**Ejemplo 6.**

Hallar: a) la longitud del lado recto, b) las coordenadas del foco y c) la ecuación de la directriz de la parábola; $x^2 = 8y$

**Solución:**

a) Lado recto. La ecuación es de la forma $x^2 = 4ay$

Por lo tanto $4a = 8$, de donde

$LR = |8| = 8$

b) Coordenadas del foco.

$4a = 8$, de donde $a = 8/4 = 2$

Por lo tanto las coordenadas del foco son (0,2)

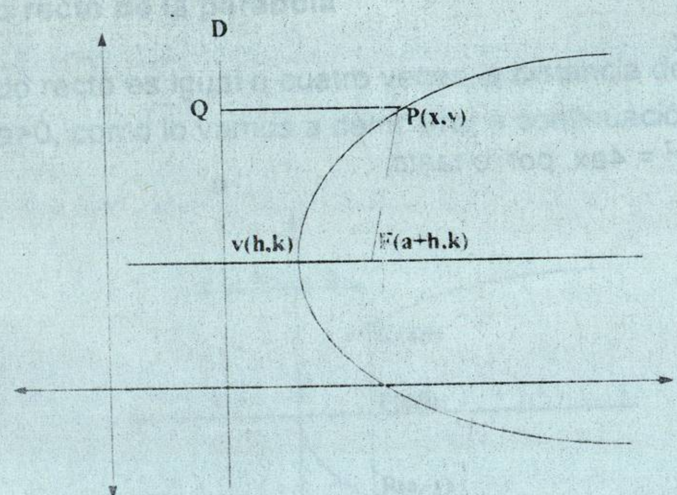
c) Ecuación de la directriz.

$y + a = 0$

$y + 2 = 0$

## Ecuación de la parábola con vértice (h,k) y eje paralelo a un eje coordenado

Consideremos ahora que el vértice de la parábola es cualquier punto (h,k) y su eje paralelo sea el eje *x*.




Consideremos la parábola de la figura anterior con vértice (h,k), eje focal paralelo al eje x y cuyo foco a una distancia *a* del vértice y a la derecha de el, directriz D y a una distancia de *a* a la izquierda del vértice, es decir, la distancia de la directriz al foco es $|2a|$. La ecuación de la directriz es: $x - h + a = 0$

Sea el punto p(x,y) un punto cualquiera de la parábola.

De acuerdo con la definición de la parábola, $\overline{PF} = \overline{PQ}$





## Forma general de la ecuación de la parábola

Si en las ecuaciones: $(y-k)^2 = 4a(x-h)$, $(x-h)^2 = 4a(y-k)$, elevamos al cuadrado los binomios que se nos indican y se simplifica la expresión algebraica obtenida, obtendremos la ecuación de la forma:

$$\boxed{\begin{array}{c} y^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ x^2 + Dx + Ey + F = 0 \end{array}}$$

Al escribir así las ecuaciones de una parábola, decimos que las ecuaciones están expresadas en su **forma general**. Mientras si están escritas en la forma: $(y-k)^2=4(x-h)$ ó $(x-h)^2 = 4a(y-k)$ decimos que están escritas en la **forma reducida**.

**Ejemplo 1.**

Encuentra la ecuación de la parábola con vértice (-4,-1) y foco (-4,-3). En sus dos formas: reducida y general.

**Solución:**

El foco está por debajo del vértice, por lo tanto la parábola se abre hacia abajo, el eje focal es paralelo al eje *y*. La ecuación de la parábola está dada por la expresión:

$(x-h)^2 = 4a(y-k)$

$(x+4)^2 = 4a(y+1)$

$a = \overline{VF}$

$a = -3-(-1)$

$a = -3+1$

$a = -2$

$(x+4)^2 = 4(-2)(y+1)$

Ecuación en forma reducida:

$(x+4)^2 = -8(y+1)$

$x^2 + 8x + 16 = -8y - 8$

$x^2 + 8x + 16 + 8y + 8 = 0$

Ecuación en forma general:

$x^2 + 8x + 8y + 24 = 0$

## Reducción de la forma general de la ecuación de una parábola

Así como una ecuación escrita en su forma reducida la podemos escribir en su forma general, podemos también hacer lo contrario, es decir, dada una ecuación de un parábola expresada en forma general podemos obtener la ecuación en la forma reducida. Explicaremos este proceso algebraico mediante dos ejemplos.

**Ejemplo 1.**

Dada la ecuación de la parábola $y^2 - 8x - 8y + 64 = 0$ escribe la ecuación en la forma reducida, y encuentra la longitud del lado recto, las coordenadas del foco, del vértice y la ecuación de su directriz.

