = 0$ es $m' = -\frac{4}{k-2}$ $si\ k \neq 2$.

Si fuese $k = 2$ la ecuación se reduciría a

$$4x = 16$$

- sea $x = 4$, que es vertical y no puede ser paralela a la recta que tiene pendiente $m = -\frac{4}{3}$.
-

El paralelismo se cumple si $-\frac{4}{3} = -\frac{k}{k-2}$

De donde

$$4k - 8 = 3k$$

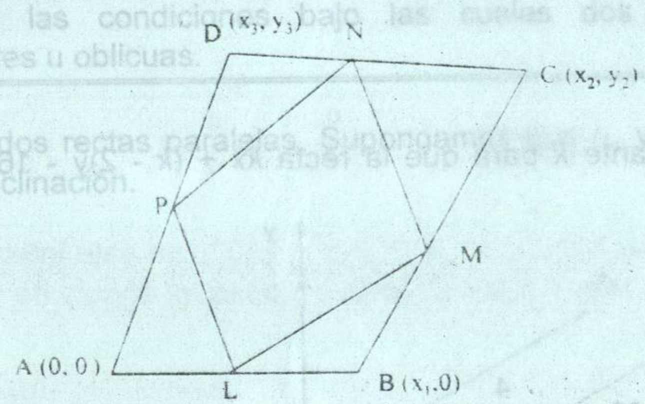
Por lo que :

$$k = 8$$

Solución $k = 8$.

Ejemplo 2

ABCD es un cuadrilátero convexo. Sean L, M, N y P los puntos medios de los lados AB, BC, CD, DA, respectivamente. Demostrar analíticamente, que el cuadrilátero LMNP es un paralelogramo.



Solución

De la gráfica tenemos :

$$L\left(\frac{x_1}{2},0\right);\ M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_2}{2}\right);\ N\left(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{y_2+y_3}{2}\right)\ \text{y}\ P\left(\frac{x_3}{2},\frac{y_3}{2}\right)$$

$$m_{LM}=\frac{\frac{y_2}{2}-0}{\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{x_1}{2}}=\frac{y_2}{x_2}\ ;\ m_{NP}=\frac{\frac{y_3}{2}-\frac{y_2+y_3}{2}}{\frac{x_3}{2}-\frac{x_2+x_3}{2}}=\frac{y_2}{x_2}.$$

Luego LM || NP

$$m_{MN}=\frac{\frac{y_2+y_3}{2}-\frac{y_2}{2}}{\frac{x_2+x_3}{2}-\frac{x_1+x_2}{2}}=\frac{\frac{y_3}{2}}{\frac{x_3-x_1}{2}}=\frac{y_3}{x_3-x_1}\ ;\ m_{PL}=\frac{0-\frac{y_3}{2}}{\frac{x_1}{2}-\frac{x_3}{2}}=\frac{-y_3}{x_1-x_3}=\frac{y_3}{x_3-x_1}=m_{MN},$$

Luego PL || MN

Ejemplo 3

Los vértices de un triángulo son: A(4, -5); B(-8, 3) y C(2, -7). Comprueba que el segmento que une los puntos medios de los lados AB y BC es paralelo al lado CA e igual a $\frac{1}{2}CA$.

Solución

Sean: L el punto medio de AB y M el punto medio de BC.
Aplicando las fórmulas que dan las coordenadas de los puntos medios:

$$x_L=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{4-8}{2}=-2$$

$$y_L=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-5+3}{2}=-1;\ \text{luego L }(-2,\ -1).$$

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{-8+2}{2}=-3$$

$$y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{3-7}{2}=-2;\ \text{luego M }(-3,\ -2).$$

Por lo que la pendiente de LM es: