

3.- Medir con un transportador la deformación en grados y transformarla a Radianes (1 Rad = 57.3°).

Con esto se conocerían:

F = Fuerza aplicada para la torsión (N).

R = Radio de aplicación de la fuerza (m).

τ = Par aplicado al sistema (N-m).

$$\tau = F R$$

θ = Deformación angular (Rad).

Pudiéndose determinar K_T como:

$$K_T = \frac{\tau}{\theta} \left[\text{en } \frac{N \cdot m}{\text{Rad}} \right]$$

REPORTE.

- 1.- Resumen histórico de los sistemas de unidades.
- 2.- Elaborar con sus respectivos diagramas o dibujos, tabulación de las diferentes medidas obtenidas en el desarrollo de la práctica.

BIBLIOGRAFIA.

- * FUNDAMENTOS DE FISICA
Halliday - Resnick
C.E.C.S.A.
- * MECANICA DE LAS VIBRACIONES
J. P. Den Hartog
C.E.C.S.A.

PRACTICA II MOMENTOS DE INERCIA

OBJETIVO.

El alumno determinará los centros de gravedad, los momentos de inercia de área y los momentos de inercia de masa de diferentes cuerpos usando métodos analíticos y experimentales.

INTRODUCCION.

Tanto en el diseño como en el estudio de las vibraciones de una máquina o estructura se requiere conocer la ubicación del centro de gravedad, así como, los momentos de inercia de área y de masa de los elementos que la forman.

Por lo anterior el conocer los métodos para ubicar el centro de gravedad y determinar los momentos de inercia de área y de masa es de gran importancia para el ingeniero.

A continuación se describirán algunos de los métodos más utilizados.

CENTRO DE GRAVEDAD.

El centro de gravedad se define como "el punto en que puede considerarse que actúa el peso total de un objeto". La localización del centro de gravedad de un objeto dependerá de la forma de éste y de como esté distribuida su masa.

Si el objeto es simétrico en cuanto a su distribución de masa y homogéneo, el centro de gravedad estará sobre el eje de simetría. Si es simétrico en más de una coordenada, el centro de gravedad se encontrará en la intersección de los ejes de simetría.

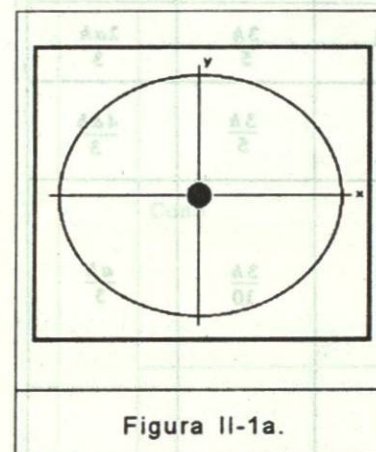


Figura II-1a.

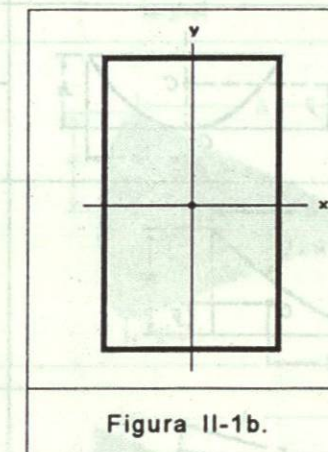


Figura II-1b.

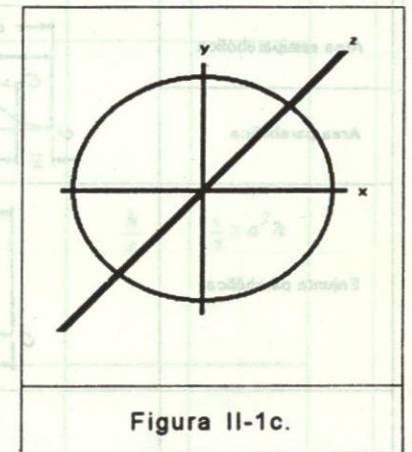


Figura II-1c.

El centro de gravedad de un cuerpo puede estar dentro o fuera de él.

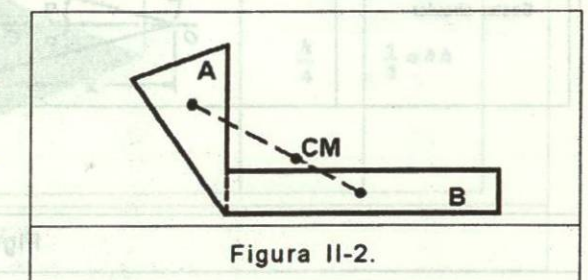


Figura II-2.

Métodos para determinar el centro de gravedad.

a).- Determinación del C.G. de cuerpos con formas simples por tabla.

Si los cuerpos a analizar tienen formas simples, la posición del centro de gravedad puede determinarse con la ayuda de tablas como las siguientes.

b).- Determinación del C.G. de cuerpos con formas compuestas dividibles en simples por método analítico.

Forma	\bar{x}	\bar{y}	Area
Area triangular		$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Un cuarto de área circular	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Area semicircular	0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Cuarto de área elíptica	$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Area semielíptica	0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Area semiparabólica	$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Area parabólica	0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Enjuta parabólica	$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Sector circular	$\frac{2r \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}$	0	ar^2

Figura II-3.

Forma	\bar{x}	Volumen
Semiesfera		$\frac{3a}{8}$ $\frac{2}{3}\pi a^3$
Semielipsoide de revolución		$\frac{3h}{8}$ $\frac{2}{3}\pi a^2 h$
Paraboloide de revolución		$\frac{h}{3}$ $\frac{1}{2}\pi a^2 h$
Cono		$\frac{h}{4}$ $\frac{1}{3}\pi a^2 h$
Pirámide		$\frac{h}{4}$ $\frac{1}{3}abh$

Figura II-4.

El caso de placas planas:

Consideremos un cuerpo subdividido en áreas parciales de tal forma que el área total $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$. La ubicación del centro de gravedad se determina con las siguientes ecuaciones.

$$\bar{X} = \frac{\sum A_i \bar{X}_i}{\sum A_i}; \quad \bar{Y} = \frac{\sum A_i \bar{Y}_i}{\sum A_i}$$

EJEMPLO: Localizar el centroide C del área A mostrada en la Figura II-5.

Si seleccionamos los ejes coordenados mostrados en la Figura II-6., es evidente que el centroide debe estar localizado en el eje Y, puesto que es un eje de simetría; entonces, $\bar{X} = 0$.

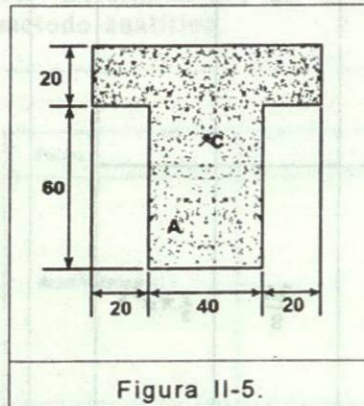


Figura II-5.

	Area mm ²	\bar{Y} mm	$A_i \bar{Y}_i$ mm ³
A1	20 x 80 = 1600	70	112 x 10 ³
A2	60 x 40 = 2400	30	72 x 10 ³
	$\sum A_i = 4000$		$\sum A_i \bar{Y}_i = 184 \times 10^3$

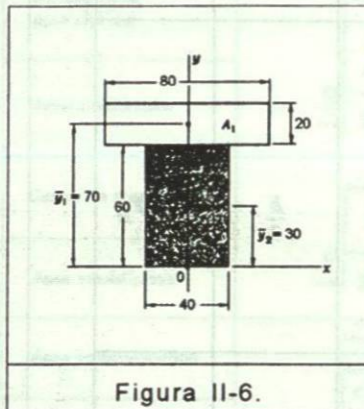


Figura II-6.

Consideremos también que el área $A = A_1 + A_2$ y usando las ecuaciones para determinar la ubicación del centroide:

$$\bar{Y} = \frac{\sum A_i \bar{Y}_i}{\sum A_i} = \frac{184 \times 10^3 \text{ mm}^3}{4 \times 10^3 \text{ mm}^2}$$

$$\bar{Y} = 46 \text{ mm}$$

El centroide (\bar{X}, \bar{Y}) está en (0,46)

Estos conceptos se pueden generalizar para volúmenes.

c).- Determinación del C.G. de cuerpos con formas complicadas, experimentalmente.

El centro de gravedad de un cuerpo rígido puede determinarse experimentalmente suspendiendo el cuerpo de dos o más puntos como se muestra en la Figura II-7.

Cuando el cuerpo se suspende de un hilo por el punto P, las condiciones de equilibrio estático requieren que $F_t = F_s$ y que las dos fuerzas tengan la misma línea de acción, de forma que el centro de gravedad estará situado justo debajo del punto P. Cuando suspendemos el objeto del punto Q, el centro de gravedad también estará debajo de éste, de forma que la posición del centro de

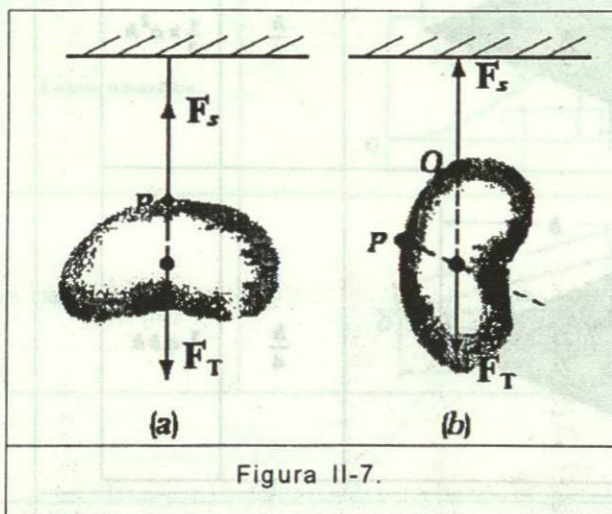


Figura II-7.

gravedad quedará determinada por la intersección de las dos líneas de acción.

MOMENTO DE INERCIA DE AREA

En muchas de las fórmulas empleadas en ingeniería, como resistencia de vigas, deformación de vigas, etc., aparecen expresiones analíticas de la forma $\int \rho^2 dA$, siendo ρ la distancia de un elemento diferencial del área dA a un eje. Las integrales de este tipo reciben el nombre genérico de MOMENTOS DE INERCIA DE AREA. Un momento de inercia de una área no tiene por sí mismo significado físico real alguno; es una mera expresión matemática que se representa en general por la letra I.

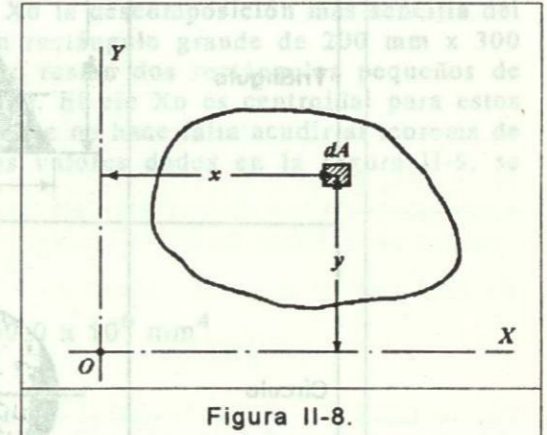


Figura II-8.

Sin embargo, junto con otras magnitudes, como en la fórmula de la flexión

$$\sigma = \frac{M c}{I}$$

o en la de la constante de elasticidad de una viga en cantilever

$$K = \frac{3EI}{L^3}$$

adquiere ya una cierta significación.

Para la Figura II-8:

$$I_x = \int y^2 dA$$

$$I_y = \int x^2 dA$$

En la Figura II-9. se muestra una tabla de los momentos de inercia de área de formas geométricas comunes.

Rectángulo		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12} b h^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12} b^3 h$ $I_x = \frac{1}{3} b h^3$ $I_y = \frac{1}{3} b^3 h$
Triángulo		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36} b h^3$ $I_x = \frac{1}{12} b h^3$
Círculo		$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4} \pi r^4$
Semicírculo		$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{8} \pi r^4$
Cuarto de círculo		$I_x = I_y = \frac{1}{16} \pi r^4$
Elipse		$\bar{I}_x = \frac{1}{4} \pi a b^3$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4} \pi a^3 b$

Figura II-9.

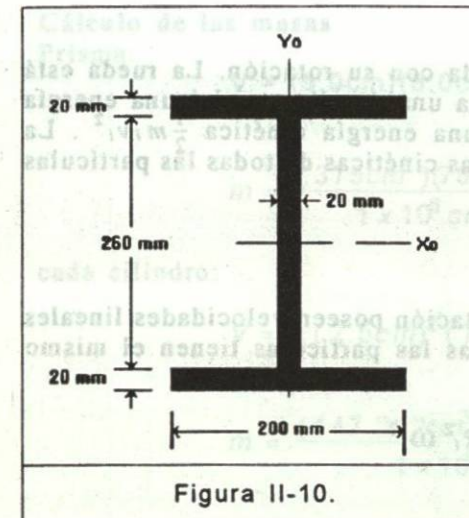


Figura II-10.

EJEMPLO:

Determinar el momento de inercia de área con respecto a los ejes X_0 y Y_0 de la sección I de ala ancha representada en la Figura II-10.

Solución: como se ha dicho, el momento de inercia de una área es la suma algebraica de los momentos de inercia de sus partes componentes (aditivas o sustractivas), con respecto al mismo eje de inercia todos ellos.

Con respecto a X_0 la descomposición más sencilla del área dada es un rectángulo grande de 200 mm x 300 mm., del cual se restan dos rectángulos pequeños de 90 mm x 260 mm. El eje X_0 es centroidal para estos rectángulos, así que no hace falta acudir al teorema de Steiner. Con los valores dados en la Figura II-9. se tiene:

Rectángulo de 200 mm x 300 mm:

$$\left[\bar{I}_x = \frac{b h^3}{12} \right]; \quad \bar{I}_x = \frac{200 (300)^3}{12} = 450.0 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Dos rectángulos de 90 mm x 260 mm:

$$\bar{I}_x = 2 \left[\frac{90 (260)^3}{12} \right] = 263.6 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Momento de inercia total respecto a X_0 :

$$\bar{I}_x = (450.0 - 263.6) \times 10^6 = 186.4 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Con respecto al eje Y_0 imaginemos la sección descompuesta en un rectángulo de 260 mm x 20 mm, más dos de 20 mm x 200 mm. El eje Y_0 también es centroidal para estos tres rectángulos. Por tanto, de acuerdo con la tabla A-1, se tiene:

$$\left[\bar{I}_y = \frac{b h^3}{12} \right] \text{ Rectángulo de 260 mm x 20 mm:}$$

$$\bar{I}_y = \frac{260 (20)^3}{12} = 0.173 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Dos rectángulos de 20 mm x 200 mm:

$$\bar{I}_y = 2 \left[\frac{20 (200)^3}{12} \right] = 26.67 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Momento de inercia total respecto a Y_0 :

$$\bar{I}_y = (0.173 + 26.67) \times 10^6 = 26.84 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

MOMENTO DE INERCIA DE MASA

Cuando gira una rueda existe una energía cinética asociada con su rotación. La rueda está formada por un gran número de pequeñas partículas y cada una de ellas tendrá una energía cinética, por ejemplo, la partícula i de masa m_i posee una energía cinética $\frac{1}{2} m_i v_i^2$. La energía cinética K de toda la rueda es la suma de las energías cinéticas de todas las partículas que la componen:

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Las partículas situadas a diferentes distancias del eje de rotación poseen velocidades lineales v_i diferentes, aunque debido a que la rueda es rígida todas las partículas tienen el mismo módulo de velocidad angular, ω .

$$\text{Si } v_i = R_i \omega \text{ entonces } K = \sum \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2$$

$$K = \frac{1}{2} \omega^2 \left(\sum m_i R_i^2 \right)$$

La expresión $\sum m_i R_i^2$ es equivalente a $\int R^2 dm$ y ya antes mencionamos que a este tipo de integral se le llama momento de inercia.

En este caso se denomina Momento de Inercia de Masa

$$J = \int R^2 dm$$

Por lo tanto $K = \frac{1}{2} J \omega^2$ que es la energía cinética rotacional.

Al comparar la expresión de la energía cinética rotacional con la expresión de la energía cinética de traslación $\frac{1}{2} m v^2$, el momento de inercia J en la rotación es análogo a la masa en la traslación y la velocidad angular ω es análoga a la velocidad v .

Por lo tanto, J es una medida de la dificultad para poner a girar o detener el giro de un cuerpo, como la masa lo es para moverlo o detenerlo en traslación.

El momento de inercia J , dependerá por lo tanto de la masa del cuerpo y de su forma.

En la Figura II-12. Se muestra una tabla de los Momentos de Inercia de Masa de formas geométricas comunes.

EJEMPLO:

Una pieza de acero forjado consiste en un prisma rectangular de 15.00cm x 5.00 cm x 5.00 cm y en 2 cilindros iguales de diámetro 5.00cm y longitud 7.62cm, como se indica en la Figura II-11. Encuéntrese los momentos de inercia de la masa con respecto a los ejes coordenados. (Densidad del acero = 7850 kg/m³).

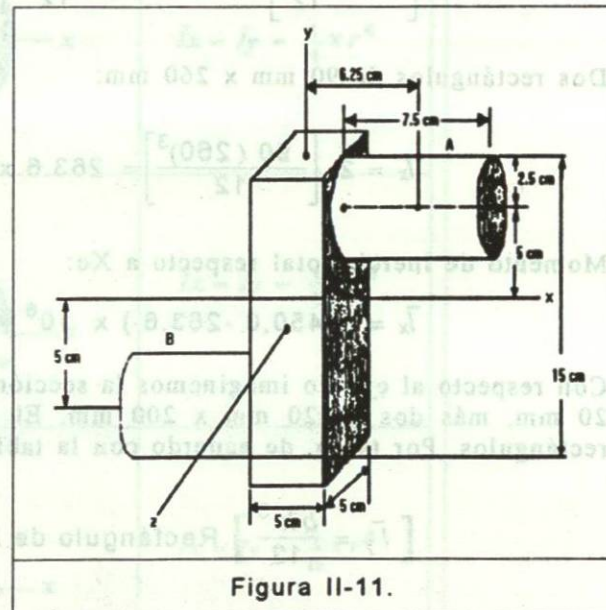


Figura II-11.

Cálculo de las masas

Prisma:

$$V = (5.0\text{cm})(5.0\text{cm})(15.0\text{cm}) = 375\text{cm}^3$$

$$m = \frac{(375\text{cm}^3)(7850\text{kg/m}^3)}{1 \times 10^6 \text{cm}^3/\text{m}^3} = 2.943\text{kg}$$

cada cilindro:

$$V = \pi (2.5\text{cm})^2 (7.5\text{cm}) = 147.262\text{cm}^3$$

$$m = \frac{(147.262\text{cm}^3)(7850\text{kg/m}^3)}{1 \times 10^6 \text{cm}^3/\text{m}^3} = 1.156\text{kg}$$

Momentos de inercia de la masa. Los momentos de inercia de la masa de cada componente se calculan para la Figura II-11. utilizando el teorema de los ejes paralelos cuando se requiera. Nótese que todas las longitudes deben estar expresadas en metros.

Prisma:

$$J_x = J_z = \frac{1}{12} (2.943\text{kg}) \left[\left(\frac{15}{100} \text{m} \right)^2 + \left(\frac{5}{100} \text{m} \right)^2 \right] = 6.13125 \times 10^{-3} \text{kg-m}^2$$

$$J_y = \frac{1}{12} (2.943\text{kg}) \left[\left(\frac{5}{100} \text{m} \right)^2 + \left(\frac{5}{100} \text{m} \right)^2 \right] = 1.22625 \times 10^{-3} \text{kg-m}^2$$

Cada cilindro:

$$J_x = \frac{1}{2} m a^2 + m \bar{y}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} (1.156\text{kg}) \left(\frac{2.5}{100} \text{m} \right)^2 + (1.156\text{kg}) \left(\frac{5}{100} \text{m} \right)^2 = 3.25125 \times 10^{-3} \text{kg-m}^2$$

$$J_y = \frac{1}{12} m (3a^2 + L^2) + m \bar{x}^2 =$$

$$= \frac{1}{12} (1.156\text{kg}) \left[3 \left(\frac{2.5}{100} \text{m} \right)^2 + \left(\frac{7.5}{100} \text{m} \right)^2 \right] + (1.156\text{kg}) \left(\frac{6.25}{100} \text{m} \right)^2 =$$

$$= 5.2381 \times 10^{-3} \text{kg-m}^2$$

$$J_z = \frac{1}{12} m (3a^2 + L^2) + m (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) =$$

$$= \frac{1}{12} (1.156\text{kg}) \left[3 \left(\frac{2.5}{100} \text{m} \right)^2 + \left(\frac{7.5}{100} \text{m} \right)^2 \right] + (1.156\text{kg})$$

$$\left[\left(\frac{6.25}{100} \text{m} \right)^2 + \left(\frac{5}{100} \text{m} \right)^2 \right] =$$

$$= 8.1281 \times 10^{-3} \text{kg-m}^2$$

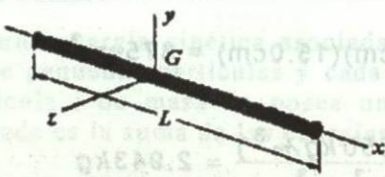
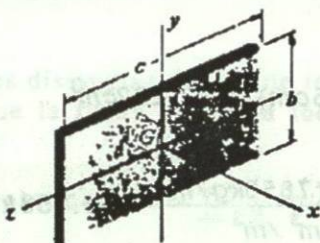
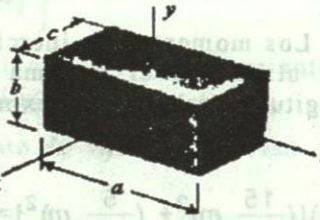
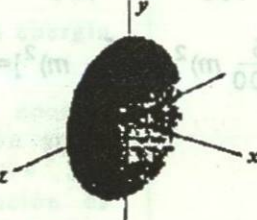

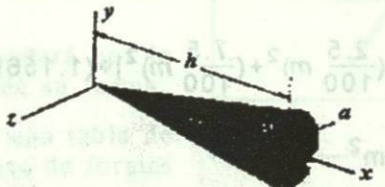
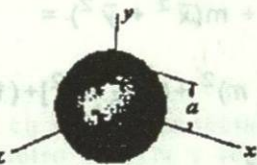
Varilla		$I_y = I_z = \frac{1}{12} mL^2$
Placa rectangular delgada		$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12} mc^2$ $I_z = \frac{1}{12} mb^2$
Prisma Rectangular		$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12} m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$
Disco delgado		$I_x = \frac{1}{2} mr^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4} mr^2$
Cilindro circular		$I_x = \frac{1}{2} ma^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12} m(3a^2 + L^2)$
Cono circular		$I_x = \frac{3}{10} ma^2$ $I_y = I_z = \frac{3}{8} m(\frac{1}{4}a^2 + h^2)$
Esfera		$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} ma^2$

Figura II-12.- Momentos de inercia de la masa de formas geométricas comunes.

Cuerpo completo: Sumando los valores obtenidos,

$$J_x = 6.1312 \times 10^{-3} \text{kg-m}^2 + 2(3.2512 \times 10^{-3} \text{kg-m}^2) = 0.0126336 \text{kg-m}^2$$

$$J_y = 1.2262 \times 10^{-3} \text{kg-m}^2 + 2(5.2381 \times 10^{-3} \text{kg-m}^2) = 0.0117024 \text{kg-m}^2$$

$$J_z = 6.1312 \times 10^{-3} \text{kg-m}^2 + 2(8.1281 \times 10^{-3} \text{kg-m}^2) = 0.0223874 \text{kg-m}^2$$

TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS

El cálculo del momento de inercia de una área o de una masa respecto a un eje que no sea un eje de simetría puede ser muy complicado, pero afortunadamente existe un teorema de fácil aplicación que ayuda a encontrarlo y es llamado TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS. Este teorema proporciona una relación entre el momento de inercia, I_p ó J_p respecto a un eje que pase por un punto arbitrario P y el momento de inercia respecto a otro eje paralelo que pase por el centro de gravedad del área o de la masa.

Teorema de los Ejes Paralelos para Momentos de Inercia de Área:

$$I_p = I_{c.g.} + Ad^2$$

Teorema de los Ejes Paralelos para Momentos de Inercia de Masa:

$$J_p = J_{c.g.} + md^2$$

Para las dos expresiones anteriores d es la distancia entre el eje respecto a el cual se desea calcular el momento de inercia y un eje paralelo que pasa por el centro de gravedad.

EQUIPO A UTILIZAR.

- 1.- Sistema de pedestal y placas de diferentes formas.
- 2.- Flecha de rotor.
- 3.- Regla para medición de longitudes.
- 4.- Balanza.

PROCEDIMIENTO.

A) Obtención del Centro de Gravedad.

El alumno encontrará el centro de gravedad de las placas proporcionadas por su instructor, utilizando el concepto de intersección de ejes de simetría en figuras simples simétricas y el método práctico en las figuras compuestas.

B) Obtención del Momento de Inercia de Área.

El alumno determinará el momento de inercia de área de las placas proporcionadas por su instructor, respecto al eje que éste le indique, utilizando la tabla de momentos de inercia de área para figuras comunes, teorema de los ejes paralelos y método de cálculo para figuras compuestas.

C) Obtención del Momento de Inercia de Masa.
El alumno determinará el momento de inercia de masa de las placas proporcionadas por su instructor, respecto al eje que éste le indique utilizando la tabla de momentos de inercia de masa de formas geométricas comunes, el teorema de los ejes paralelos y el método para figuras compuestas.

REPORTE

- 1.- Elabore tabulación en la cual muestre las figuras para las cuales determinó el centro de gravedad y las coordenadas obtenidas para éste, indicando el método utilizado para su cálculo.
Determine analíticamente las coordenadas del centro de gravedad de la placa en forma de "T".
- 2.- Elabore tabulación en la cual muestre las figuras para las cuales determinó el momento de inercia de área y los valores obtenidos para éste, indicando el método utilizado para su cálculo.
- 3.- Elabore tabulación en la cual muestre las figuras para las cuales determinó el momento de inercia de masa y los valores obtenidos, indicando el método utilizado para su cálculo.

BIBLIOGRAFIA

- * MECANICA VECTORIAL PARA INGENIEROS, DINAMICA.
Ferdinand P. Beer y E. Russell Johnston J.
Mc. Graw Hill.
- * MECANICA VECTORIAL PARA INGENIEROS, ESTATICA.
Ferdinand P. Beer y E. Russell Johnston J.
Mc. Graw Hill.
- * FISICA CLASICA Y MODERNA
W. Edward Gettys, Frederick J. Keller y Malcolm J. Skove.
Mc. Graw Hill.

PRACTICA III DETERMINACION DE FRECUENCIAS NATURALES

OBJETIVO.

Determinar experimentalmente la frecuencia natural de diferentes modelos de sistemas vibratorios, y a partir de ésta determinar los momentos de inercia de masa respecto a sus centros de giro y gravedad, y las constantes de elasticidad.

INTRODUCCION.

Existen sistemas vibratorios en los cuales se dificulta el cálculo teórico de alguno de los parámetros involucrados en la obtención de su frecuencia natural, por lo cual esta última se tiene que determinar mediante algún procedimiento experimental.

Si por el contrario, lo que requerimos es el valor de alguno de los parámetros involucrados, tales como, la constante de elasticidad de un resorte torsional o el momento de inercia respecto al centro de gravedad en un péndulo compuesto, éstos son fácilmente calculables si utilizamos la frecuencia natural del sistema determinada prácticamente.

Es conveniente por lo tanto que el alumno se familiarice con los métodos utilizados para obtener dichos parámetros experimentalmente.

EQUIPO A UTILIZAR.

- 1.-Modelos de sistemas vibratorios:
 - * Masa- resorte.
 - * Péndulo simple.
 - * Péndulo compuesto.
 - * Sistema aro-rodillo.
 - * Péndulo torsional.
- 2.-Cronómetro.
- 3.-Balanza de precisión.
- 4.-Escalímetro.

PROCEDIMIENTO.

A) Medición de Frecuencias Naturales.

Obtenga prácticamente las frecuencias naturales de los modelos proporcionados por su instructor. Para lo anterior deberá sacar al sistema de equilibrio, dejarlo en libertad y medir con la ayuda de un cronómetro el tiempo utilizado en desarrollar un cierto número de oscilaciones (ciclos) completas. Dividiendo el número de ciclos entre el tiempo consumido en éstos, obtendrá la frecuencia natural del sistema.

$$f_n = \frac{\text{ciclos}}{\text{seg}} = (\text{Hertz})$$