**Solución:**

$$y^2 - 8x - 8y + 64 = 0$$

Los términos -8x y 64 pasémoslos al lado derecho de la ecuación con signo contrario.

$$y^2 - 8y = 8x - 64$$

Con la expresión de lado izquierdo formemos un trinomio cuadrado perfecto y agregar el mismo número en el lado derecho de la ecuación, para obtener una ecuación equivalente.

$$y^2 - 8y + (-8/2)^2 = 8x - 64 + (-8/2)^2$$
$$y^2 - 8y + 16 = 8x - 64 + 16$$
$$y^2 - 8y + 16 = 8x - 48$$

Un trinomio cuadrado perfecto es igual a un binomio al cuadrado, por lo tanto, si factorizamos en ambos lados de la ecuación, nos queda como

$$(y-4)^2 = 8(x-6)$$

Que es la ecuación de la parábola en su forma reducida.
Al comparar la ecuación $(y-4)^2 = 8(x-6)$ con $(y-k)^2 = 4a(x-h)$ podemos determinar lo siguiente :

Longitud del lado recto

$LR = 4a$
$LR = 8$

Coordenadas del vértice

$V(h,k) = V(6,4)$





Coordenadas del foco

$F(a+h,k)$
$4a = 8$
$a = 8/4$
$a = 2$

$a+h = 2+6,$
$a + h = 8$

Por lo tanto las coordenadas del foco son

$F(8,4)$

Ecuación de la directriz:

$x-h+a = 0$
$x = h-a$
$x = 6-2$
$x = 4$

**Ejemplo 2.**

Dada la ecuación de la parábola $x^2 + 4x + 16y + 4 = 0$, escríbela en forma reducida y además encuentra:
a) La longitud del lado recto
b) Las coordenadas del vértice
c) Las coordenadas del foco
d) La ecuación de la directriz

**Solución:**

$$x^2 + 4x = -16y - 4$$
$$x^2 + 4x + (4/2)^2 = -16y - 4 + (4/2)^2$$
$$x^2 + 4x + 4 = -16y - 4 + 4$$
$$x^2 + 4x + 4 = -16y$$
$$(x+2)^2 = -16y$$

Por analogía con la ecuación reducida resulta:

a) Longitud del lado recto
$LR = |-16| = 16$
b) Coordenadas del vértice

$V(h,k)$
$V(-2,0)$

c) Coordenadas del foco

F(h,a+k)

donde

4a = -16

a = -16/4 = -4

de donde a + k = -4 + 0 = -4

Por lo que

F(-2,-4)

d) Ecuación de la directriz

y = k-a

y = 0 - (-4)

y= 4

**Ejercicio 6.5**

En los ejercicios 1 al 10 encuentra: a) La longitud del lado recto, b) las coordenadas del foco y c) la ecuación de la directriz. Para cada una de las parábolas que se indican.

1) $y^2 = 16x$
2) $y^2 = -16x$
3) $y^2 = 4x$
4) $3y^2 = 16x$
5) $y^2 = 8x$
6) $y^2 = -2x$
7) $y^2 = 24x$
8) $x^2 = 4y$
9) $x^2 = -6y$
10) $x^2 = 8y$

En los ejercicios 11 al 30, encuentra la ecuación de la parábola con vértice en el origen y que satisface las condiciones dadas.

11) Foco en (4,0)
12) Foco en (3,0)
13) Foco en (0,0)
14) Foco en (0,3)
15) Foco en (-4,0)
16) Foco en (0,-5)
17) Directriz x = 5
18) Directriz y =-2
19) Directriz x = -4





20) La longitud del lado recto es 10 y se abre hacia la derecha
21) La longitud del lado recto es 16 y se abre hacia abajo
22) La longitud del lado recto es 20 y se abre hacia la izquierda
23) La longitud del lado recto es 12 y se abre hacia arriba
24) Para el punto (-3,6), su eje focal se encuentra sobre el eje *x*.
25) El foco está sobre el eje *x* y la parábola pasa por el punto (3,4)
26) La parábola pasa por el punto (-3,4) y su eje focal está sobre el eje *x*.
27) La parábola pasa por el punto (6,-3) y su foco está sobre el eje *y*
28) Su foco está sobre el eje *y* y la parábola pasa por el punto (2,3)
29) Su foco está sobre el eje *x* y la parábola pasa por el punto (2,-3)
30) Su foco está sobre el eje *y* y la parábola pasa por el punto (-3,-9)

En los ejercicios del 31 al 38 encuentra la ecuación de la parábola con los datos que se te indican. Escribe la ecuación en la forma general.

31) Foco en (-3,2) y Vértice en V(-3,-5)
32) Foco en (3,-8) y Vértice en V(3,-2)
33) Foco en (-1,0) y Vértice en V(-1,-4)
34) Foco en (-5,5) y Vértice en V(-5,8)
35) Foco en (-2,2) y Vértice en V(2,2)
36) Foco en (4,2) y Vértice en V(0,2)
37) Foco en (6,-2) y Vértice en V(4,-2)
38) Foco en (2,-3) y Vértice en V(4,-3)

En los ejercicios 39 al 48 expresa cada ecuación de la parábola en su forma reducida y encuentra: a) La longitud del lado recto, b) las coordenadas del vértice, c) las coordenadas del foco y d) la ecuación de la directriz.

39) $y^2 - 4y + 8x - 28 = 0$
40) $y^2 + 8y + 6x + 16 = 0$
41) $y^2 + 20x + 2y - 39 = 0$
42) $y^2 - 8x - 8y + 64 = 0$
43) $y^2 - 6x - 4y + 22 = 0$
44) $x^2 - 6x - 12y - 15 = 0$
45) $x^2 + 8y - 4x - 36 = 0$
46) $2x^2 + 2x - 3y + 1 = 0$
47) $x^2 - 8x - 6y - 8 = =$
48) $x^2 - 6x - y + 5 = 0$