1. **Recta que pasa por el origen de coordenadas.**

Tomamos la forma punto - pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Como en esta ecuación P_1 (x_1, y_1) es cualquier punto de la recta, y estamos suponiendo que esta pasa por el origen, tomamos este como P_1 o sea: $x_1 = 0$ $y_1 = 0$ quedando:

$$\boxed{y = mx.}$$

De modo que, si una recta pasa por el origen su ecuación es de la forma $y = mx$ y recíprocamente.

2. **Recta paralela al eje X.**

En este caso la pendiente es cero. En efecto, el ángulo de inclinación es de cero grados y la tangente de cero grados vale cero, recuerda que esta tangente es, por definición, la pendiente. Si la recta corta al eje Y en el punto (0, b), entonces, usando para su ecuación la forma punto - pendiente se convierte en:

$$y - b = 0(x - 0)$$

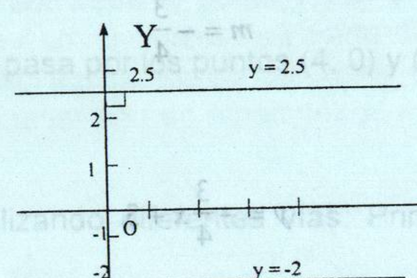
la cual se reduce a

$$\boxed{y = b}$$

Así que, si una recta es paralela al eje X, todos sus puntos tienen la misma ordenada y, recíprocamente, de decir, si b es un número fijo cualquiera, entonces la ecuación y = b tiene por gráfica la recta que pasa por (0, b) y es paralela al eje X.

Ejemplo 1

En la figura mostramos las rectas y = 2.5 , y = -2:



3. **Recta paralela al eje Y.**

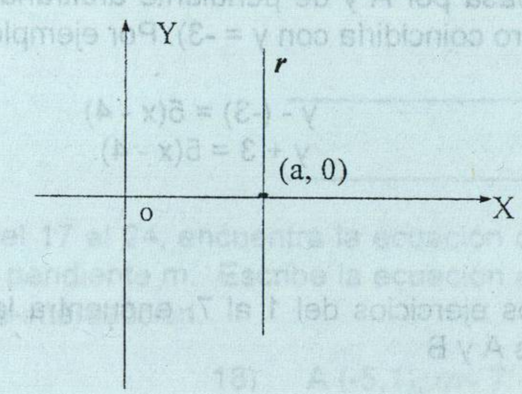
Si una recta es paralela al eje Y, es perpendicular al eje X, es decir, su ángulo de inclinación es de 90°; como la pendiente de una recta es por

definición, la tangente de su ángulo de inclinación y la tangente de 90° no existe, resulta de aquí que, si una recta es paralela al eje Y (dicho de otro modo es vertical), no tiene pendiente por lo que en este caso no podemos partir de la forma punto - pendiente para obtener este caso particular. Así que vamos a proceder de otro modo.

Sea (a, 0) el punto donde una recta paralela al eje Y corta a OX.
Entonces la ecuación de la recta es:

$$\boxed{x = a.}$$

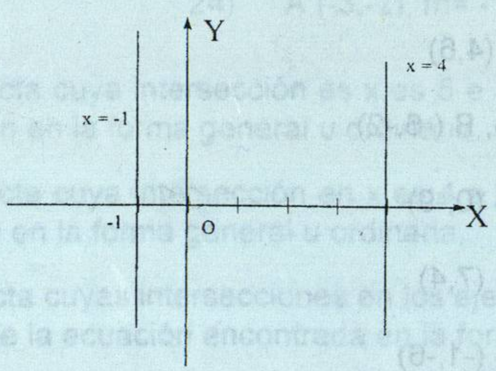
En efecto:



Si P(x, y) es un punto de ***r***, su abscisa tiene que ser igual a **a**: es decir x = a.
Recíprocamente, si la abscisa de un punto P es **a**, P tiene que estar en ***r***.
La ecuación de ***r*** es, pues:

$$x = a.$$

En la figura te mostramos dos ejemplos:



Nota:
Como casos más particulares tenemos dos conclusiones evidentes:
La ecuación del eje X es y = 0 y la ecuación del eje Y es x = 0.

Ejemplo 2

Escribe las ecuaciones de 3 rectas que pasan por el punto a(4, -3).

Solución

Hay dos cosa que son triviales, es decir que podemos dar inmediatamente como respuestas que son:

1. x = 4 es decir, la recta que pasa por A es vertical (paralela al eje Y).
2. y = -3 o sea, la recta horizontal que pasa por A.
3. Una recta que pasa por A y de pendiente arbitraria (y, por supuesto, no nula, pues si fuese cero coincidiría con y = -3). Por ejemplo, si tomo ***m*** = 5, entonces

$$y - (-3) = 5(x - 4)$$
$$y + 3 = 5(x - 4).$$

Ejercicio 5.7

En cada uno de los ejercicios del 1 al 7, encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B

a) En la forma Pendiente-Intersección

b) En la forma general u ordinaria

1) A (-2,-5), B (4,1)

2) A (4,7), B (6,11)

3) A (1,1), B (4,6)

4) A (-10,--7), B (-6,-2)

5) A (2,-3), B (0,-9)

6) A (-2,3), B (7,4)

7) A (-1,4), B (-1,-6)

8) A (-4,-18), B (3,12)

9) A (2,-10), B (-3,25)

10) A (-10,21), B (8,-6)

En los siguientes ejercicios del 11 al 16, determina la ecuación de la recta, dada la pendiente (m) y la intersección en el eje Y (b) . Escribe la ecuación en la forma pendiente-intersección.

11) m=3, b= -4 ____________

12) m= 7, b= 0 ____________

13) m= $\frac{5}{2}$, b= -6 ____________

14) m= -8, b= 3 ____________

15) m= $\frac{3}{5}$, b= -4 ____________

16) m= 1 b= -8 ____________

En cada uno de los ejercicios del 17 al 24, encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto A y que tiene pendiente m. Escribe la ecuación en la forma : a) punto-pendiente, b) pendiente-intersección.

17) A (2,3), m= 5 18) A (-5,1), m= 7

19) A (4,-3) m=-2 20) A (-6,-3), m= $\frac{3}{2}$

21) A (-2,5), m= $-\frac{1}{2}$ 22) A (-6,2), m= $\frac{4}{3}$

23) A (-5,4), m = $\frac{3}{5}$ 24) A (-3,-2), m= $-\frac{2}{3}$

25) Hallar la ecuación de la recta cuya intersección es x es 5 e intersección en y es -3. escribe la ecuación en la forma general u ordinaria.

26) Hallar la ecuación de la recta cuya intersección en x es 4 e intersección en y es 5. Escribe la ecuación en la forma general u ordinaria.

27) Hallar la ecuación de la recta cuyas intersecciones en los ejes X e Y son 2 y -7 respectivamente. Escribe la ecuación encontrada en la forma general.

28) Hallar la ecuación de la recta cuyas intersecciones en los ejes X e Y son -3 y 8 respectivamente. Escribe la ecuación encontrada en la forma general.

En los ejercicios del 29 al 48 encuentra la pendiente de la recta que representan las ecuaciones.

29) y= 5 x + 6 m=

30) y= $-\frac{2}{3}$x + 8 m=

31) y-7=2 (x - 6) m=

32) y-8= $\frac{3}{5}$(x + 6) m=

33) 3 x + 2 y=7 m=

34) x++6y+16=0 m=

35) 3 x + 4 y + 24=0 m=

36) 2 x + y= -3 m=

37) 6 x -7y= 16 m=

38) 2 x - 3 y = 6 m=

39) 3 x + 5 y = 10 m=

40) x + 4 y + 6 = 0 m=

41) 8 x -3y+ 18=0 m=

42) 5 x -3y= -13 m=

43) y= x + 7 m=

44) y= - x + $\frac{2}{5}$ m=

45) $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=1$ m=

46) $\frac{x}{2}-\frac{y}{5}=1$ m=

47) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ m=

48) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto (4,7) y es paralela a la recta y=4x-5.

49) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto (.1,3) y es paralela a la recta cuya ecuación es 6x-2y-15=0

50) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto (5,-2) y es paralela a la recta cuya ecuación es 2x+5y+20=0

51) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto (-1,-4) y es paralela a la recta cuya ecuación es 3x-2y=-40

52) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas 3x+2y=7, 2x+5y=12 y es paralela a la recta y= $\frac{2}{5}$x-10

53) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersecoción de las rectas, 3x+2y=-17, 7x+5y= -41 y es paralela a la recta y= 3x-7

54) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto (3,2) y que es perpendicular a la recta 2x+16y+6=0

55) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto (4,-2) y es perpendicular a la recta 5x-y=3

56) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto (-4,-6) y es perpendicular a la recta y= $-\frac{1}{2}$x+8

57) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto (-3,5) y es perpendicular a la recta y= 3x+8

58) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto (5,4) y es perpendicular a la recta y= $\frac{2}{5}$x-10

59) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas ; 7x+2y=15, 6x+5y=-3 y que es perpendicular a la recta y= $\frac{1}{5}$x-8

60) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas ; 2x+y=6, 3x-2y= 16 y es perpendicular a la recta y= $-\frac{3}{2}$x+15

61) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas ; x-6y= 16, 3x+7y= -27 y es perpendicular a la recta y= $-\frac{1}{5}$x+8

62) Encuentra la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta 4x+y=1 y que pasa por el punto de intersección de las rectas ; 2x-5y=-3, x-3y=7

63) Determina para que valor de K entero positivo, la recta (K-4)x + (K-3)y= 7 es paralela a la recta y= Kx+5.

64) Determina para que valor de K entero positivo, las rectas (7K+15)x + (2K-15)y+ 1 = 0, y = 2Kx - 9 son paralelas.

65) Determina para que valor de K entero positivo, las rectas (3K+14) x + (K-4)y - 5 =0, y = 5Kx-1 son paralelas.

66) Determina para que valor de K positivo, las rectas (5K-15) x + (K-3) y + 8 = 0, es paralela a la recta y = 2Kx - 5.

67) Determina para que valor de K positivo, las rectas (5K-8) x + (K-5) y -7=0, y = 3Kx -13, son paralelas.

68) Determina para que valor de K positivo, las rectas ; (5-9K) y + (K-6) y -7=0, y= $\frac{1}{2K}$ x - 4, son perpendiculares.

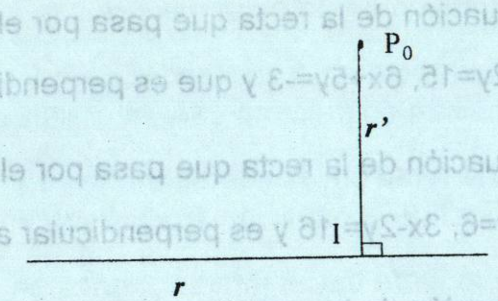
69) Determina para que valor de K positivo, las rectas ; (4-8K)x + (K-3)y - 1 = 0, y= $\frac{1}{3K}$ x-4 son perpendiculares.

5.8 Distancia de un punto a una recta.

Objetivo

Podrás calcular correctamente la menor distancia entre un punto y una recta

5.8.1 Distancia de un punto a una recta.



Sea ***r*** una recta y P_0 un punto que no pertenece a ***r***. La distancia de P_0 a ***r*** se define así: llamaremos ***r'*** a la recta que pasa por P_0 y es perpendicular a ***r***.

Entonces ***r'*** corta a ***r*** en un punto I. La distancia de P_0 a ***r*** es, por definición, la longitud del segmento P_0I.
Veamos ahora que implicación tiene lo anterior en Geometría Analítica. Comenzaremos con un ejemplo:

Ejemplo 1

Dada la recta ***r***: 3x + 4y -12 = 0 y el punto P(1, 1). Hallar la distancia de P a ***r***.

Solución
Tenemos que la pendiente de ***r*** está dad por :

$$m = -\frac{3}{4}$$

Ahora, la pendiente de la recta perpendicular a ***r*** es :

$$m = -\frac{1}{m} = \frac{4}{3}$$

Luego la ecuación de la recta ***r'*** que es perpendicular a ***r*** y pasa por P(1, 1):

$$y - 1 = \frac{4}{3}(x-1)$$

Hallemos ahora las coordenadas del punto I de intersección de ***r*** con ***r'***. Para ello resolveremos el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas:

r: 3x + 4y -12 = 0 (1)

r': $y = 1 + \frac{4}{3}(x-1)$ (2)

Usaremos el método de sustitución:

$$3x + 4\left(1 + \frac{4}{3}(x-1)\right) - 12 = 0$$

$$3x + 4 + \frac{16}{3}(x-1) - 12 = 0$$

$$9x + 12 + 16x - 16 - 12 = 0$$

$$25x = 40$$

$$x = \frac{8}{5}.$$

Sustituyendo en (2):

$$y = 1 + \frac{4}{3}\left(\frac{3}{5}\right) = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$$

Así que $I\left(\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right)$.

Solo falta hallar la distancia ente los puntos P e I. Aplicando la fórmula:

$$\sqrt{\left(\frac{8}{5}-1\right)^2 + \left(\frac{9}{5}-1\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = 1.$$

Veamos el caso general:

Si hiciéramos todo el proceso que acabamos de exponer, el resultado al cual llegaríamos sería el que presentamos a continuación mediante la fórmula:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Es decir: tomas el primer miembro de la ecuación de *r* (escrito en forma general) sustituyes x por x_0 y y por y_0; tomas el valor absoluto, es decir, te quedas con el mismo número si este te dio positivo y le cambias el signo si te dio negativo. Veamos esto con un caso particular.

Ejemplo 2

Hallemos la distancia del punto (1, 1) a la recta cuya ecuación es: 3x - 4y + 12 = 0.

Solución

1° Evaluamos el primer miembro para x = 1 y y = 1.

$$3(1) + 4(1) - 12 = 3 + 4 - 12 = -5$$

Como obtuvimos un número negativo, le cambiamos de signo. Así que el numerador de la fórmula es 5.

2° Veamos el denominador, como aquí A = 3 y B = 4, entonces :

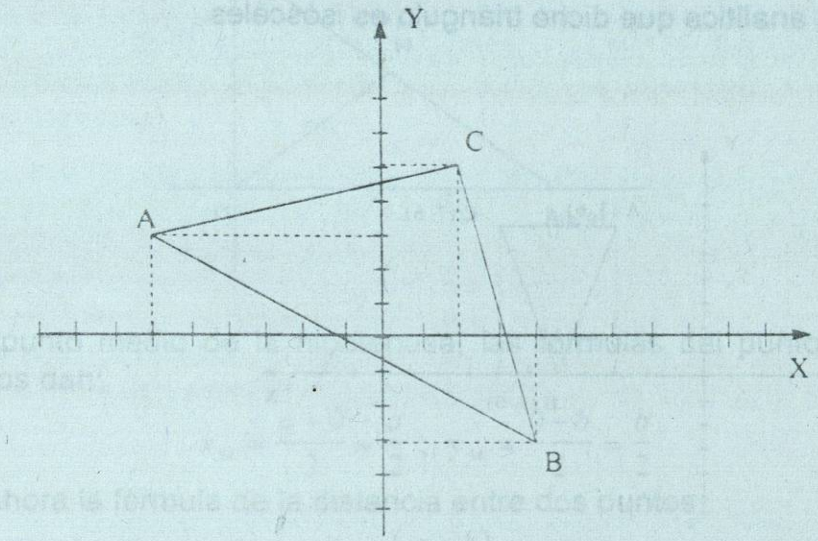
$$\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

Así que el denominador es 5.

3° Luego $d = \frac{5}{5} = 1$

Ejemplo 3

Comprobar que los puntos A(-6, 3), B(4, -3) y C(2, 5) son vértices de un triángulo isósceles no equilátero.



Solución

Aplicamos la fórmula de distancia entre dos puntos, así:

$$AC^2 = [\,2 - (-6)]^2 + (5 - 3)^2 = 64 + 4 = 68, \text{ entonces : } AC = \sqrt{68}$$

$$BC^2 = (2 - 4)^2 + [5 - (-3)]^2 = 4 + 64 = 68. \text{ entonces : } BC = \sqrt{68}$$

Como AC = BC el triángulo ABC es isósceles por tener dos lados iguales.

Veamos ahora porqué no es equilátero. Bastará que hallemos la longitud AB y comprobemos que dicha longitud no es la misma que la de los lados AC y BC.

$$AB^2 = (-6 - 4)^2 + (3 + 3)^2 = 100 + 36 = 136, \text{ entonces: } AB = \sqrt{136}$$

Con lo que queda comprobado lo que nos habíamos propuesto.