$$25(x^2-8x+16)+9(y^2+2y+1)=-184+25\cdot 16+9\cdot 1$$

Escribiendo en términos de cuadrados perfectos el miembro izquierdo y haciendo operaciones en el derecho nos queda :

$$25(x-4)^2+9(y+1)^2=225$$

Dividiendo ambos miembros por 225 obtenemos la ecuación de la forma deseada

$$\frac{25(x-4)^2}{225}+\frac{9(y+1)^2}{225}=\frac{225}{225}$$

$$\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{25}=1$$

$$\left(\frac{x-4}{3}\right)^2+\left(\frac{y-(-1)}{5}\right)^2=1$$

La gráfica es una elipse con centro en el punto (4,-1) con radio *x* de 3 unidades y radio *y* de 5 unidades.
La gráfica debe ser dibujada rápidamente trazando los cuatro puntos críticos como lo muestra la figura 6.3*d*

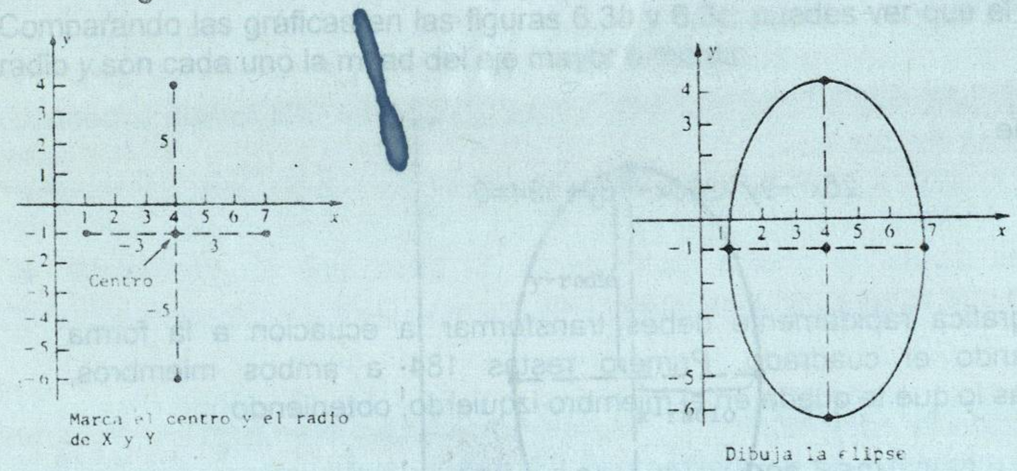
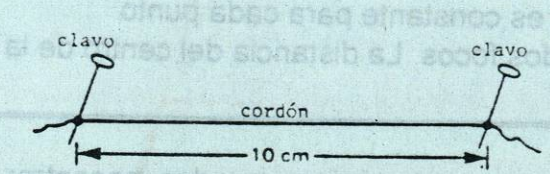


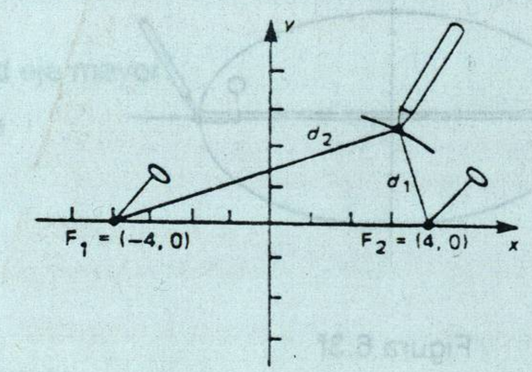
Figura 6.3*d*

Si el símbolo de = es reemplazado por los de "< ó >", entonces la gráfica va a ser la región de adentro de la elipse o afuera de la elipse respectivamente.

Hay un par de puntos asociados con la elipse que tienen propiedades geométricas importantes. Imagina que amarras dos alfileres a un pedazo de cuerda de tal manera que hay 10 cm de cuerda entre ellos. Después fijas los alfileres en los puntos $F_1=(4,0)$ y $F_2(-4,0)$ del sistema coordenado cartesiano. (Ver figura 6.3*e*).

Poniendo un lápiz como lo muestra la figura y manteniendo la cuerda apretada. puedes dibujar una curva que resulta ser la elipse de la figura 6.3*a*.





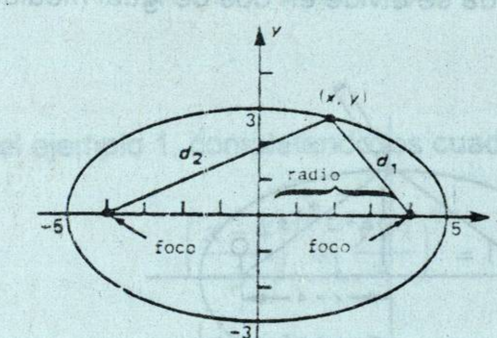


Figura 6.3*e*

Definición

Una elipse es un conjunto de puntos en un plano. La suma de sus distancias d_1+d_2 desde dos puntos fijos F_1 y F_2 es constante para cada punto.
Cada punto F_1 y F_2 son llamados focos. La distancia del centro de la elipse al foco es llamada radio focal.

Colocando el lápiz en dos puntos estratégicos puedes encontrar la manera de calcular el radio focal.
Colocando en el eje *x* como en la figura 8.3*f* puedes ver que la longitud del eje mayor es igual a la de la cuerda. Esto es la suma constante de las distancias d_1+d_2, es igual a la longitud del eje mayor.

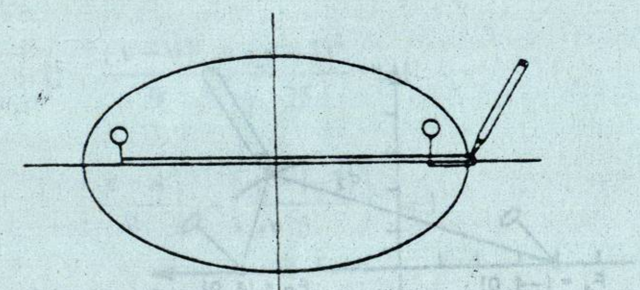


Figura 6.3f

Colocando el lápiz en el eje *y*, como en la figura 6.3*g*. Se forma un triángulo isósceles, cuya longitud de la cuerda se divide en dos de igual medida.

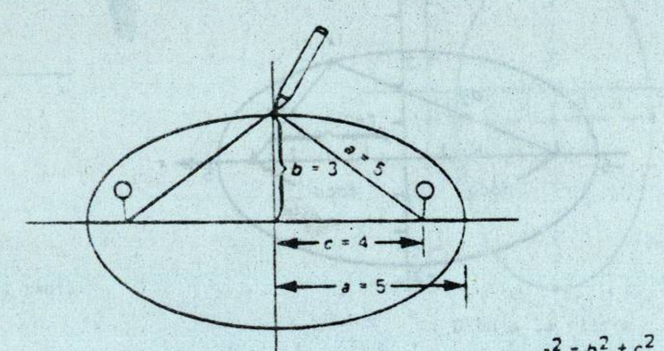


Figura 6.3*g*.

Si los radios *x* y radio *y* son conocidos entonces el semi eje mayor es más largo y el semi eje menor el más pequeño. Dejando que *a* represente el semi eje mayor, y *b* el semi eje menor y *c* el radio focal, entonces la siguiente conclusión es cierta.

Conclusión

En una Elipse

Si:

a es la longitud del semi eje mayor.

b es la longitud del semi eje menor.

c es el radio focal y

d_1 y d_2 son las distancias desde un punto *(x,y)* en la elipse a los dos focos.

Entonces

$d_1+d_2=2a$= longitud eje mayor.

$a^2=b^2+c^2$ de donde

$c^2=a^2-b^2$

Ejemplo 2.

Encuentra los focos de :

$$25x^2+9y^2-200x+18y+184=0$$

Solución.

Esta es la elipse del ejemplo 1, completando los cuadrados nos dá

$$\left(\frac{x-4}{3}\right)^2+\left(\frac{y+1}{5}\right)^2=1$$

entonces *a=5* y *b=3*. Usando el hecho de que

$$c^2=a^2-b^2$$

$$c^2=5^2-3^2$$

$$c^2=16$$

$$c=4$$

Ya que el eje mayor está en dirección de y, los focos van a estar ubicados verticalmente en 4 unidades desde el centro de la elipse (figura 6.3*h*)

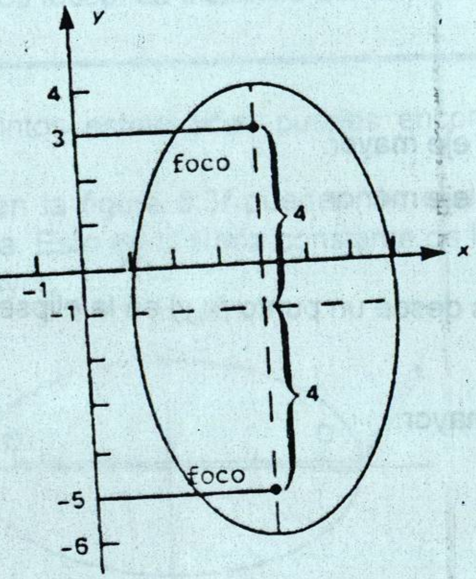


Figura 6.3*h*

El siguiente ejercicio está diseñado para darte práctica dibujando las gráficas de las elipses y encontrando los focos.

Ejercicio 6.3

a. Cuál es el radio del círculo $(x-5)^2+(y-2)^2=49$
b. Donde esta el centro del círculo $(x+3)^2+(y-4)^2=25$
c. Completa el cuadrado x^2+2ax+
d. Escribe $x^2-8x+16$ como un binomio al cuadrado
e. Encuentra k, si (3,4) está en la gráfica de $y=kx^2$
f. Resuelve
g. Resuelve $|x-11|=2$
h. Simplifica $7+3(x-5)$
i. Encuentra el 90% de 90
j. Resuelve $-3x<10$

Para problemas del 1 al 16

a. Dibuja la gráfica de la relación
b. Calcula el radio focal y traza los dos focos
c. Transforma la ecuación a la forma canónica y graficala.

1. $4x^2+9x^2-16x+90y+205=0$
2. $12x^2+y^2=48$
3. $4x^2+36y^2+40x-288y+532=0$
4. $5x^2+8y^2=77$
5. $49x^2+16y^2+98x-64y-671=0$
6. $25x^2+49y^2=1225$
7. $25x^2+4y^2-150x+32y+189=0$
8. $100x^2+36y^2=3600$

9. $x^2+4y^2+10x+24y+45=0$
10. $36x^2+9y^2-216x=0$
11. $16x^2+y^2-128x-20y+292=0$
12. $16x^2+25y^2-300y+500=0$
13. $25x^2+9y^2+50x-36y-164<0$
14. $x^2+9y^2=36$
15. $4x^2+36y^2+48x+216y+324\geq 0$
16. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}<1$

17. Imagina que eres el jefe de matemáticas de la compañía de construcción Amado Garza. Tu compañía tiene un contrato para construir un estadio de fútbol en la forma de dos elipses concéntricas. Con el terreno adentro de la elipse interior y los asientos entre las dos elipses. Los asientos están en la intersección de las gráficas de :

$$x^2+4y^2>100 \quad y \quad 25x^2+36y^2<3600$$

Donde cada unidad de la gráfica representa 10 metros.

a. Dibuja el área donde están los asientos
b. Tu encuentras que el área de una región elíptica es , donde *a* y *b* son los semi ejes y el departamento de ingeniería estima que cada asiento ocupa 0.8 metros cuadrados. ¿Cuál es la capacidad del área de asientos del estadio?

18. Muestra que la ecuación de una elipse

$$\left(\frac{x-h}{r_x}\right)^2+\left(\frac{y-k}{r_y}\right)^2=1$$

se reduce a la ecuación de un circulo si $r_x=r_y$

19. Introducción a las Hipérbolas.
Las elipses que has trazado en ésta sección tienen ecuaciones en donde los términos x^2 y y^2 tienen el mismo signo. En este problema vas a ver como es la gráfica si los signos de x^2 y y^2 son opuestos. Haz las siguientes indicaciones que se te piden de la ecuación :

$$9x^2-16y^2=144$$

a. Resuelve la ecuación para y en términos de x
b. Explica porque no va a haber valores reales para y, cuando $-4<x<4$
c. Explica porque va a haber 2 valores para y por cada valor de x, cuando $x>4$ ó $x<-4$
d. Haz una tabla de valores de y por cada valor entero de x, desde 4 hasta 8, incluyendo aproximaciones decimales, donde sea necesario.
e. Explica porque puedes usar la misma tabla de valores de y. Por valores de x entre $-4y$, -8
f. Traza la gráfica de la relación desde $x=-4$ hasta $x=-8$ y desde $x=4$ hasta $x=8$

g. En el mismo sistema coordenado cartesiano traza las gráficas de las líneas

$$y = \frac{3}{4}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{3}{4}$$

Si la gráfica de la parte *f* es correcta, entonces estas rectas son las asíntotas diagonales de la curva.
La gráfica es llamada Hipérbola y es una curva no cerrada con dos ramas.

6.4 Hipérbola

En la ecuación de la elipse los coeficientes de x^2 y y^2 no son iguales pero tienen el mismo signo. En cambio si x^2 y y^2 tienen signos opuestos, tal como

$$9x^2-16y^2=144$$

Entonces la gráfica luce como la figura 6.4*a* y es llamada una Hipérbola. Tu descubriste esto haciendo el problema 19 del ejercicio 6.3

Objetivo

Dada la ecuación de la Hipérbola, ser capaz de dibujar la gráfica rápidamente.

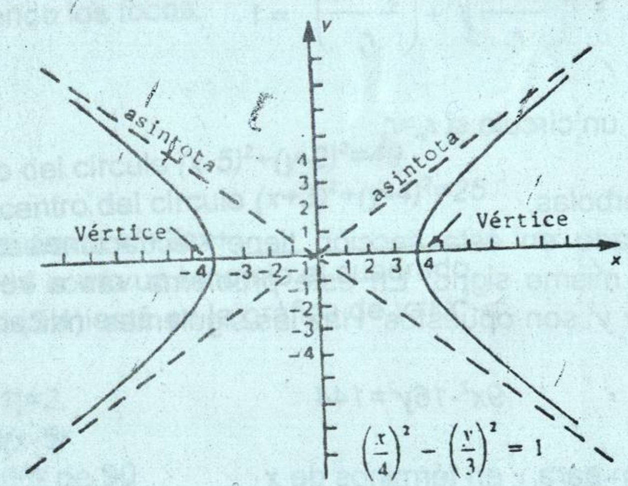


Figura 6.4*a*

Las Hipérbolas tienen dos ramas separadas, cada rama se aproxima a una asíntota diagonal.
Tu puedes ver porque transformando la ecuación de manera que *y* esté sola en el miembro izquierdo

$$-16y^2=-9x^2+144$$

$$16y^2= 9x^2-144$$

$$16y^2= 9(x^2-16)$$

$$y^2 = \frac{9}{16}(x^2-16)$$

$$y = \pm\frac{3}{4}\sqrt{x^2-16}$$

Dos observaciones acerca de la gráfica, se pueden hacer de esta ecuación.

1. No hay valores reales de *y* cuando *x* está entre -4 y 4 porque el radical x^2-16 sería negativo
2. Cuando *x* es mayor, la diferencia entre $\sqrt{x^2-16}$ y $\sqrt{x^2}$ se acerca a cero. Por ejemplo si *x=100*, entonces

$$\sqrt{x^2-16} = \sqrt{10{,}000-16} = \sqrt{9984} = 99.92$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{10{,}000} = 100.$$

Consecuentemente mientras *x* sea mayor, y se acerca a $\pm\frac{3}{4}\sqrt{x^2}$ o $\pm\frac{3}{4}x$, que son las asíntotas de la gráfica, cuyas inclinaciones son $\frac{3}{4}$ y $-\frac{3}{4}$

El 4 y el 3 en las inclinaciones de las asíntotas pueden mostrarse en la ecuación haciendo el miembro derecho igual a 1.

$$9x^2-16y^2=144$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$$

En esta forma, el 4 abajo de la *x* está en la misma posición que el radio *x* para una elipse. El 3 bajo *y* está en la misma posición que el radio *y* como se muestra en la figura 6.4*b*, el radio *x*, es, en este caso, la distancia del centro al vértice de la hipérbola en la dirección *x*. El radio *y* es la distancia entre el vértice y la asíntota, ya sea hacia arriba o hacia abajo.

