

$$m = \frac{y_M - y_L}{x_M - x_L} = \frac{-2 - (-1)}{-3 - (-2)} = \frac{-1}{-1} = 1$$

## Ejemplo 2

Y la pendiente de CA es:

$$m = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{-5 - (-7)}{4 - 2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Como la pendiente del segmento LM y la del lado CA son iguales, son paralelas. Veamos las longitudes:

$$LM = \sqrt{(x_M - x_L)^2 + (y_M - y_L)^2} = \sqrt{(-3 + 2)^2 + (-2 + 1)^2} = \sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(2 - 4)^2 + (-7 + 5)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Por lo tanto: } LM = \frac{1}{2}AC.$$

## Ejemplo 4

Dados los puntos: E(20, -5); F(-8, 15); G(24, -1) y H(-4, 19). Comprueba analíticamente que las rectas EF y GH son paralelas.

## Solución

Pendiente de EF:

$$m = \frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \frac{15 + 5}{-8 - 20} = \frac{20}{-28} = -\frac{5}{7}$$

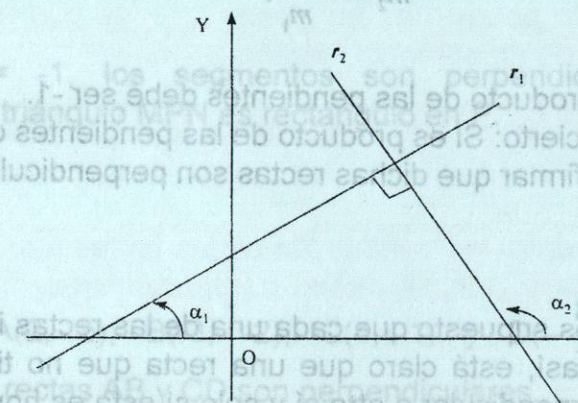
Pendiente de GH:

$$m' = \frac{y_H - y_G}{x_H - x_G} = \frac{19 - (-1)}{-4 - 24} = \frac{20}{-28} = -\frac{5}{7}$$

Como las pendientes son iguales las rectas son paralelas.

## 5.5.3 Condición de perpendicularidad de dos rectas.

Sean  $r_1$  y  $r_2$  dos rectas que tienen pendientes respectivas  $m_1$  y  $m_2$ . Designaremos por  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , sus respectivos ángulos de inclinación. Veamos que relación deben cumplir ambas pendientes si las rectas son perpendiculares.



Hemos confeccionado el dibujo de modo que en él se cumplan todas las condiciones estipuladas.

Razonaremos basándonos en él.

En primer lugar, en el triángulo rectángulo cuyo ángulo recto es el formado por  $r_1$  y  $r_2$ , el ángulo  $\alpha_2$  es exterior, luego es igual a la suma de los interiores no adyacentes a él, o sea:

$$\alpha_2 = 90^\circ + \alpha_1.$$

Tomemos la tangente en ambos miembros:

$$\tan \alpha_2 = \tan (90^\circ + \alpha_1)$$

Recordemos que:

$$\tan(90^\circ + \alpha_1) = -\cot \alpha_1 \text{ y que:}$$

$$\cot \alpha_1 = \frac{1}{\tan \alpha_1}$$

Entonces:

$$\tan \alpha_2 = -\frac{1}{\tan \alpha_1}$$

Pero

$$\tan \alpha_1 = m_1 \quad \text{y} \quad \tan \alpha_2 = m_2$$



Así que partiendo de la exposición de que las rectas  $r_1$  y  $r_2$  (de pendientes respectivas  $m_1$  y  $m_2$ ) son perpendiculares, hemos llegado a la conclusión de que, necesariamente es:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Dicho de otro modo: el producto de las pendientes debe ser -1.

El recíproco también es cierto: Si es producto de las pendientes de dos rectas es -1, entonces se puede afirmar que dichas rectas son perpendiculares.

