C) Obtención del Momento de Inercia de Masa.

El alumno determinará el momento de inercia de masa de las placas proporcionadas por su instructor, respecto al eje que éste le indique utilizando la tabla de momentos de inercia de masa de formas geométricas comunes, el teorema de los ejes paralelos y el método para figuras compuestas.

REPORTE

1.- Elabore **tabulación en la cual muestre las figuras para las cuales determinó el centro de gravedad y las coordenadas obtenidas para éste, indicando el método utilizado para su cálculo.**

Determine analíticamente las coordenadas del centro de gravedad de la placa en forma de " T ".

2.- Elabore **tabulación en la cual muestre las figuras para las cuales determinó el momento de inercia de área y los valores obtenidos para éste, indicando el método utilizado para su cálculo.**

3.- Elabore **tabulación en la cual muestre las figuras para las cuales determinó el momento de inercia de masa y los valores obtenidos, indicando el método utilizado para su cálculo.**

BIBLIOGRAFIA

* MECANICA VECTORIAL PARA INGENIEROS, DINAMICA.
  Ferdinand P. Beer y E. Russell Johnston J.
  Mc. Graw Hill.

* MECANICA VECTORIAL PARA INGENIEROS, ESTATICA.
  Ferdinand P. Beer y E. Russell Johnston J.
  Mc. Graw Hill.

* FISICA CLASICA Y MODERNA
  W. Edward Gettys, Frederick J. Keller y Malcolm J. Skove.
  Mc. Graw Hill.

PRACTICA III
DETERMINACION DE FRECUENCIAS NATURALES

OBJETIVO.

Determinar experimentalmente la frecuencia natural de diferentes modelos de sistemas vibratorios, y a partir de ésta determinar los momentos de inercia de masa respecto a sus centros de giro y gravedad, y las constantes de elasticidad.

INTRODUCCION.

Existen sistemas vibratorios en los cuales se dificulta el cálculo teórico de alguno de los parámetros involucrados en la obtención de su frecuencia natural, por lo cual esta última se tiene que determinar mediante algún procedimiento experimental.

Si por el contrario, lo que requerimos es el valor de alguno de los parámetros involucrados, tales como, la constante de elasticidad de un resorte torsional o el momento de inercia respecto al centro de gravedad en un péndulo compuesto, éstos son facilmente calculables si utilizamos la frecuencia natural del sistema determinada prácticamente.

Es conveniente por lo tanto que el alumno se familiarice con los métodos utilizados para obtener dichos parámetros experimentalmente.

EQUIPO A UTILIZAR.

1.-Modelos de sistemas vibratorios:
* Masa- resorte.
* Péndulo simple.
* Péndulo compuesto.
* Sistema aro-rodillo.
* Péndulo torsional.

2.-Cronómetro.

3.-Balanza de precisión.

4.-Escalímetro.

PROCEDIMIENTO.

A) Medición de Frecuencias Naturales.

Obtenga prácticamente las frecuencias naturales de los modelos proporcionados por su instructor. Para lo anterior deberá sacar al sistema de equilibrio, dejarlo en libertad y medir con la ayuda de un cronómetro el tiempo utilizado en desarrollar un cierto número de oscilaciones (ciclos) completas. Dividiendo el número de ciclos entre el tiempo consumido en éstos, obtendrá la frecuencia natural del sistema.

$$f_n = \frac{ciclos}{seg} = (\text{Hertz})$$

Compruebe teóricamente con ayuda de fórmulas para frecuencias naturales y tabla de momentos de inercia de masa, las frecuencias obtenidas en cada caso.

B) Cálculo de Momentos de Inercia de Masa.

Obtenga prácticamente la frecuencia natural de los modelos proporcionados por su instructor. Determine la localización del centro de gravedad de cada uno de los modelos y mida la distancia "r" entre el centro de gravedad (c.g.) y el pivote. Mida la masa del sistema. Mediante la ecuación para el cálculo de la frecuencia natural de un péndulo compuesto, obtenga con la ayuda de la frecuencia medida prácticamente, el momento de inercia de masa con respecto al pivote (Jp)

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgr}{J_p}}$$

Utilizando el teorema de los ejes paralelos, calcule el momento de inercia respecto al centro de gravedad para cada uno de los sistemas.

$$J_p = J_{C.G.} + mr^2$$

C) Cálculo de Constante Elástica de Torsión (K_T) en un péndulo torsional.

Obtenga prácticamente la frecuencia natural del péndulo torsional. Mida la masa del péndulo y calcule su momento de inercia de masa. Mediante la ecuación para calcular la frecuencia natural del péndulo torsional, determine la constante elástica torsional del resorte.

$$fn = f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_T}{J_p}}$$

D) Cálculo de Constante Elástica (K) en un Sistema Masa-Resorte.

Obtenga prácticamente la frecuencia natural del sistema m - k proporcionado por su instructor. Mida la masa del sistema. Con la ecuación correspondiente a la frecuencia natural, obtenga la constante de elasticidad del sistema.

$$fn = f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

REPORTE.

1.- Elabore una tabla en la cual muestre en una columna un dibujo ó diagrama de cada uno de los modelos analizados, con sus dimensiones y datos utilizados; en una segunda columna la frecuencia natural obtenida prácticamente y en una tercera columna la frecuencia natural calculada teóricamente.

Formato para la elaboración de la tabla:

MODELO	fn PRACTICA	fn TEORICA

2.- Elabore una tabla en la cual muestre en una columna un dibujo o diagrama de cada uno de los modelos analizados con sus respectivos datos; en una segunda columna la frecuencia natural medida prácticamente; en una tercera columna el momento de inercia de masa respecto al pivote Jp obtenido experimentalmente y en una cuarta columna el momento de inercia de masa respecto al centro de gravedad calculado con el teorema de los ejes paralelos.

Formato para la elaboración de la tabla:

MODELO	fn PRACTICA	J_p	$J_{C.G.}$

3.- Elabore un dibujo del péndulo torsional que incluya datos involucrados en los cálculos. Indique la frecuencia natural obtenida prácticamente y la constante elástica torsional calculada.

4.- Elabore un dibujo del sistema masa-resorte incluyendo los datos pertinentes. Indique la ecuación utilizada y el resultado obtenido al calcular la constante de elasticidad del resorte.

BIBLIOGRAFIA.

* FISICA
R. A. Serway
Interamericana.

* INTRODUCCION AL ESTUDIO DE LAS VIBRACIONES MECANICAS
Robert F. Steidel Jr.
CECSA.

* VIBRACIONES MECANICAS.
W. W. Seto.
Mc. Graw Hill, Serie Schaum.

PRACTICA IV
VELOCIDADES CRITICAS

OBJETIVO.

Determinar teórica y experimentalmente las velocidades críticas o de resonancia de un sistema rotatorio formado por una flecha con 2 discos.

INTRODUCCION.

El movimiento más común en maquinaria es el movimiento rotativo, y todo sistema en rotación contiene masa y elasticidad (rotor-flecha). Esta combinación origina que el sistema tenga una o varias frecuencias naturales, por lo que existe la posibilidad de que la velocidad de trabajo coincida con una de estas frecuencias y se presente el fenómeno de la resonancia.

La resonancia en sistemas rotativos se conoce como "Velocidad Crítica" y se define como la condición en que la velocidad de giro del sistema se iguala a la frecuencia natural del mismo.

Las consecuencias del fenómeno de la resonancia son la generación de severas vibraciones mecánicas, con la consecuente probabilidad de falla en baleros, chumaceras, anclaje, flechas (fatiga), etc.

Por lo antes mencionado la determinación de las velocidades críticas tiene gran importancia en el diseño de turbinas, ejes con engranes o rotores de motor.

VELOCIDADES CRITICAS.

Considere un disco de masa m sobre una flecha que gira sobre 2 apoyos, con velocidad constante ω, como se ve en la Figura IV-1. Suponga que el centro de gravedad (C.G.) del disco, se encuentra a la distancia radial "e" (excentricidad) del centro de la flecha.

Si el disco girase en torno al eje central de la flecha, se produciría sobre él una fuerza centrífuga (Fc) con magnitud $me\omega^2$. Esta fuerza rotativa presenta componentes horizontal y vertical con amplitudes iguales a $me\omega^2$. Es, pues, de esperarse que el disco vibre en las direcciones horizontal y vertical simultáneamente y, en particular, esperamos que el disco vibre violentamente, cuando estas fuerzas entran en resonancia con la frecuencia natural del conjunto, es decir, cuando la velocidad angular ω de la flecha coincide con la frecuencia

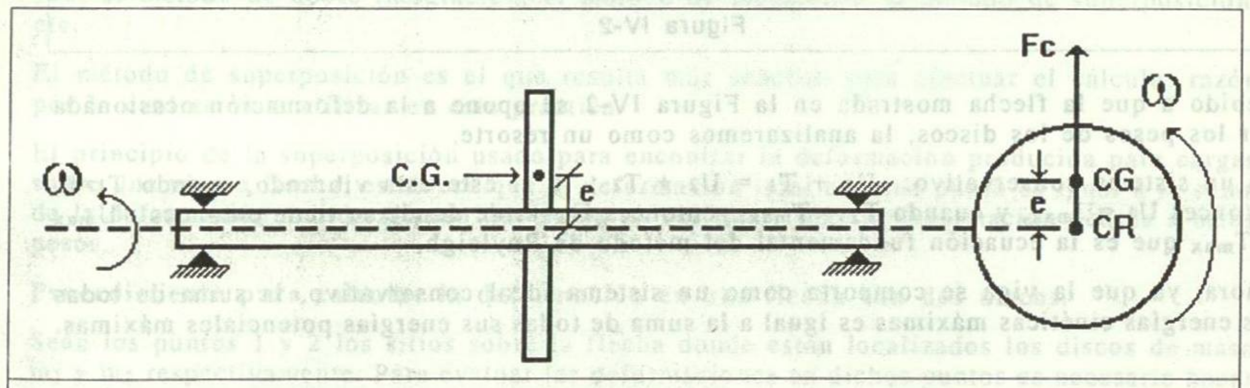

Figura IV-1.

natural de vibración ωn del sistema flecha-disco, la cual es función de la elasticidad de su flecha y las masas en ella.

Esta conclusión no se restringe al caso de un solo disco montado simétricamente sobre 2 apoyos rígidos; es válida también para sistemas más complicados.

Uno de los métodos más sobresalientes para la solución de este tipo de problemas es el método de Rayleigh.

El método de Rayleigh está basado en el continuo intercambio de energía cinética y potencial que existe en el sistema. Si el sistema es conservativo y no hay pérdida de energía, entonces la suma de la energía cinética y potencial es una constante. La energía cinética resulta de la velocidad de las masas, mientras que la energía potencial está acumulada como un trabajo contra la gravedad ó por una deformación elástica en la flecha.

Cálculo de la 1a Velocidad Crítica por el Método de Rayleigh.

Considerando una flecha con dos masas concentradas m_1 y m_2 como se muestra en la Figura IV-2.

La flecha es esencialmente una viga flexionada por los pesos de las masas m_1 y m_2.

El cálculo de las energías cinética y potencial requiere un conocimiento de las deflexiones verticales debidas a los discos.

Sean las deflexiones estáticas Y_1 e Y_2 en los puntos donde se encuentran las masas m_1 y m_2.

T Representa la energía cinética
U Representa la energía potencial.

CONDICION ESTATICA

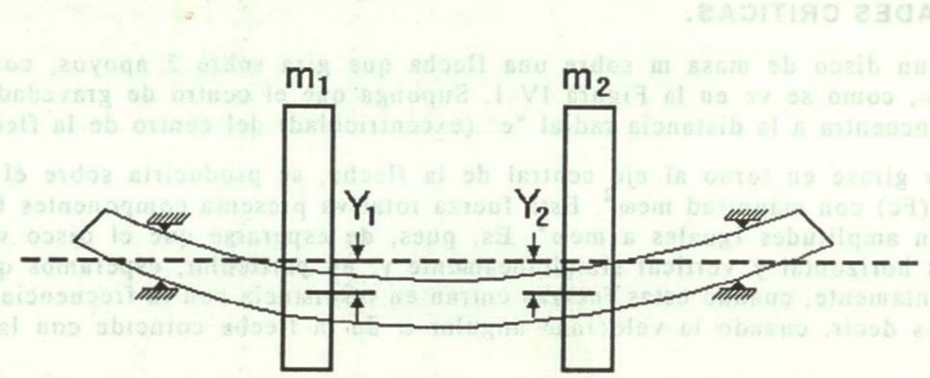

Figura IV-2.

Debido a que la flecha mostrada en la Figura IV-2 se opone a la deformación ocasionada por los pesos de los discos, la analizaremos como un resorte.

En un sistema conservativo: $U_1 + T_1 = U_2 + T_2$; y si éste esta vibrando, cuando $T_1=0$, entonces $U_1 = U_{max}$; y cuando $T_2 = T_{max}$, entonces $U_2=0$, de donde se tiene entonces : $U_{max} = T_{max}$ que es la ecuación fundamental del método de Rayleigh.

Ahora, ya que la viga se comporta como un sistema ideal conservativo, la suma de todas sus energías cinéticas máximas es igual a la suma de todas sus energías potenciales máximas.

$$\sum U_{MAX} = \sum T_{MAX}$$

$$\frac{1}{2} K_1 Y_1^2 + \frac{1}{2} K_2 Y_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2$$

Luego como:

$$k = F/x \text{ , en este caso, } K = \frac{W}{Y}$$

$$V = \omega Y = \omega_n Y$$

Donde: ω = frecuencia característica de oscilación del sistema $=\omega_n$

Sustituyendo tenemos:

$$\frac{1}{2} \frac{W_1}{Y_1} Y_1^2 + \frac{1}{2} \frac{W_2}{Y_2} Y_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \omega_n^2 Y_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \omega_n^2 Y_2^2$$

y como W = mg

$$m_1 g Y_1 + m_2 g Y_2 = m_1 \omega_n^2 Y_1^2 + m_2 \omega_n^2 Y_2^2$$

$$g(m_1 Y_1 + m_2 Y_2) = \omega_n^2 (m_1 Y_1^2 + m_2 Y_2^2)$$

$$\omega_n^2 = \frac{g(m_1 Y_1 + m_2 Y_2)}{(m_1 Y_1^2 + m_2 Y_2^2)}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g(m_1 Y_1 + m_2 Y_2)}{(m_1 Y_1^2 + m_2 Y_2^2)}} \quad \text{Rad/seg.}$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g(m_1 Y_1 + m_2 Y_2)}{(m_1 Y_1^2 + m_2 Y_2^2)}} \quad \text{Hz.}$$

$$\eta_n = \frac{60}{2\pi} \sqrt{\frac{g(m_1 Y_1 + m_2 Y_2)}{(m_1 Y_1^2 + m_2 Y_2^2)}} \quad \text{R.P.M.}$$

Donde :

ω_n = la frecuencia angular de resonancia en rad/s.
m = masa de cada disco en Kg.
Y = deformación estática de la flecha en la posición de cada disco en m.
g = aceleración de la gravedad en m/s^2.

Existen varios métodos para calcular la deformación en la flecha (Y) debido al peso, como son: el método de doble integración, el método de momentos, el método de superposición, etc.

El método de superposición es el que resulta más sencillo para efectuar el cálculo, razón por la cual se va a utilizar en esta práctica.

El principio de la superposición usado para encontrar la deformación producida para cargas sobre una viga o flecha, establece que la deformación total en cada punto es igual a la suma de la deformación debida al peso que actúa en ese punto más la deformación debida a otros pesos.

Procedimiento para calcular la deformación en una flecha con dos discos.

Sean los puntos 1 y 2 los sitios sobre la flecha donde están localizados los discos de masa m_1 y m_2 respectivamente. Para evaluar las deformaciones en dichos puntos es necesario hacer las siguientes consideraciones.

Al calcular la deflexión en el punto 1, es necesario calcular por separado, primero la deflexión producida en ese punto por el disco 1 y después la deflexión producida en ese punto por el disco 2 y la suma será la deflexión total de ese punto.

La fórmula para determinar la deflexión en cada caso es :

$$Y = \frac{m g b x}{6 L E I} \ (L^2 - b^2 - x^2)$$

Donde:

x	=	Distancia entre el punto donde se requiere conocer la deformación y el apoyo mas cercano en m.
b	=	Distancia entre el peso que produce la deformación y el otro apoyo en m.
L	=	Longitud total o distancia entre los apoyos en m.
E	=	Módulo de elasticidad de la flecha en N/m^2.
I	=	Momento de inercia de área de la flecha en m^4.
m	=	Masa del disco en Kg.
g	=	Aceleración de la gravedad en m/s^2

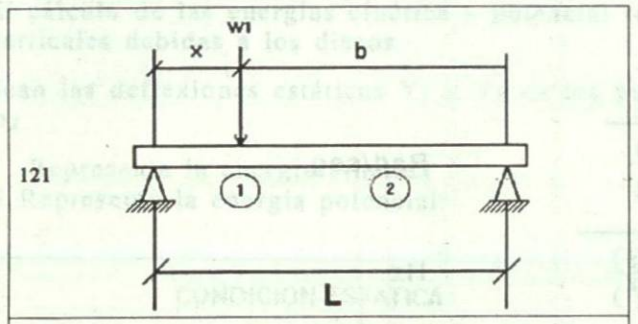

Figura IV-3.

Llamaremos a Y_{11} deformación en el punto (1) debida al disco (1)

$$Y_{11} = \frac{m_1 g b x}{6 L E I} \ (L^2 - b^2 - x^2)$$

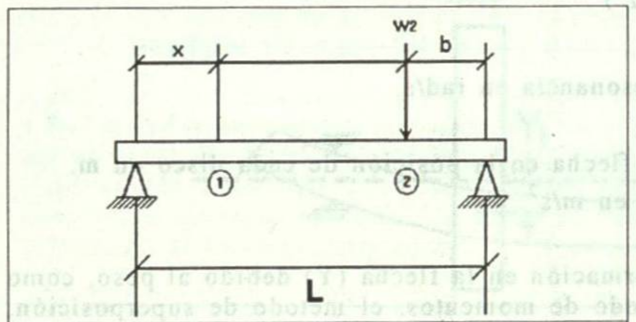

Figura IV-4.

Y_{12} = deformación en el punto (1) debida al disco (2)

$$Y_{12} = \frac{m_2 g b x}{6 L E I} \ (L^2 - b^2 - x^2)$$

La deformación total en 1 será :
$Y_1 = Y_{11} + Y_{12}$

Para calcular la deflexión en el punto 2 se hacen las mismas consideraciones o sea, calcular primero la deflexión producida en ese punto por el disco 2, y después la deflexión producida en ese punto por el disco 1 y la suma será la deflexión total en ese punto.