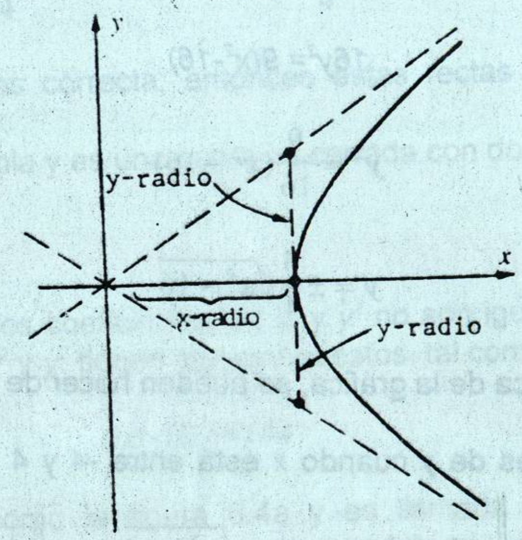
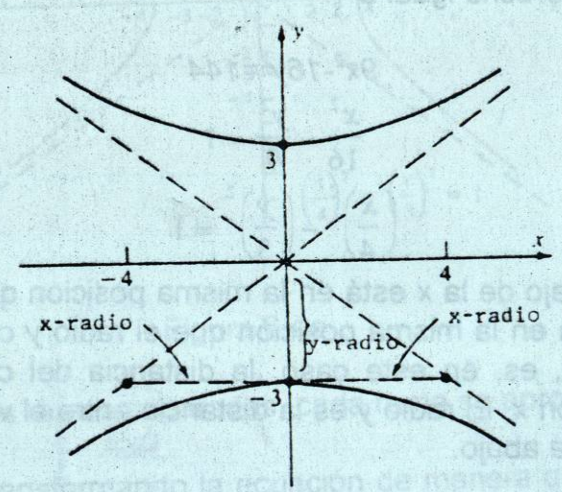


Figura 6.4*b*

Si los signos han sido invertidos, como por ejemplo

$$-\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2=1$$

entonces la hipérbola va a tener dos ramas abriéndose en la dirección *y*. Las asíntotas van a seguir teniendo sus pendientes y Pero los vértices van a ser 3 unidades desde el centro en la dirección *y*, ya que el radio *y* es 3. El radio *x* será la distancia del vértice de la hipérbola a las asíntotas en la dirección x. La gráfica se muestra en la figura 6.4*c*



$$-\left(\tfrac{x}{4}\right)^2+\left(\tfrac{y}{3}\right)^2=1$$

Figura 6.4*c*

Las ecuaciones de las dos hipérbolas

$$-\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2=1 \quad \text{y} \quad \left(\frac{x}{4}\right)^2-\left(\frac{y}{3}\right)^2=1$$

Son similares con la excepción de que los signos están invertidos en el lado izquierdo. Las dos hipérbolas resultantes se dicen conjugadas una de la otra. Tienen las mismas asíntotas y los mismos radios de *x* y *y*. Pero una se abre en la dirección *y* y la otra se abre en la dirección *x*. Cuando la ecuación es escrita en la forma que aparece un uno en el miembro derecho como arriba. La hipérbola se abre en la dirección del término cuadrado que tenga signo positivo.
El eje que cruza la hipérbola, de vértice a vértice, es llamado el eje transverso. El otro es llamado el eje conjugado porque es el eje de la hipérbola conjugada.
Hay una definición geométrica de la hipérbola similar a la elipse. Para cada punto de la hipérbola la diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.

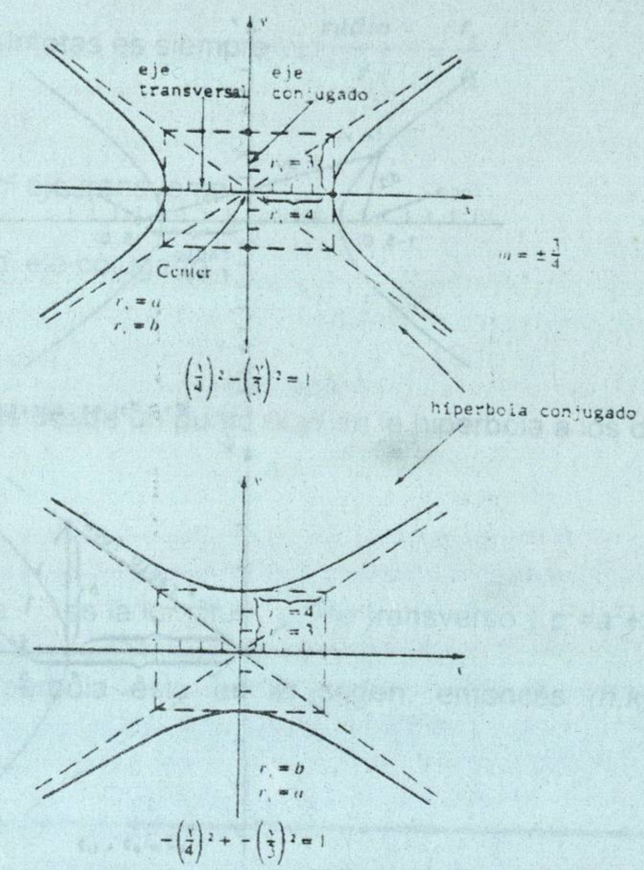


Figura 6.4*d*