Ejercicio 5.8

1) Encuentra la distancia de la recta $3x - 4y + 4 = 0$ al punto (6,-2)
2) Encuentra la distancia de la recta $12x + 5y - 6 = 0$ al punto (4,-6)
3) Encuentra la distancia de la recta $4x + 3y - 5 = 0$ al punto (2,-5)
4) Encuentra la distancia de la recta $3x - 4y - 12 = 0$ al punto (-2,-1)
5) Encuentra la distancia de la recta $6x - 8y + 10 = 0$ al punto (4,2)
6) Encuentra la distancia de la recta $5x - 12y + 17 = 0$ al punto (-3,-2)

En los ejercicios del 7 al 12, encuentra la distancia entre las dos rectas paralelas.

7) $3x + 4y - 12 = 0$
$3x + 4y + 7 = 0$

8) $70x + 24y + 43 = 0$
$35x + 12y - 24 = 0$

9) $15x + 8y + 30 = 0$
$15x + 8y - 4 = 0$

10) $9x + 12y - 27 = 0$
$9x + 12y + 33 = 0$

11) $5x + 12y - 10 = 0$
$5x + 12y + \frac{2}{3} = 0$

12) $70x + 24y + 50 = 0$
$12x + 16y - 12 = 0$

CAPÍTULO 6

GEOMETRÍA ANALÍTICA
SEGUNDA PARTE

En este capitulo estudiaremos las curvas que resultan de la intersección de un cono de dos mantos con un plano. Dichas curvas se llaman SECCIONES CONICAS. Las secciones cónicas generales son: la circunferencia, la elipse, la hipérbola y la parábola.

Todas las secciones cónicas pueden representarse mediante ecuaciones de segundo grado con dos variables y recíprocamente, toda ecuación de segundo grado describe una sección cónica o algún caso degenerado de ella.

En este capítulo trataremos en detalle cada una de las secciones cónicas así como las relaciones que existen entre sus gráficas y sus ecuaciones.

6.1 Introducción

A la función cuadrática que conoces $y=ax^2+bx+c$ le agregamos el término y^2 ó xy, la relación sigue siendo cuadrática pero puede que no sea una función. Verás en este capítulo como son las gráficas de estas relaciones y cómo están relacionadas con un cono circular recto. De ahí el nombre de Secciones Cónicas. Estas secciones cónicas son buenos modelos matemáticos de los planetas, aeroespacio y otros objetos que viajan sobre la influencia de la gravedad.

Definición

> Una relación cuadrática es una relación especificada por la ecuación
> $$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$
> donde A,B,C,D,E y F están como constantes.

Tu objetivo va a ser determinar cómo van a ser las gráficas de tal relación y cómo las 6 constantes afectan la gráfica.

Ejercicio 6.1

Para empezar traza una gráfica de cada relación, escoge valores para x y calcula los valores correspondientes para y hasta que tengas suficientes puntos para trazar una curva, cuando hayas terminado, ve si puedes tener algunas conclusiones acerca de la forma, tamaño y locación de cada gráfica.

1. $\{(x,y):x^2+y^2=25\}$
2. $\{(x,y):x^2+y^2+6x=16\}$
3. $\{(x,y):x^2+y^2-49=21\}$
4. $\{(x,y):x^2+y^2+6x-4y=12\}$

6.2 Circunferencia

En el ejercicio que acabas de resolver descubriste que las gráficas de algunas relaciones cuadráticas son círculos. En esta sección vas a aprender por qué esto es verdad y a utilizar los resultados para dibujar las gráficas rápidamente.

Objetivo

> Dar la ecuación de una circunferencia y ser capaz de dibujar la gráfica rápidamente.

Para lograr este objetivo vas a empezar con la definición geométrica del círculo y usar esa definición para saber cómo es la ecuación de un círculo.

Definición geométrica de la circunferencia

> Una circunferencia es un conjunto de puntos en un plano, en donde cada uno de estos puntos son equidistantes de un punto fijo llamado centro.

Imagina que un círculo con radio r unidades tiene su centro en el punto fijo (h,k) en el sistema coordenado cartesiano, como lo muestra la figura 6.2*a*. Donde la distancia entre (x,y) y (h,k) es el radio (r) del círculo. La distancia puede ser expresada en términos de las coordenadas de dos puntos usando la fórmula de la distancia.

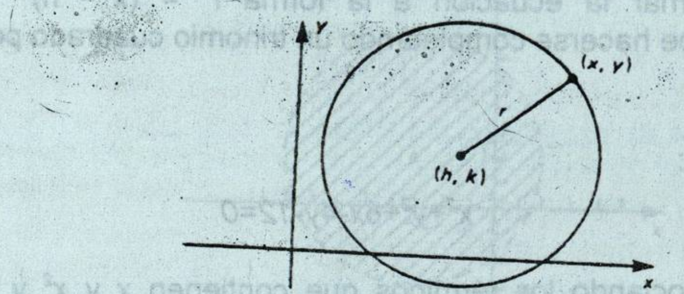


Figura 6.2*a*

Objetivo

> Expresar la distancia entre dos puntos en el sistema coordenado cartesiano, en términos de las coordenadas de los puntos.

La figura 6.2*b* muestra que Δx, Δy y la distancia d entre los dos puntos, son las medidas de los lados de un triángulo rectángulo.

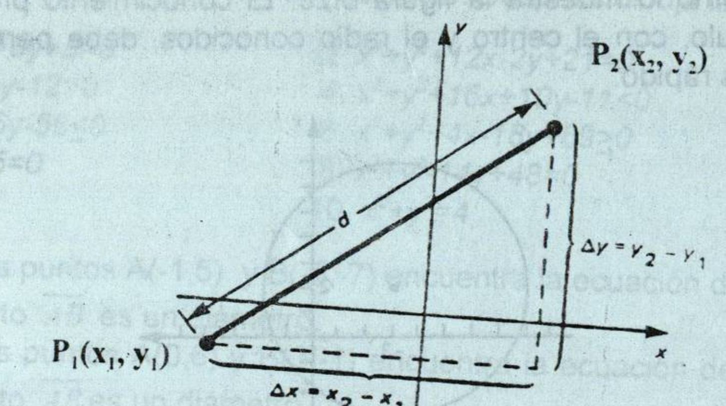


Figura 6.2*b*

Por el teorema de Pitágoras, obtenemos:

$d^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2$ sustituyendo *r* por *d*, *x-h* por x, y *y-k* por y nos queda

$$r^2=(x-h)^2+(y-k)^2$$

que es la ecuación en forma reducida del círculo con centro en *(h,k)* y radio=*r*. Si el centro está en el origen, entonces *(h,k)=(0,0)*. En este caso la ecuación se reduce a:

$$x^2+y^2=r^2$$

Para mostrar que la gráfica de una ecuación dada representa una circunferencia, es suficiente transformar la ecuación a la forma $r^2=(x-h)^2+(y-k)^2$. Esta transformación debe hacerse completando un trinomio cuadrado perfecto.

Ejemplo.

Gráfica la relación :

$$x^2+y^2+6x-4y-12=0$$

Solución

Conmutando y asociando los términos que contienen *x* y x^2 y los términos que contienen *y* y y^2, después agregando la constante 12 a ambos miembros nos dá :

$$(x^2+6x+\_\ )+(y^2-4y+\_\ )=12$$

Los espacios en blanco dentro del paréntesis son para que completes trinomios cuadrados perfectos, agregando 9 y 4 en la izquierda, y en la derecha para obtener una ecuación equivalente, o sea :

$$(x^2+6x+9)+(y^2-4y+4)=12+9+4$$

$$(x+3)^2+(y-2)^2=25$$

Por lo tanto la gráfica va a ser una circunferencia de 5 unidades de radio con centro en *(h,k)*= (-3,2) como lo muestra la figura 6.2*c*. El conocimiento previo de que la gráfica es un círculo, con el centro y el radio conocidos, debe permitirte trazar la gráfica mucho más rápido.

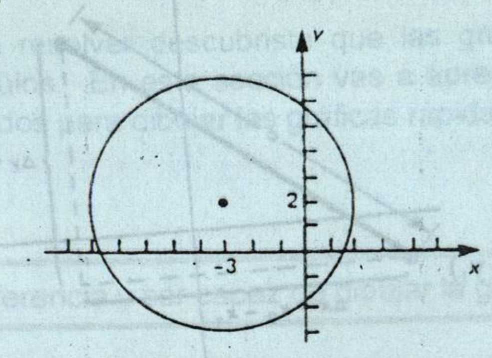


Figura 6.2*c*

Uno de los objetivos es determinar los efectos de las constantes *A,B,C,D,E* y *F* en la gráfica de :

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

Lo anterior nos lleva a la conclusión acerca del tamaño relativo de *A* y *C*.
La gráfica de una relación cuadrática va a ser un círculo si los coeficientes de los términos x^2 y y^2 son iguales (y el término *xy* es cero).
Si la expresión es una desigualdad, entonces la gráfica va a ser la región de adentro del círculo, si el símbolo es "<" como es indicado en la figura 6.2*d*, o fuera del circulo si el símbolo es ">"

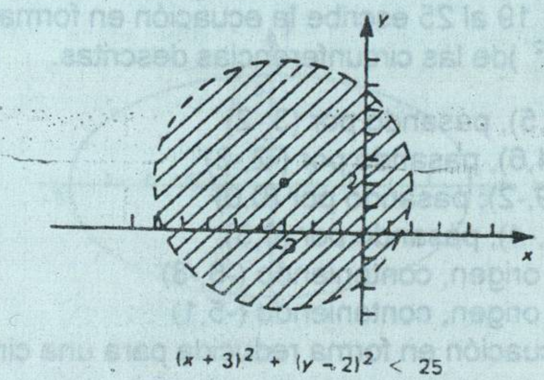


Figura 6.2*d*

Los siguientes ejercicios son para que practiques las gráficas de círculos y regiones circulares dados por la ecuación o desigualdad.

Ejercicio 6.2

Para los ejercicios del uno al diez, completa el trinomio cuadrado perfecto (si es necesario) para encontrar el centro y el radio. Después dibuja la gráfica.

1. $x^2+y^2-10x+8y+5=0$
2. $x^2+y^2+12x-2y+21=0$
3. $x^2+y^2-6x-4y-12>0$
4. $x^2+y^2+16x+10y-11<0$
5. $x^2+y^2-8x+6y-56\leq 0$
6. $x^2+y^2+4x-18y+69\geq 0$
7. $x^2+y^2+4x-5=0$
8. $x^2+y^2-14y+48=0$
9. $x^2+y^2=49$
10. $x^2+y^2=4$
11. Dados los puntos A(-1,5) y B(-5,-7) encuentra la ecuación de la circunferencia si el segmento $\overline{AB}$ es un diámetro.
12. Dados los puntos A(0,6) y B(3,-1) encuentra la ecuación de la circunferencia si el segmento $\overline{AB}$ es un diámetro.
13. Dados los puntos A(-12,10), B(-2,-2) en encuentra la ecuación de la circunferencia si el segmento $\overline{AB}$ es un diámetro.

14. Encuentra la ecuación de la circunferencia de diámetro, el segmento que une los puntos (6,-2) y (2,-4).
15. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro (-2,3) que sea tangente a la recta $20x - 21y - 42 = 0$.
16. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro (5,-2) y que es tangente a la recta $3x - 4y + 4 = 0$.
17. Encuentra la ecuación de la circunferencia con centro (2,-1) que sea tangente a la recta $3x - 4y + 5 = 0$.
18. Encuentra la ecuación de la circunferencia con centro (-3,-4) y que es tangente a la recta $3x + 4y - 15 = 0$

Para problemas del 19 al 25 escribe la ecuación en forma reducida ($r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$)de las circunferencias descritas.

19. Centro en (7,5), pasando por (3,-2)
20. Centro en (-4,6), pasando por (-2,-3)
21. Centro en (-9,-2), pasando por (0,0)
22. Centro en (5,-4), pasando por (0,3)
23. Centro en el origen, conteniendo (-6,-8)
24. Centro en el origen, conteniendo (-5,1)
25. Escribe la ecuación en forma reducida para una circunferencia :

    a. de radio r, con centro en un punto del eje x
    b. de radio r, con centro en un punto del eje y
    c. con radio r, y centro en el origen.

26. ¿Qué supones que significa círculo de un punto? ¿Cómo puedes saber de la ecuación, que el círculo, es un círculo de un punto?
27. A veces la gráfica de una relación cuadrática no tiene puntos ¿Cómo puedes saber a base de la ecuación si esto va a suceder?
28. Introducción a Elipses. En este problema vas a encontrar como es la gráfica, si los coeficientes de x^2 y y^2 no son iguales, pero tienen el mismo signo. Haz las siguientes cosas para la relación cuya ecuación es :

$$9x^2+25y^2=225$$

    a. Resuelve la ecuación para y en términos de x
    b. Explica porque hay dos valores para y por cada valor de x entre -5 y 5.
    c. Explica porque no hay valores reales para y cuándo $x>5$ y $x<-5$
    d. Calcula valores para y por cada valor entero de x entre -5 y 5.
    e. Traza la gráfica, debes obtener una figura cerrada llamada Elipse.

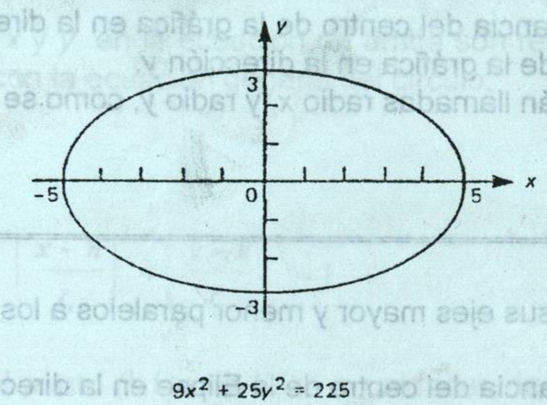
6.3 Elipse

Objetivo

Dada la ecuación de una elipse.
a. Dibuja la gráfica   b. Calcula el radio focal y traza los focos

Si en la ecuación del círculo los coeficientes de x^2 y y^2 son iguales, en la Elipse son diferentes pero con el mismo signo. Si hiciste el problema 20 del ejercicio 8.2 encontraste que la gráfica de :

$$9x^2+25y^2=225$$



Mostrada en la figura 6.3*a* es una Elipse.

Figura 6.3*a*

Aprenderás en esta sección las propiedades de las Elipses que te van a permitir trazar las gráficas rápidamente.
Las partes de la gráfica de una Elipse tienen nombres especiales como lo muestra la figura 6.3*b*. Ahora si tu sabes cuál es el centro y cuánto mide el eje mayor y el menor, puedes dibujar la gráfica rápidamente. El truco está en transformar la ecuación, para que estas longitudes aparezcan.

Ejemplo

Empezaremos con $9x^2+25y^2=225$
divides ambos miembros de la igualdad por 225 para que el miembro derecho sea igual a 1.

$$\frac{9x^2}{225}+\frac{25y^2}{225}=\frac{225}{225}$$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{29}=1$$

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2=1$$

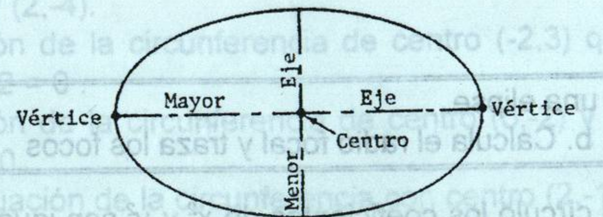


Figura 6.3b

El 5 bajo *x* es la distancia del centro de la gráfica en la dirección *x*. El 3 bajo *y* es la distancia del centro de la gráfica en la dirección *y*.
Estas distancias serán llamadas radio *x* y radio *y*, como se muestra en la figura 6.3*c*

Definición

Radio *x* y radio *y*.
Si una elipse tiene sus ejes mayor y menor paralelos a los ejes coordenados entonces
El radio *x* es la distancia del centro de la Elipse en la dirección *x* *y*,
El radio *y* es la distancia del centro de la elipse en la dirección *y*.

Comparando las gráficas en las figuras 6.3*b* y 6.3*c*, puedes ver que el radio *x* y el radio *y* son cada uno la mitad del eje mayor o menor.

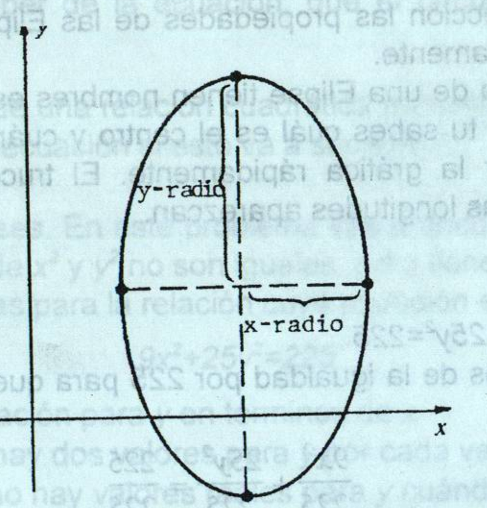


Figura 6.3*c*

La mitad del eje mayor es llamado semi eje mayor. La mitad del eje menor es llamado semi eje menor. El eje mayor de una elipse puede ser vertical como en la figura 6.3*c* u horizontal como en la figura 6.3*a*. El semi eje mayor es igual al radio y o al radio *x*, según sea el caso.
Sea r_x y r_y los radios *x* y *y* respectivamente la ecuación general de una elipse con centro en el origen es

$$\left(\frac{x}{r_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{r_y}\right)^2 = 1$$

Si el centro es *(h,k)* entonces *x* y *y* en la ecuación de arriba son reemplazados por *(x-h)* y *(y-k)*, como lo hicimos con la ecuación general del círculo.

Conclusión

La gráfica de :

$$\left(\frac{x-h}{r_x}\right)^2 + \left(\frac{y-k}{r_y}\right)^2 = 1$$

es una elipse con centro en el punto *(h,k)* que tiene r_x unidades desde el centro en la dirección positiva y negativa de *x*. r_y unidades desde el centro en la dirección positiva y negativa de *y*.

Ejemplo 1.

Dibuja la gráfica de :

$$25x^2+9y^2-200x+18y+184=0$$

Solución

Para dibujar la gráfica rápidamente debes transformar la ecuación a la forma anterior completando el cuadrado. Primero restas 184 a ambos miembros, conmutas y asocias lo que te queda en el miembro izquierdo, obteniendo

$$(25x^2-200x) + (9y^2+18y) = -184$$

Sacando de factor común los coeficientes de x^2 y y^2 nos queda

$$25(x^2-8x+\_\_) + 9(y^2+2y+\_\_) = -184$$

los espacios en blanco son para que completes el cuadrado, agregando 16 y 1 completas los cuadrados en el miembro izquierdo y requieres agregar 25· 16 y 9· 1 en el miembro derecho para balancear la igualdad o sea,