#### Nota

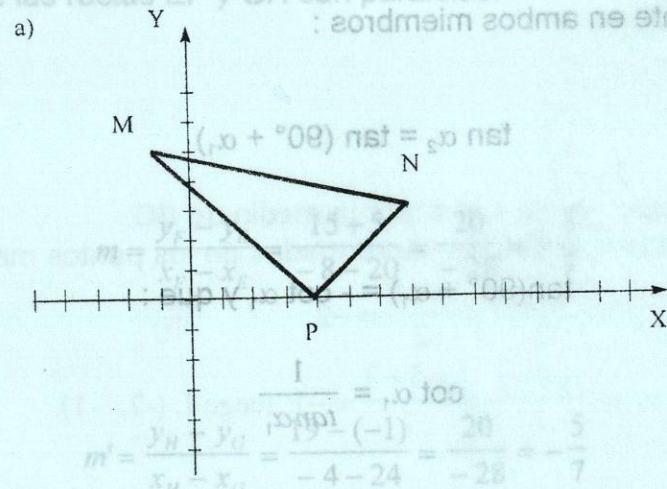
En lo que precede hemos supuesto que cada una de las rectas involucradas tiene pendiente. Si no fuese así, está claro que una recta que no tiene pendiente (o sea, si es vertical) es perpendicular a otra si y solo si esta es horizontal (por tanto, de pendiente nula).

#### Ejemplo 5

Los vértices de un triángulo son: M(-1, 5); N(7, 3) y P(4, 0).

- Dibuja el triángulo.
- Comprueba analíticamente que es rectángulo.

#### Solución



- Si el dibujo está hecho con cuidado, él nos sugiere cuáles son las pendientes que nos conviene hallar. Así:

$$\tan \alpha = m_1 \quad \text{y} \quad \tan \alpha' = m_2$$

$$m_{MP} = \frac{y_P - y_M}{x_P - x_M} = \frac{0 - 5}{4 - (-1)} = \frac{-5}{5} = -1$$

$$m_{PN} = \frac{y_N - y_P}{x_N - x_P} = \frac{3 - 0}{7 - 4} = \frac{3}{3} = 1$$

Como  $(m_{MP})(m_{PN}) = -1$ , los segmentos son perpendiculares, o sea el  $\angle MNP = 90^\circ$ , luego el triángulo MPN es rectángulo en P.

#### Ejemplo 6

Dados los puntos: A(2, 5); B(-3, -2); C(4, 1) y D(-8/5, 3). Comprueba analíticamente que las rectas AB y CD son perpendiculares.

#### Solución

Pendiente de AB:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 - 5}{-3 - 2} = \frac{-7}{-5} = \frac{7}{5}$$

Pendiente de CD:

$$m' = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{3 - 1}{-\frac{8}{5} - 4} = \frac{2}{-\frac{28}{5}} = \frac{2 \cdot 5}{-28} = -\frac{10}{28} = -\frac{5}{14}$$

Y como  $mm' = -1$ , las rectas son perpendiculares.

#### Ejercicio 5.5

- Hallar las pendientes de las rectas que pasan por los puntos:

a) (6, -4), (2, -3)

b) (-3, 0), (1, 2)

c) (-3, 3), (3, -4)

d) (-3, 2), (2, 1)

e) (4, 1), (-1, 6)

f) (7, 3), (4, -3)



- 3) Utilizando el concepto pendiente, demostrar que los puntos (6,5), (-3,0) y (4,-2) son los vértices de un triángulo rectángulo.
- 4) Empleando el concepto pendiente, prueba que los puntos (-2,3), (1,2) y (4,1) son colineales.
- 5) Empleando el concepto pendiente, demuestra que los puntos (7,1), (0,-2), (5,-4), son los vértices de un triángulo rectángulo.
- 6) Empleando el concepto pendiente, demuestra que los puntos : (0,-2), (3,0), (9,4), son colineales.

En los ejercicios 7 a 14 encuentra las pendientes de las rectas que pasan por los dos pares de puntos e indica si son paralelas, perpendiculares o se intersecan oblicuamente.

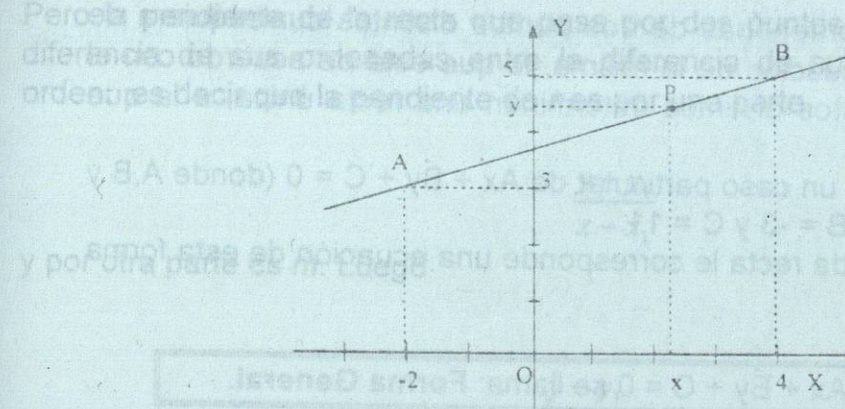
- 7) A (-4,2), B (4,-1) ; C (3,2), D (11,-2)
- 8) A (3,1), B (-6,2) ; C (-4,-5), D (-3,4)
- 9) A (-1,-2), B (-2,-4) ; C (3,-2), D (1,-1)
- 10) A (2,4), B (0,0) ; C (-2,1), D (-1,3)
- 11) A (2,-2), B (-3,4) ; C (5,0), D (-1,-5)
- 12) A (7,-8), B (-5,7) ; C (22,8), D (-6,-4)
- 13) A (12,9), B (2,5) ; C (11,9), D (6,5)

## 5.6 Ecuación de la Recta. (Recta en el Plano)

### Objetivo

Determinar la ecuación de una recta

Supongamos que tenemos dos puntos de coordenadas conocidas, por ejemplo: A(-2, 3) y B(4, 5) y consideremos la recta  $r$  que pasa por ellos. Sabemos que tal recta existe y que es única. Y, además, que la misma contiene infinitud de puntos. Nos proponemos hallar una ecuación que quede satisfecha por las coordenadas de todos los puntos de  $r$  y nada más que por ellos.



Sea  $P(x, y)$  un punto "genérico" de  $r$ , es decir, un punto que representa a todos los de  $r$ . Si unimos  $P$  con uno de los puntos dados, por ejemplo con  $A$ , la pendiente de  $AP$  será la misma la de  $AB$ . O sea  $1/3$  pues, aplicando la fórmula de la pendiente de la recta que pasa por los puntos  $A$  y  $B$ , tenemos:

$$m = \frac{5-3}{4-(-2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

En cambio, si  $P$  no estuviera situado en  $r$ , la pendiente de  $AP$  sería distinta a  $1/3$ . Por lo tanto,  $P$  está en  $r$  si y solo si:

$$\frac{y-3}{x+2} = \frac{1}{3}$$

lo que equivale a:

$$3y - 9 = x + 2.$$

o que es lo mismo, a

$$x - 3y + 11 = 0.$$

Observemos que al sustituir  $x$  por -2 y  $y$  por 3 el primer miembro de la ecuación es cero, de modo que, efectivamente,  $A$  es un punto de la gráfica de  $x - 3y + 11 = 0$ . Lo mismo ocurre con  $B(4, 5)$ .

### Resumiendo:

Un punto  $P(x, y)$  está situado en  $r$  si y solo si  $x - 3y + 11 = 0$  que es la ecuación de  $r$ . Insistamos en que los datos suficientes para obtener la ecuación fueron, en este caso los puntos  $A(-2, 3)$  y  $B(4, 5)$ .



Es decir, bastan tener las coordenadas de dos puntos distintos cualesquiera de una recta para encontrar la ecuación de la misma, lo que está de acuerdo con el postulado siguiente: "Dos puntos distintos determinan una recta única, a la que pertenecen."

La ecuación  $x - 3y + 11 = 0$  es un caso particular de  $Ax + By + C = 0$  (donde A, B y C son constantes) con:  $A = 1$ ,  $B = -3$  y  $C = 11$ .

Es posible demostrar que a toda recta le corresponde una ecuación de esta forma y recíprocamente.

La ecuación  $Ax + By + C = 0$  se llama: **Forma General**.

## 5.7 Formas de la Ecuación de una Recta.

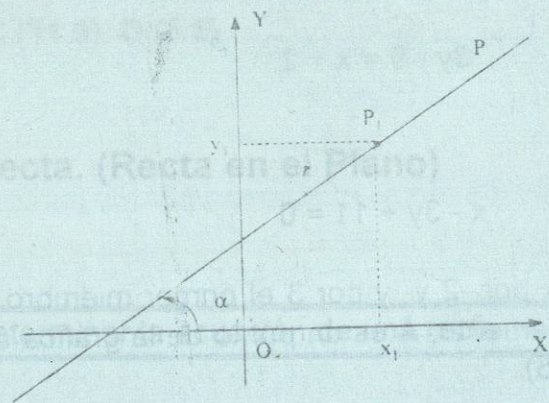
### Objetivo

Representaras analíticamente una recta mediante las diferentes formas de su ecuación.

### 5.7.1 Ecuación de la recta en la forma punto - pendiente.

Sea  $r$  una recta que pasa por el punto  $P_1(x_1, y_1)$  de coordenadas conocidas y cuya pendiente, también conocida, es  $m$ .

Con estos datos nos será muy fácil escribir la ecuación de  $r$ .



Tomemos un punto cualquiera de  $r$ ,  $P(x, y)$ . Entonces la pendiente de  $P_1P$  es  $m$ . En cambio, si  $P$  no está en  $r$  entonces la pendiente de  $P_1P$  no es  $m$ . Es decir que  $P$  está en  $r$  si y solo si la pendiente de  $P_1P$  es igual a  $m$ .

Pero la pendiente de la recta que pasa por dos puntos se obtiene dividiendo la diferencia de sus ordenadas entre la diferencia de sus abscisas en el mismo orden: es decir que la pendiente de  $r$  es por una parte,

$$\frac{y - y_1}{x - x_1}$$

y por otra parte es  $m$ . Luego

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

de donde:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

que es la ecuación de la recta en la forma pedida, o sea punto - pendiente.

### Ejemplo 1

Comprobar analíticamente que los puntos:  $(-1, 1)$ ;  $(2, 2)$ ;  $(8, 4)$ ;  $(5, 3)$  y  $(-4, 0)$  están alineados.

### Solución

Hallaremos la ecuación de la recta que pasa por dos de ellos y verificaremos que todos los demás satisfacen dicha ecuación.

Tomemos  $(-1, 1)$  y  $(2, 2)$ . La pendiente de la recta que los une se determina por:

$$m = \frac{2 - 1}{2 - (-1)} = \frac{1}{3}$$

sea que la pendiente de la recta que pasa por  $(2, 2)$  es  $1/3$ , si  $y - 2 = \frac{1}{3}(x - 2)$ .

Veamos si el punto  $(8, 4)$  satisface esta última ecuación, si  $x = 8$  y  $y = 4$ , entonces:

$$4 - 2 = \frac{1}{3}(8 - 2)$$

$$2 = \frac{1}{3}(6) = 2$$



Por lo que si satisface a la ecuación, ahora tratemos con el punto (5, 3), entonces  $x = 5$  y  $y = 3$ . Por lo que:

$$3 - 2 = \frac{1}{3}(5 - 2)$$

$$1 = \frac{1}{3}(3) = 1$$

podemos ver que también la satisface, por último probemos con el punto (-4, 0):

$$0 - 2 = \frac{1}{3}(-4 - 2)$$

$$-2 = \frac{1}{3}(-6) = -2$$

por lo que también la satisface.

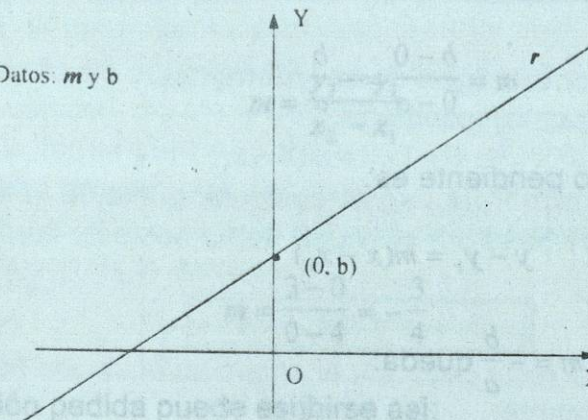
**Nota:** Este problema puede resolverse por otra vía: usando solamente pendientes.

### 5.7.2 Ecuación de la recta en la forma pendiente - intersección.

Sea  $r$  una recta que corta al eje Y en el punto (0, b) y que tiene pendiente  $m$ . Vamos a hallar la ecuación de  $r$  en función de  $m$  y de  $b$ .

$$(5 - 2) \cdot \frac{1}{3} = 3 - 2$$

Datos:  $m$  y  $b$



Es muy fácil lograr nuestro propósito. Sabemos ya que la forma punto-pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

donde  $(x_1, y_1)$  es un punto fijo en la recta  $r$  al que podemos tomar como  $(x_1, y_1) = (0, b)$ , de donde  $x_1 = 0$  y  $y_1 = b$ .

Sustituyendo en:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - b = m(x - 0)$$

$$y - b = mx$$

$$y = mx + b$$

que es la ecuación de  $r$  en la forma: **pendiente - intersección**.

### 5.7.3 Ecuación simétrica de la recta.

Sea  $r$  una recta que corta a los ejes X y Y en los puntos (a, 0) y (0, b) respectivamente, con a y b diferentes de cero.

Vamos a hallar la ecuación de  $r$  suponiendo conocidos los valores de a y b.

Recordemos la fórmula que da la pendiente de una recta que pasa por los puntos  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$ .

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

### 5.7.4 Casos particulares de la ecuación de la recta.

tomemos  $P_1$  como la intersección de  $r$  con el eje X, es decir  $x_1 = a$  y  $y_1 = 0$  y  $P_2$  como la intersección de  $r$  con el eje Y, o sea  $x_2 = 0$  y  $y_2 = b$ .

Entonces:



$$m = \frac{b-0}{0-a} = -\frac{b}{a}$$

La ecuación en la forma punto pendiente es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Sustituyendo  $x_1 = a$ ,  $y_1 = 0$  y  $m = -\frac{b}{a}$  queda:

$$y - 0 = -\frac{b}{a}(x - a)$$

$$ay = -b(x - a)$$

$$ay = -bx + ab$$

$$bx + ay = ab$$

Dividendo ambos miembros por  $ab$  (esto puede hacerse porque  $ab$  no es cero).

$$\frac{bx}{ab} + \frac{ay}{ab} = 1$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

que se llama: **ecuación simétrica de la recta**. ¿En que consiste la simetría?

Pues en que: debajo de la  $x$  esta la intersección de  $r$  con el eje  $X$  y debajo de la  $y$  la intersección de  $r$  con el eje  $Y$ .

#### Ejemplo 1

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos  $(4, 0)$  y  $(0, 3)$ .

#### Solución

Resolveremos este problema utilizando diferentes vías. Primeramente la forma punto - pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Tomemos  $P_1$  como  $(4, 0)$  es decir  $x_1 = 4$ , y  $y_1 = 0$  y  $P_2(0, 3)$ .

Recordemos la fórmula de la pendiente de la recta que pasa por dos puntos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Sustituyendo:

$$m = \frac{3-0}{0-4} = -\frac{3}{4}$$

Entonces la ecuación pedida puede escribirse así:

$$y - 0 = -\frac{3}{4}(x - 4)$$

Si dejamos la ecuación así, tiene la ventaja de que nos permite ver enseguida que la recta en cuestión pasa por el punto  $(4, 0)$  y tiene pendiente  $-\frac{3}{4}$ .

Segunda vía, forma simétrica.

En este caso podemos escribir la ecuación sin hacer calculo alguno, pues si la recta pasa por  $(4, 0)$  y por  $(0, 3)$  entonces  $a = 4$  y  $b = 3$ , y ya sabemos que en tal

caso la ecuación es:  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ , es decir:  $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ .

Tercera vía, usaremos la forma: pendiente - intersección:

$$y = mx + b$$

Ya sabemos que  $b$  es la ordenada del punto donde la recta corta al eje  $Y$ , en este caso  $b = 3$ ; la pendiente  $m$  la hallaríamos como lo hicimos en la primera vía donde obtuvimos:

$$m = -\frac{3}{4}$$

Entonces:

$$y = -\frac{3}{4}x + 3.$$

#### 5.7.4 Casos particulares de la ecuación de la recta.

Con mucha frecuencia nos encontramos en la práctica con rectas que ocupan posiciones particulares con respecto al sistema de coordenadas y nos será muy conveniente que conozcamos sus ecuaciones que, por supuesto, también presenta sus particularidades. Estos casos son: