Definición

> Una hipérbola es un conjunto de puntos en un plano. Para cada punto (x,y) de la hipérbola, la diferencia entre sus distancias desde dos puntos fijos llamados focos es una constante.

La figura 6.4*e* ilustra esta definición, deja que *a* y *b* representen los semi ejes transverso y conjugado respectivamente. Los valores de *a* y *b* van a ser los radios de *x* y *y*. Si la hipérbola se abre en la dirección *x*, entonces $a=r_x$. Si se abre en la dirección de *y* entonces $a=r_y$.

Para las hipérbolas, la hipotenusa del triángulo mostrado en la derecha de la figura 6.4*e* es igual al radio focal. Dejando que *c* represente el radio focal, el teorema de Pitágoras nos da $c^2=a^2+b^2$,entonces en este caso $c^2=4^2+3^2=25$, por lo que $c=5$

La discusión anterior ha sido para una hipérbola con centro en el origen. Si el centro está en (h,k), la *x* en la ecuación es reemplazada por $(x-h)$ y *y* es reemplazada por $(y-k)$.

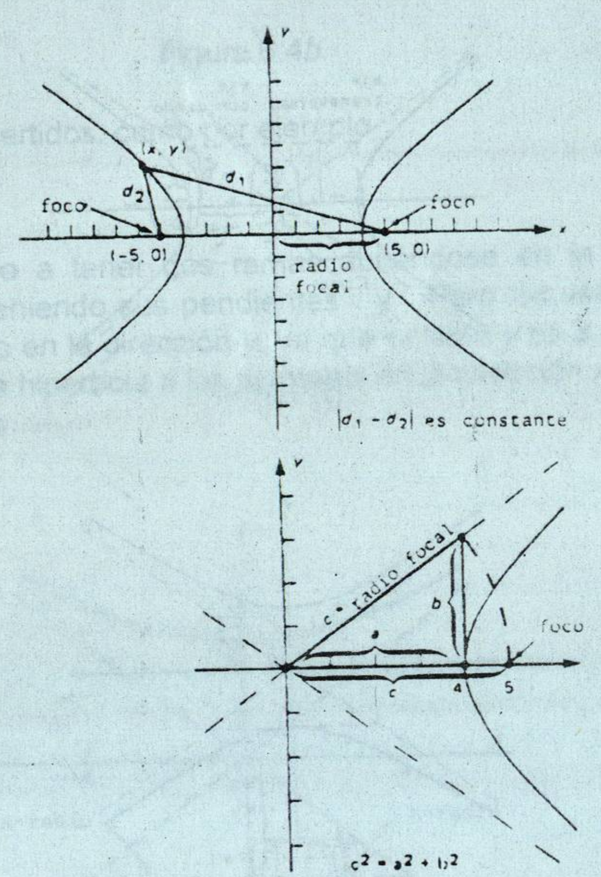


Figura 6.4*e*

Conclusiones

La ecuación general de una hipérbola es

$$\left(\frac{x-h}{r_x}\right)^2 - \left(\frac{y-k}{r_y}\right)^2 = 1 \quad \text{ó} \quad -\left(\frac{x-h}{r_x}\right)^2 + \left(\frac{y-k}{r_y}\right)^2 = 1$$

La hipérbola se abre en la dirección de *x*. Si el signo del término que contiene x es positivo.

La hipérbola se abre en la dirección de *y*. si el signo del término que contiene y es positivo.

La inclinación de las asintotas es siempre $\pm \frac{radio\ y}{r_x} = \frac{r_y}{r_x}$

Si:

a es la longitud del semi eje transverso

b es la longitud del semi eje cojugado

c es el radio focal , y

d_1 y d_2 son las distancias desde un punto (x,y) en la hipérbola a los dos focos.

Entonces:

a es la longitud del eje transverso y $c^2=a^2+b^2$

Si el centro de la hipérbola está en el origen, entonces $(h,k)=(0,0)$ y estas [illegible]

$$\left(\frac{x}{r_x}\right)^2 - \left(\frac{y}{r_y}\right)^2 = 1 \quad \text{ó} \quad -\left(\frac{x}{r_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{r_y}\right)^2 = 1$$

Ejemplo 1

Dibuja la gráfica de la ecuación : $9x^2-4y^2+90x+32y+197=0$

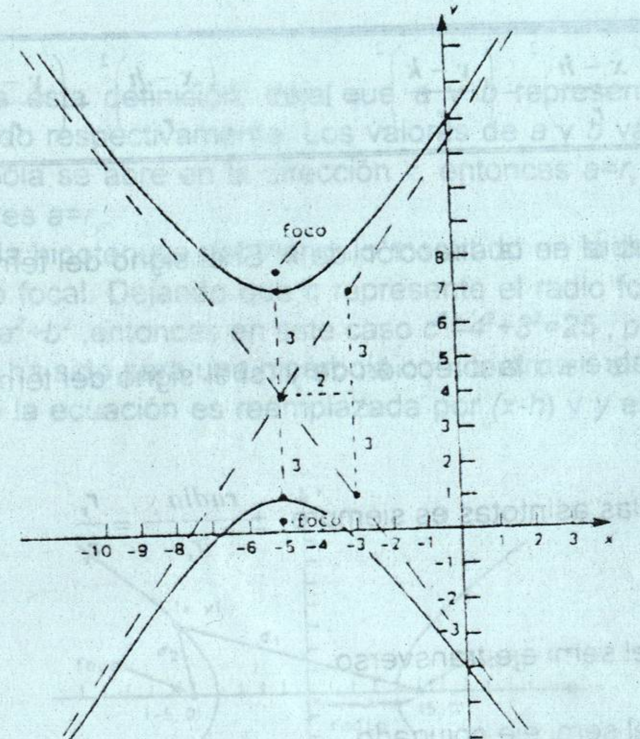


Figura 6.4*f*

Solución

Primero transforma la ecuación completando los trinomios cuadrados perfectos de la siguiente manera:

$$9(x^2+10x+\ \ )-4(y^2-8y+\ \ )=-197$$

$$9(x^2+10x+25)-4(y^2-8y+16)=-197+9.25-4.16$$

$$9(x+5)^2-4(y-4)^2=-36$$

$$-\left(\frac{x+5}{2}\right)^2+\left(\frac{y-4}{3}\right)^2=1$$

La gráfica es una hipérbola abriéndose en la dirección de *y* con centro en (-5,4). Las asíntotas son de inclinaciones $\pm\frac{3}{2}$ y vértices del eje transverso 3 unidades hacia arriba, y hacia abajo en la dirección de *y*.

Usando esta información, primero debes localizar el centro después, dibujar las asíntotas con la inclinación apropiada. Los únicos puntos que necesitas trazar son los vértices. Con esta información procedes a graficar la hipérbola como se muestra en la figura 6.4*f*

Ejemplo 2

Encuentra y traza los focos de la hipérbola del ejemplo 1.

Solución

$$c^2=a^2+b^2$$

$$c^2=2^2+3^2$$

$$c^2=13$$

$$c=\sqrt{13}$$

$$c=3.61$$

Los focos son ±3.61 unidades desde el centro, como lo muestra la figura.

Ejercicio 6.4

Contesta las preguntas.

a. Evalúa : $7x^2+3x+\frac{9}{196}$

b. Simplifica: $-3x(x+5)-17$

c. Multiplica: $(3x+xy)(3x-xy)$

d. factoriza $(x+3)^2-16$

e. ¿Qué ... tiene la ecuación general $y=a\cdot b^x$?

Para problemas ... del ...

a. Completa ... cuadrado (si es necesario) encuentra el centro, dibuja las asíntotas, traza los vértices, después dibuja la gráfica

b. Calcula el radio focal y traza los focos.

1. ... $6y$ ... $96y-444=0$
2. $4x^2-9y^2+16x+108y-344=0$
3. ... $-9y^2+30$ ... $126y+684=0$
4. $4x^2-36y^2-40x+216y-80=0$
5. ... y^2+4x+1 ... $=0$
6. $x^2-y^2-4x-8y+796=0$
7. $9x^2-y^2-90x+4$ ... $+302=0$
8. $x^2-4y^2+4x+32y-96=0$

9. $9x^2-4y^2-54x-16y-79=0$
10. $25x^2-4y^2+200x-8y+796=0$
11. $16x^2-9y^2+144=0$
12. $25x^2-144y^2-3600=0$
13. $4x^2-5y^2=16$
14. $27x^2-4y^2=-36$
15. $16x^2-3y^2=-11$
16. $5x^2-7y^2=17$
17. $9x^2-y^2=0$
18. $4x^2-y^2=0$

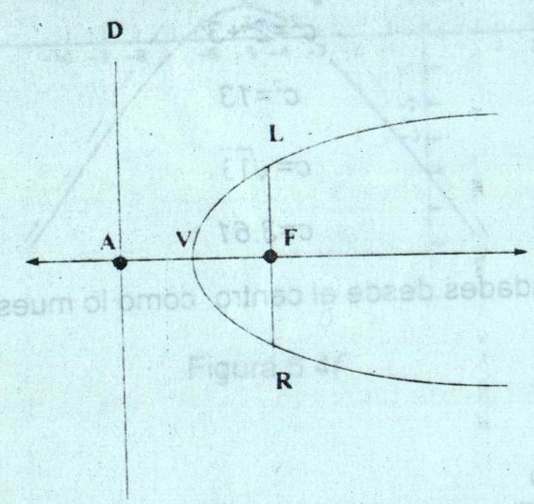
6.5 La Parábola

Objetivo

Dada la ecuación de la parábola, ser capaz de calcular el vértice, el foco y trazar la gráfica.

Definición

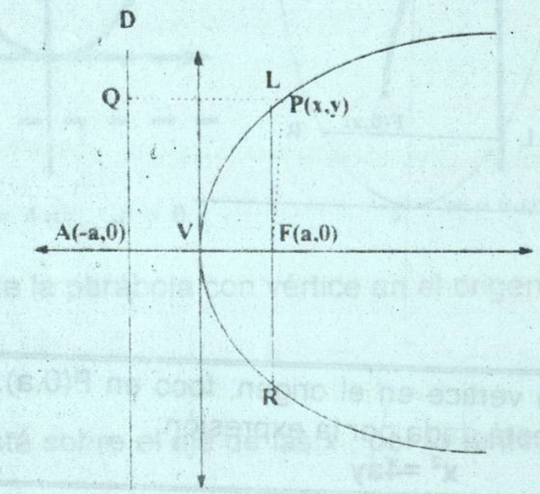
Una parábola es el conjunto de puntos en un plano que son equidistantes de un punto fijo y de una recta fija. El punto fijo F se llama foco y la recta fija D, directriz.



En la figura anterior, el punto **F** es el foco, la recta **D** es la directriz, y el punto **V** está a la mitad entre el foco y la directriz, es decir: $\overline{AV} = \overline{VF}$. El punto **V** se llama vértice y es el punto donde la parábola biseca a la recta AF, por esta razón es el eje de la parábola y se dice que la parábola es simétrica con respecto a su eje.
El segmento de recta $\overline{LR}$ es perpendicular a la recta AF y pasa por el foco, este segmento recibe el nombre de **lado recto.**
La recta AF biseca perpendicularmente al lado recto, es decir, $\overline{LF} = \overline{FR}$. A la recta AF que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz se le llama **eje de la parábola** o **eje focal**

Ecuación de la parábola con vértice en el origen.

Sean las coordenadas del vértice V(0,0); y del foco F(a,0), con a>0. Por lo tanto el eje de la parábola coincide con el eje de las x y la gráfica se abre hacia la derecha.



De acuerdo con la definición de la parábola $\overline{PF} = \overline{PQ}$, de donde resulta:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2} = \overline{PQ}$$
$$\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2} = x+a$$
$$\sqrt{x^2-2ax+a^2+y^2} = x+a$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación, tenemos:

$$x^2-2ax+a^2+y^2 = (x+a)^2$$
$$x^2-2ax+a^2+y^2 = x^2+2ax+a^2$$
$$y^2 = x^2+2ax+a^2-x^2+2ax-a^2$$
$$y^2 = 4ax$$

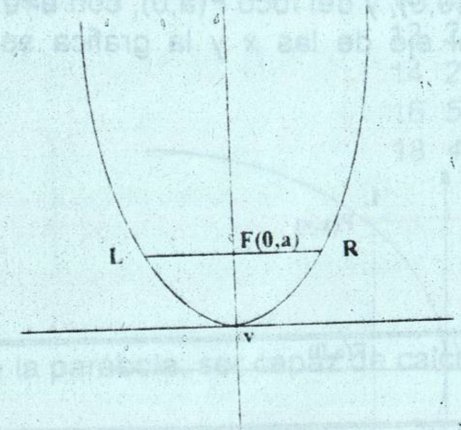
La ecuación de la parábola con vértice en el origen, eje de la parábola horizontal sobre el eje x, con a>0 está dada por:

$$y^2 = 4ax$$

En forma semejante podemos demostrar que si a<0, es decir la gráfica se abre hacia la izquierda, la ecuación de la parábola está dada por la expresión:

$$\boxed{y^2 = -4ax}$$

En el análisis anterior el foco se colocó sobre el eje de las *x*; ahora si el foco se coloca sobre el eje *y*, se intercambian los papeles de *x* y *y* , es decir, $x^2 = \pm 4ay$



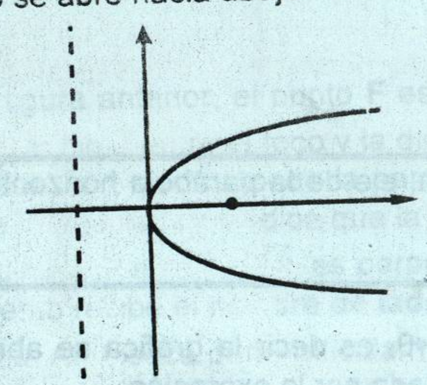
La ecuación de la parábola con vértice en el origen, foco en F(0,a), a>0 y el eje focal coincide con el eje *y* a>0, está dada por la expresión:
$$x^2 = 4ay$$

Análogamente si a<0, la ecuación es: $x^2 = -4ay$

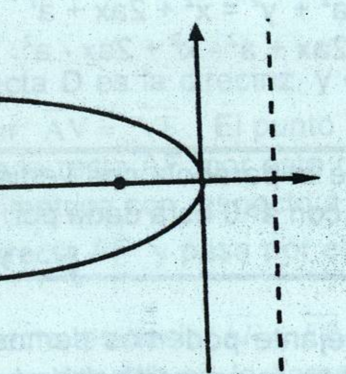
La ecuación de la parábola con vértice en el origen, foco en F(0,a), a<0 y el eje focal sobre el eje *y*, está dada por la expresión:
$$x^2 = -4ay$$

Concluyendo:

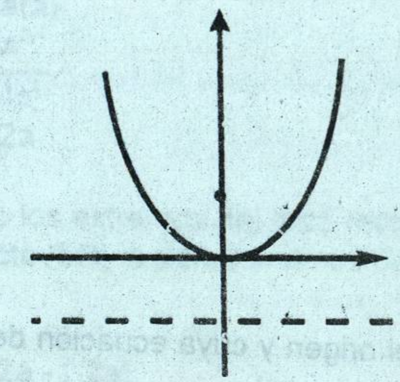
1) Si a es positivo, la parábola se abre hacia la derecha si el término cuadrático es y^2; o se abre hacia arriba si el término cuadrático si es x^2.
2) Si a es negativo, la parábola se abre hacia la izquierda si el término cuadrático es y^2, o se abre hacia abajo si es x^2.



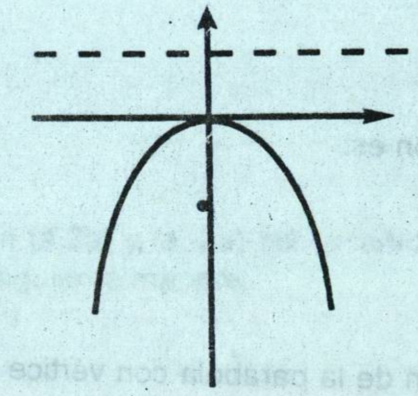
$y^2 = 4ax, \quad a > 0$



$y^2 = -4ax, \quad a < 0$



$x^2 = 4ay, \quad a > 0$



$x^2 = -4ay, \quad a < 0$

Ejemplo 1.
Encontrar la ecuación de la parábola con vértice en el origen y el foco en (4,0)

Solución:

El eje de la parábola está sobre el eje de las *x* , por lo tanto la ecuación será de la forma:

$y^2 = 4ax$, donde a = 4
$y^2 = 4(4)x$
$y^2 = 16x$

Ejemplo 2.
Encuentra la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco en (0,6).

Solución:

El eje de la parábola está sobre el eje *y* , por lo tanto la ecuación será de la forma:

$x^2 = 4ay$, donde a = 6
$x^2 = 4(6)y$
$x^2 = 24y$

Ejemplo 3.
Encuentra la ecuación de la parábola con vértice en el origen, su eje sobre el eje *x* y pasa por el punto (-3,6).

Solución:

Como el eje focal está sobre el eje *x* , la ecuación será de la forma: $y^2 = 4ax$
Como pasa por el punto (-3,6), utilizamos este punto para encontrar el valor de a.

$y^2 = 4ax$
$6^2 = 4a(-3)$
$36 = -12a$

$$a = \frac{36}{-12}$$

$a = -3$

Por lo tanto la ecuación es:

$y^2 = 4ax$

$y^2 = 4(-3)x$

$y^2 = -12x$

Ejemplo 4.

Encuentra la ecuación de la parábola con vértice en el origen y cuya ecuación de la directriz es $x + 4 = 0$

Solución:

$x + 4 = 0$, de donde resulta que $x = -4$. Como la distancia no dirigida de la directriz al vértice de la parábola es igual a la que hay del vértice al foco, entonces $a = 4$; por lo tanto:

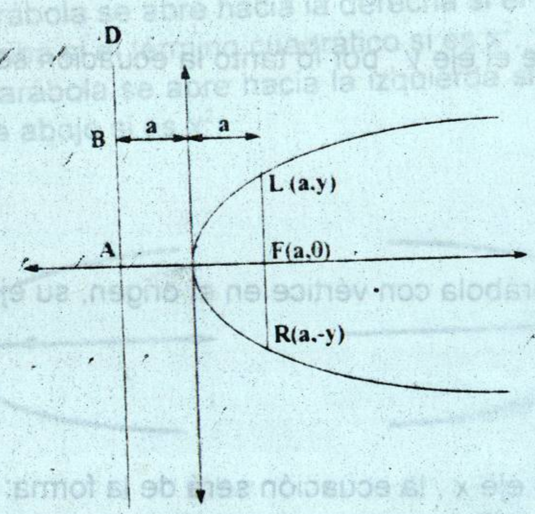
$y^2 = 4ax$

$y^2 = 4(4)x$

$y^2 = 16x$

Longitud del lado recto de la parábola

La longitud del lado recto es igual a cuatro veces la distancia del vétice al foco, es decir $\overline{LR} = 4a$ si $a > 0$, como lo vamos a demostrar a continuación.



La ecuación de la parábola con vértice en el origen, con eje focal sobre el eje x como lo hemos visto es:

$y^2 = 4ax$

Si $x = a$, tenemos:

$y^2 = 4a(a)$

$y^2 = 4a^2$

$y = \sqrt{4a^2}$

$y = \pm 2a$

Por lo tanto los extremos del lado recto son $(a,2a)$ y $(a,-2a)$ por lo tanto la longitud del lado recto (LR) la determinamos de la siguiente manera:

$LR = y_2 - y_1$

$LR = 2a - (-2a)$

donde

$LR = 2a + 2a$

$LR = 4a$

La longitud del lado recto es igual a 4 veces la distancia del vértice al foco. **LR =** $\lvert 4a \rvert$

Ejemplo 5.

Dada la ecuación de la parábola: $y^2 = -16x$, encuentra:

a) La longitud del lado recto

b) Las coordenadas del foco

c) La ecuación de la directriz.

Solución:

La ecuación es de la forma $y^2 = 4ax$, por lo tanto

a)

$LR = \lvert 4a \rvert$

$LR = \lvert -16 \rvert$

$LR = 16$

b)

$y^2 = 4ax$

$4ax = -16x$

$4a = -16$

$a = -16/4$

$a = -4$

Por lo tanto, las coordenadas del foco son: $(-4,0)$

c) La ecuación de la directriz es de la forma

$x + a = 0$, por lo tanto

$x - 4 = 0$ ó $x = 4$