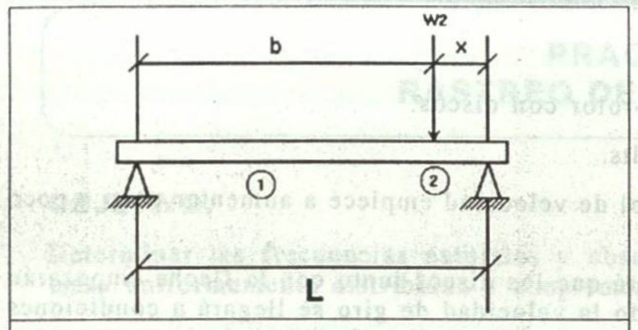

Figura IV-5.

Y_{22} = deformación en el punto (2) debida al disco (2)

$$Y_{22} = \frac{m_2 g b x}{6 L E I} \ (L^2 - b^2 - x^2)$$

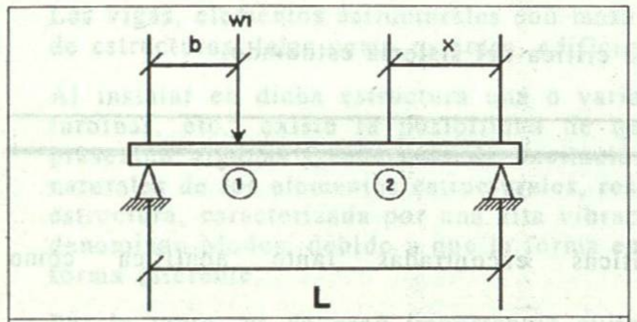

Figura IV-6.

Y_{21} = deformación en el punto (2) debida al disco (1)

$$Y_{21} = \frac{m_1 g b x}{6 L E I} \ (L^2 - b^2 - x^2)$$

La deformación total en 2 será:
$Y_2 = Y_{22} + Y_{21}$

APARATOS UTILIZADOS.

1.- Sistema motor-rotor con discos.
2.- Control de velocidad.
3.- Tacómetro.

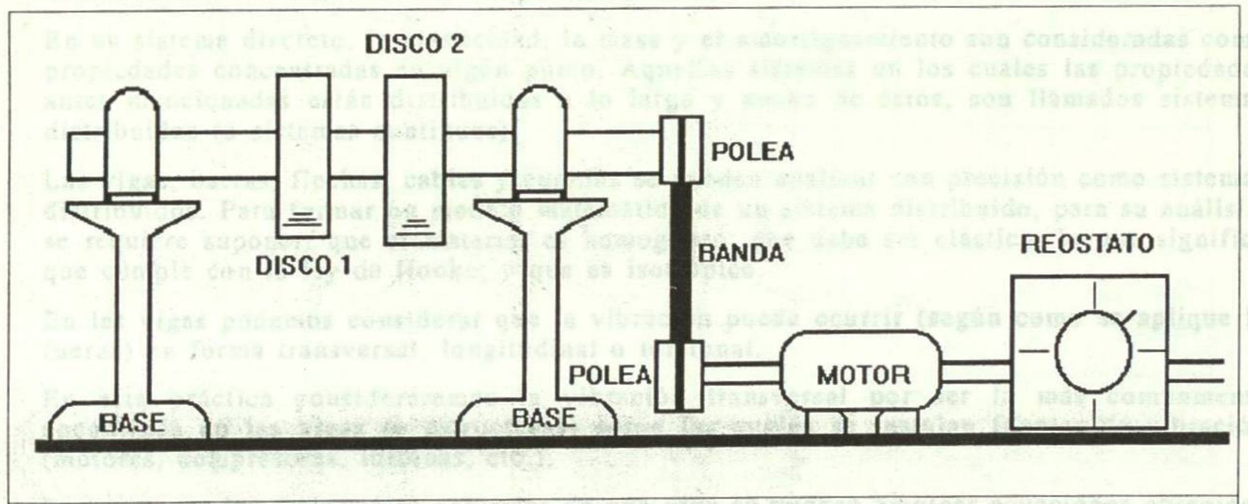

Figura IV-7

PROCEDIMIENTO.

1.- Mida las dimensiones del sistema motor-rotor con discos.

2.- Conecte el sistema a la linea de 110 Volts.

3.- Encienda el sistema y utilizando el control de velocidad empiece a aumentar poco a poco la velocidad de giro del rotor.

Una vez que está girando el sistema, se notará que los discos junto con la flecha empezarán a vibrar levemente, pero al seguir aumentando la velocidad de giro se llegará a condiciones en las que la vibración se hace violenta. En esta condición el sistema se encuentra en resonancia y la velocidad a la cual gira se llama velocidad crítica.

4.- Mida con un tacómetro la velocidad de giro de la flecha en las condiciones de velocidad crítica.

5.- Determine analíticamente la 1a. velocidad crítica del sistema estudiado.

REPORTE.

1.- Indique las velocidades críticas encontradas tanto analítica como experimentalmente.

2.- Compare y comente los resultados.

3.- Anexe memoria de cálculo.

BIBLIOGRAFIA.

* TEORIA DE VIBRACIONES, APLICACIONES.
William T. Thomson.
Prentice Hall.

PRACTICA V
RASTREO DE RESONANCIAS

OBJETIVO.

Determinar las frecuencias naturales y observar los modos de vibración de una viga con masa uniformemente distribuida y simplemente apoyada.

INTRODUCCION.

Las vigas, elementos estructurales con masa uniformemente distribuida, forman el esqueleto de estructuras, tales como, puentes, edificios, aviones, cohetes, etc.

Al instalar en dicha estructura una o varias fuentes de vibración (motores, compresores, turbinas, etc.) existe la posibilidad de que las fuerzas producidas en dichas máquinas presenten algunas frecuencias de excitación que coincidan con alguna de las frecuencias naturales de los elementos estructurales, resultando con ésto una resonancia mecánica en la estructura, caracterizada por una alta vibración. Las condiciones de resonancia en vigas se denominan Modos, debido a que la forma en que vibra la viga en cada resonancia tiene una forma diferente.

Por lo tanto, es de gran importancia evitar las condiciones de resonancia para prevenir catástrofes que pueden costar vidas humanas o dañar estructuras y equipos.

De acuerdo con lo anterior se hace necesario conocer las diferentes frecuencias naturales de los elementos estructurales; por lo que esta práctica describe uno de los métodos para determinarlas.

Cuando se requiere analizar estructuras complejas, como por ejemplo, en la industria aeronáutica, se diseña haciendo una primera aproximación teórica y revisando por ensayo y error, sometiéndolas a vibración en una amplia gama de frecuencias, localizando con ésto los elementos estructurales que requieren corrección.

VIBRACION TRANSVERSAL DE VIGAS.

En un sistema discreto, la elasticidad, la masa y el amortiguamiento son consideradas como propiedades concentradas en algún punto. Aquellos sistemas en los cuales las propiedades antes mencionadas están distribuidas a lo largo y ancho de éstos, son llamados sistemas distribuidos (o sistemas continuos).

Las vigas, barras, flechas, cables y cuerdas se pueden analizar con precisión como sistemas distribuidos. Para formar un modelo matemático de un sistema distribuido, para su análisis, se requiere suponer: que el material es homogéneo; que debe ser elástico, lo que significa que cumple con la ley de Hooke; y que es isotrópico.

En las vigas podemos considerar que la vibración puede ocurrir (según como se aplique la fuerza) en forma transversal, longitudinal o torsional.

En esta práctica consideraremos la vibración transversal por ser la más comunmente encontrada en las vigas (o estructuras) sobre las cuales se instalan fuentes de vibración (motores, compresores, turbinas, etc.).

Para conocer las frecuencias naturales de una viga se pueden emplear ecuaciones obtenidas por diferentes métodos, una de las cuales se muestra a continuación: