ALGEBRA II
2º SEMESTRE

Preparatoria
Num.
15

MATEMATICAS II

Ing. Miguel Angel Garza Tamez
Ing. José Luis Guerra Torres
Ing. Pablo Rivera Carrillo

M A T E M A T I C A S   II

Ing. Miguel Angel Garza Tamez.
Ing. José Luis Guerra Torres.
Ing. Pablo Rivera Carrillo.

OPERACIONES CON LAS FRACCIONES ALGEBRAICAS.

LECCIÓN 1.

1-1 PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES ALGEBRAICAS.

Enunciaremos varios propiedades de las fracciones que nos serán útiles más adelante.

1) Pueden cambiarse simultáneamente a la vez los signos del numerador y denominador de una fracción y no se altera.

$$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = -\frac{a}{-b} = -\frac{-a}{b}$$

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

2) Si el numerador y el denominador de una fracción algebráica, se multiplican o se dividen por una misma cantidad, la fracción no se altera.

$$\frac{a}{b} = \frac{a.c}{b.c} = \frac{a \div c}{b \div c}$$

3) Además una fracción a/b siendo a y b dos números cualesquiera y $b \neq 0$, se puede expresar como:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b}(a) = a\left(\frac{1}{b}\right);$$

4) De igual modo una fracción $\frac{1}{ab}$ siendo a y b dos números diferentes del cero se pueden expresar como:

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$$

1-2 REDUCCION A TERMINOS MINIMOS.

Reducir una fracción, es cambiar su forma sin cambiar su valor. Simplificar una fracción algebráica, es convertirla en una fracción equivalente, cuyos términos sean primos entre sí. Por ejemplo, las fracciones siguientes son equivalentes

a) $\frac{12}{8} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

b) $\frac{12a^2}{8a} = \frac{6a}{4} = \frac{3a}{2}$,

donde cada una de ellas está expresada en su forma más simple, ya que, al reducirla nos queda que 3 y 2 son primos entre sí, al igual que 3a y 2 de la segunda fracción.

Cuando los términos de una fracción son primos entre sí, la fracción es irreductible y entonces, la fracción está reducida a su más simple expresión o a su mínima expresión.

La mínima expresión de una fracción, es aquella en la cual, el numerador y el denominador no tienen factores comunes. Así en los ejemplos anteriores, lo que hicimos para reducirlas fue

a) $\frac{12}{8} = \frac{(6)(2)}{(4)(2)} = \frac{6}{4} = \frac{(3)(2)}{(2)(2)} = \frac{3}{2}$

o bien

$$\frac{12}{8} = \frac{(4)(3)}{(4)(2)} = \frac{3}{2} ;$$

b) $\frac{12a^2}{8} = \frac{(4)(3)a.a}{(4)(2)\ a} = \frac{3a}{2}$.

Por lo tanto, para reducir una fracción a su mínima expresión, se factorizan primero el numerador y el denominador de la fracción y luego se divide, cada uno de ellos, entre cada factor que les sea común.

Así, podemos determinar si una fracción está en sus términos mínimos expresando el numerador y denominador como productos de sus factores primos. Cualquier factor común que aparezca tanto en el numerador como en el denominador puede entonces ser suprimido o cancelado.

EJEMPLO:

Simplificar la fracción $\frac{9a^2b^3}{24a^3b^4c^2}$

Solución:

Se tiene que:

$$\frac{9a^2b^3}{24a^3b^4c^2} = \frac{(3)(1)(1)}{(8)(a)(b)(c^2)} = \frac{3}{8abc^2}$$

Hemos dividido 9 y 24 entre 3 y obtuvimos 3 y 8; a^2 y a^3 entre a^2 y obtuvimos 1 y a; b^3 y b^4 entre b^3 y obtuvimos 1 y b; c^2 no tiene factor común por tanto, queda en el denominador. También vemos que, 3 y $8abc^2$, son números primos entre sí, es decir, no hay factor común por lo que resulta una fracción irreductible, que es precisamente lo que queríamos.

De las fracciones, las más fáciles de resolver son las de un monomio entre otro monomio, como en el caso del ejemplo anterior, puesto que está expresado como factores y no aparece ningún sumando. Veamos otro ejemplo:

EJEMPLO:

Simplificar la fracción $\frac{12a^3b^2c}{18ab^3c^2}$

Solución:

Según el principio fundamental de las fracciones, se pueden dividir sus dos términos entre $6ab^2c$, y se tiene:

$$\frac{12a^3b^2c \div 6ab^2c}{18ab^3c^2 \div 6ab^2c} = \frac{2a^2}{3bc}$$

Para llegar a este resultado se han dividido el numerador y el denominador entre $6ab^2c$, que es el factor máximo de ambos miembros de la fracción, cuyo producto es el máximo común divisor (m.c.d.) de los términos de dicha fracción.

Por tanto, para reducir una fracción a su más simple expresión, mediante una sola división, se dividen sus dos términos entre su máximo común divisor (m.c.d.).

EJEMPLO:

Reducir a su más simple expresión la fracción

$$\frac{144a^5b^4c^3d}{36a^4b^5c^2}$$

Solución:

El m.c.d. de los términos de la fracción es $36a^4b^4c^2$, por lo que queda como:

$$\frac{144a^5b^4c^3d \div 36a^4b^4c^2}{36a^4b^5c^2 \div 36a^4b^4c^2} = \frac{4acd}{b}$$

Ahora veamos el caso en el que la fracción involucre división de monomios entre polinominos o polinomios entre polinomios.

Para poder simplificar una fracción algebráica de este tipo es necesario primero descomponer cada polinomio en sus factores primos, o bien, factorizar completamente el polinomio de cada término de la fracción para luego suprimir los factores que sean comunes del numerador y del denominador. Veamoslo mejor con el siguiente ejemplo:

EJEMPLO:

Reduzcamos la fracción $\frac{2x^2}{4x^2-4xy}$ a términos mínimos

Solución:

Como en la fracción aparece solamente en el denominador un polinomio, procedamos a factorizarlo.

$$\frac{2x^2}{4x^2-4xy} = \frac{2x^2}{4x(x-y)} \;;$$

luego sacamos el m.c.d. que es $2x$

$$\frac{2x^2 \div 2x}{4x(x-y) \div 2x} = \frac{x}{2(x-y)}$$

EJEMPLO:

Reducir a su más simple expresión la fracción $\frac{x^2-5x+6}{x^2+x-6}$

Solución:

Se procede a factorizar el numerador y denominador de la fracción:

$$\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+3)} = \frac{x-3}{x+3}$$

En la reducción de fracciones, es común suprimir el factor por el cual se dividen el numerador y el denominador. El proceso de eliminar un factor común del numerador y denominador de una fracción es llamado cancelación multiplicativa.

EJEMPLO:

Reducir a su más simple expresión la fracción

$$\frac{x^2-9x+20}{25-x^2}$$

Solución:

Haciendo lo mismo que en los otros ejemplos tenemos

$$\frac{x^2-9x+20}{25-x^2} = \frac{(x-5)(x-4)}{(5-x)(5+x)}$$

Ahora bien, como en el numerador tenemos (x-5) y en el denominador (5-x), podemos, según una de las propiedades de las fracciones, multiplicar arriba y abajo por una misma cantidad, y no se nos altera la fracción.

$$\frac{(x-5)(x-4)}{(5-x)(5+x)} = \frac{-1}{-1}\,\frac{(x-5)(x-4)}{(5-x)(5+x)} = \frac{(5-x)(x-4)}{-(5-x)(5+x)}$$

ahora procedamos a simplificar

$$-\frac{(5-x)(x-4)}{(5-x)(5+x)} = -\frac{x-4}{5+x} =$$

$$= \frac{4-x}{5+x}$$

AUTOEVALUACIÓN 1.

Reducir a su más simple expresión las siguientes fracciones indicando el m.c.d.

1. $\frac{4x^5}{12x^7}$ = ________; m.c.d. = ________

2. $\frac{8a^2b^3}{24a^3b^2}$ = ________; m.c.d.= ________

3. $\frac{32x^2y^4z^3}{16x^4y^3z^4}$ = ________; m.c.d.= ________

4. $\frac{75a^7m^5}{100a^3m^{12}n^3}$ = ________; m.c.d. = ________

5. $\frac{24ab^2c}{18a^2bc^2}$ = ________ ; m.c.d. = ________

6. $\frac{12a^2b^3}{60a^3b^5x^6}$ = ________; m.c.d. = ________

7. $\frac{27a^2b^2c^3d^4}{63a^3b^3c^4d^5}$ = ________; m.c.d. = ________

8. $\frac{(25a^2b^5)(15a^3b^6)}{150a^6b^6}$ = ________; m.c.d. = ________

Factorizar y reducir a su mínima expresión, las fracciones siguientes, llenando los espacios indicados.

9. $\frac{3x^2y + 15xy}{x^2-25} = \frac{3xy(\quad)}{(x+5)(\quad)}$ = ________

10. $\frac{x^2+x-6}{x^2+5x+6} = \frac{(x+3)(\quad)}{(\quad)(x+2)}$ = ________

11. $\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2} = \dfrac{(a-b)(\quad)}{(\quad)(a-b)} =$ ______________

12. $\dfrac{a^3-2a^2-a+2}{a^3+2a^2-a-2} = \dfrac{a^2(\quad)-(a-2)}{a^2(a+2)-(\quad)} = \dfrac{(a-2)(\quad)}{(a+2)(\quad)}$

13. $\dfrac{9-6x+x^2}{9-9x+2x^2} = \dfrac{(3-x)(\quad)}{(3-2x)(\quad)} =$ ______________

Reduzca cada fracción a términos mínimos.

14. $\dfrac{b^2-a^2}{(a-b)^2}$

17. $\dfrac{3x^2-11x+6}{3x^2+x-2}$

15. $\dfrac{a^2-b^2}{2a^2+ab-b^2}$

18. $\dfrac{c^3+3c^2+2c+6}{c^3-c^2+2c-2}$

16. $\dfrac{a^2-ab+b^2}{a^3+b^3}$

1-3 MULTIPLICACION Y DIVISION DE FRACCIONES.

Las siguientes propiedades nos proporcionan procedimientos para multiplicar y dividir fracciones:

a) *El producto de dos o más fracciones es igual al producto de los numeradores dividido entre el producto de los denominadores, es decir:*

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}\text{; donde } b,\ d \neq 0$$

b) *El cociente de dos fracciones es igual al dividendo multiplicado por el divisor invertido, es decir:*

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}\text{; donde } b,c,d \neq 0$$

Es con frecuencia deseable reducir el producto, o el cociente, de fracciones a términos mínimos. Siendo éste el caso, el mejor procedimiento es escribir cada fracción en la forma factorizada, donde, factores comunes del numerador y del denominador pueden entonces suprimirse.

EJEMPLO:

Realizar las operaciones indicadas.

$$\frac{2x^2-x-3}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-2x+1}{3x^2-x-2}$$

Solución:

Como el producto de dos o más fracciones, es el producto de los numeradores, divididos, entre el producto de los denominadores, tenemos que:

$$\frac{2x^2-x-3}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-2x+1}{3x^2-x-2} = \frac{(2x^2-x-3)(x^2-2x+1)}{(x^2-1)(3x^2-x-2)}$$

luego, factorizando el numerador y denominador nos queda

$$= \frac{(2x^2-x-3)(x^2-2x+1)}{(x^2-1)(3x^2-x-2)} = \frac{(2x-3)(x+1)(x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x-1)(3x+2)}$$

para luego suprimir los factores comunes quedando

$$= \frac{(2x-3)(x+1)(x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x-1)(3x+2)} = \frac{2x-3}{3x+2}$$

EJEMPLO:

Dividamos $\dfrac{y^3-1}{y^2-9}$ por $\dfrac{y^2+y+1}{y^2-2y-3}$

Solución:

Para encontrar el cociente, invertimos el divisor, es decir:

$$\frac{y^3-1}{y^2-9}\div\frac{y^2+y+1}{y^2-2y-3} = \frac{y^3-1}{y^2-9}\bullet\frac{y^2-2y-3}{y^2+y+1} =$$

Factorizando los numeradores y denominadores de las fracciones tenemos que:

$$= \frac{y^3-1}{y^2-9} \cdot \frac{y^2-2y-3}{y^2+y+1} = \frac{(y-1)(y^2+y+1)}{(y+3)(y-3)} \cdot \frac{(y-3)(y+1)}{(y^2+y+1)} =$$

suprimiendo los factores comunes, nos queda por último

$$\frac{(y-1)(y^2+y+1)(y+3)(y+1)}{(y+3)(y-3)(y^2+y+1)} = \frac{(y-1)(y+1)}{y+3}$$

EJEMPLO:

Efectuaremos las multiplicaciones de fracciones siguientes:

$$\frac{x^2-3x+2}{2x^2+3x-2} \cdot \frac{2x^2+5x-3}{x^2-1} \cdot \frac{3x^2+6x}{2x-4} =$$

Solución:

Factorizando los numeradores y denominadores de las fracciones tenemos

$$= \frac{(x-2)(x-1)}{(2x-1)(x+2)} \cdot \frac{(2x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{3x(x+2)}{2(x-2)}$$

luego, por último, suprimiendo los factores comunes en el numerador y denominador, resulta.

$$= \frac{3x(x+3)}{2(x+1)}$$

EJEMPLO:

Realicemos las operaciones indicadas

$$\frac{a^2-7a+12}{a^2-6a+8} \cdot \frac{a^2+3a-10}{a^2-10a+21} \div \frac{a+5}{a-7} =$$

Solución:

Cuando haya que efectuar operaciones, en las que se combinen multiplicaciones y divisiones se procede primero a convertir los divisores en factores, invirtiéndolos y procediendo según la regla de multiplicación; es decir, invirtiendo el divisor y factorizando, obtenemos:

$$= \frac{(a-3)(a-4)}{(a-4)(a-2)} \cdot \frac{(a+5)(a-2)}{(a-7)(a-3)} \cdot \frac{(a-7)}{(a+5)} = 1$$

Frecuentemente se observan con mayor claridad los términos que pueden cancelarse, si previamente, se ordenan y se hacen los cambios permitidos de signos en los términos de los miembros de las fracciones. Por ejemplo, en la siguiente multiplicación de fracciones

$$\frac{(a+2b)}{(a^2-b^2)} \cdot \frac{(2b-a)}{(b-a)} \cdot \frac{(a+b)}{(4b^2-a^2)}$$

En este problema, algunos de los términos en que aparece "a" son positivos. Sin embargo, si se cambian ambos signos en los miembros de la segunda fracción, y se cambia el signo que antecede a la tercera fracción cambiando los dos signos de su denominador y se ordenan los términos, se tiene:

$$\frac{(a+2b)}{(a^2-b^2)} \cdot \frac{(a-2b)}{(a-b)} \cdot \frac{(a+b)}{-(a^2-4b^2)}$$

$$= \frac{(a+2b)}{(a-b)(a+b)} \cdot \frac{(a-2b)}{(a-b)} \cdot \frac{(a+b)}{-(a-2b)(a+2b)}$$

$$= \frac{-1}{(a-b)^2}$$

Debe observarse que, la supresión reemplaza cada numerador por la unidad, así que, el numerador del producto es uno y no cero.

También, al igual que en el caso de reducir fracciones a su mínima expresión, la supresión descuidada puede conducir a errores graves. En la siguiente expresión, sería un error suprimir (2a+b).

$$\frac{(2a+b)+5}{(2a+b)(2a-b)}$$

por ejemplo, tiene 2a+b como un factor del denominador, pero 2a+b es un término del numerador, no un factor.

Resumiendo, las operaciones de multiplicación y división de fracciones, diremos que:

1) Se descomponen en factores todo lo posible, los términos de las fracciones que se van a multiplicar o dividir.

2) En el caso de la división se invierten los términos de la fracción divisor y se multiplican, el dividendo por el divisor invertido.

3) Se simplifica, suprimiendo los factores comunes, en los numeradores y denominadores.

4) Se multiplican entre sí las expresiones que queden en los numeradores; después de simplificar, y este producto se parte por el producto de las expresiones que queden en los denominadores.

AUTOEVALUACIÓN 2.

Efectuar las operaciones indicadas y simplificar.

1. $\frac{3a}{2b}\cdot\frac{4ab}{9c}\cdot\frac{3c^2}{4a^2}$

2. $\frac{2a^2}{3b}\cdot\frac{6b^2}{4a}$

3. $\frac{7y}{12x^2}\cdot\frac{10xy^2}{3z}\cdot\frac{6xz^2}{5y}$

4. $\frac{5}{a}\cdot\frac{2a}{b^2}\cdot\frac{3b}{10}$

5. $\frac{14u^2}{5v}\cdot\frac{10v^2}{21vw}\cdot\frac{9w^2}{8u^2v}$

6. $\frac{x^2}{3y^2}\div\frac{2x}{y^3}$

7. $6a^2x^3\div\frac{a^2x}{5}$

Efectuar las operaciones indicadas y simplificar, llenando los espacios indicados.

8. $\frac{5a-5b}{3a+6b}\cdot\frac{a+2b}{a-b}=\frac{5(\quad)}{(\quad)(a+2b)}\cdot\frac{a+2b}{a-b}=$ ____________

9. $\frac{4x-2y}{5x+10y}\cdot\frac{x^2+2xy}{2xy-y^2}=\frac{2(\quad)}{(\quad)(x+2y)}\cdot\frac{x(\quad)}{y(\quad)}=$ ____________

10. $\frac{2a(a+b)^2}{3b^3}\cdot\frac{b^2(a-b)}{8a^3(a+b)}\cdot\frac{12a^2b^2}{a^2-b^2}=$ ____________

11. $\frac{x-y}{x+y}\cdot\frac{x^2+xy}{x^2y^2-xy^3}\cdot\frac{y}{x^2}=$ ____________

12. $\dfrac{1}{a^2-a-30} \div \dfrac{2}{a^2+a-42} = \dfrac{1}{(a-6)(\quad)} \cdot \dfrac{(a+7)(\quad)}{2} = \_\_\_\_\_$

13. $\dfrac{a^2-6a}{a^3+3a^2} \div \dfrac{a^2+3a-54}{a^2+9a} = \dfrac{a(\quad)}{(\quad)(a+3)} \cdot \dfrac{a(\quad)}{(a+9)(\quad)} = \_\_\_\_\_$

14. $\dfrac{x^3+125}{x^2-64} \div \dfrac{x^3-5x^2+25x}{x^2+x-56} = \dfrac{(x+5)(\quad)}{(x+8)(\quad)} \cdot \dfrac{(x+8)(\quad)}{x(\quad)} = \_\_\_\_\_$

15. $\dfrac{25a^2b^2}{12c^2} \cdot \dfrac{36bc^3}{5a^3} \div \dfrac{15b^3}{7ac} = \_\_\_\_\_$

16. $\dfrac{h^2-9}{k^2-9k} \cdot \dfrac{hk-9h}{hk+3k} \div \dfrac{h^3-3h^2}{k^3} = \dfrac{(h+3)(\quad)}{k(\quad)} \cdot \dfrac{h(\quad)}{k(\quad)} \cdot \dfrac{k^3}{(\quad)(h-}$

$= \_\_\_\_\_$

Realiza las operaciones indicadas y simplifica.

17. $\dfrac{3a^2+a-10}{8a^2-2a-3} \cdot \dfrac{10a^2+a-2}{3a^2+20a+25} \div \dfrac{5a^2+8a-4}{12a^2+11a-15}$

18. $\dfrac{x^2+4xy-12y^2}{x^2+7xy+6y^2} \cdot \dfrac{x^2-6xy-7y^2}{x^2-xy-12y^2} \div \dfrac{x^2-9xy+14y^2}{x^2-xy-12y^2}$

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DE LA LECCION 1.

AUTOEVALUACION 1.

1.- $1/3x^2$; $4x^5$

2.- $b/3a$; $8a^2b^2$

3.- $2y/x^2z$; $16x^2y^3z^3$

4.- $3a^4/4m^7n^3$; $25a^3m^5$

5.- $4b/3ac$; $6abc$

6.- $1/5ab^2x^6$; $12a^3b^3$

7.- $3/7abcd$; $9a^2b^2c^3d^4$

8.- $5b^5/2a$; $75a^5b^6$

9.- $3xy(x+5)/(x+5)(x-5) = 3xy/x-5$

10.- $(x+3)(x-2)/(x+3)(x+2) = x-2/x+2$

11.- $(a-b)(a^2+ab+b^2)/(a+b)(a-b) = a^2+ab+b^2/a+b$

12.- $(a-2)(a^2-1)/(a+2)(a^2-1) = a-2/a+2$

13.- $(3-x)(3-x)/(3-2x)(3-x) = 3-x/3-2x$

14.- $b+a/b-a$

15.- $a-b/2a-b$

16.- $1/a+b$

17.- $x-3/x+1$

18.- $c+3/c-1$

AUTOEVALUACION 2.

1.- $c/2$

2.- ab

3.- $7y^2z/3$

4.- $3/b$

5.- $3w/2v$

6.- $xy/6$

7.- $30x^2$

8.- $\frac{5(a-b)}{3(a+2b)}$; $5/3$

9.- $\frac{2(2x-y)}{5(x+2y)} \cdot \frac{x(x+2y)}{y(2x-y)} = \frac{2x}{5y}$

10.- $b/2$

11.- $1/x^2y$

12.- $\frac{1}{(a-6)(a+5)} \cdot \frac{(a+7)(a-6)}{2} = \frac{a+7}{2a+10}$

13.- $\frac{a(a-6)}{a^2(a+3)} \cdot \frac{a(a+9)}{(a+9)(a-6)} = \frac{1}{a+3}$

14.- $\frac{(x+5)(x^2+5x+25)}{(x+8)(x-8)} \cdot \frac{(x+8)(x-7)}{x(x^2-5x+25)} = \frac{(x+5)(x-7)}{(x-8)}$

15.- $7c^2$

16.- $\frac{(h+3)(h-3)}{k(k-9)} \cdot \frac{h(k-9)}{k(h+3)} \cdot \frac{k^3}{h^2(h-3)} = \frac{k}{h}$

17.- $\frac{3a-5}{a+5}$

18.- 1

SUMA Y RESTA DE FRACCIONES ALGEBRAICAS.

LECCIÓN 2.

1-4 REDUCCION DE UNA FRACCION A UN MÍNIMO COMUN DENOMINADOR.

Definición.

Reducir, dos o más fracciones, a un común denominador, es hallar otras, respectivamente equivalentes a las primeras, cuyos denominadores sean iguales.

Reducción a un común denominador.

Consideremos las fracciones,

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{m}{n}$$

si se multiplican los dos términos de la primera fracción por dn, los de la segunda por bn, y los de la tercera por bd, ninguna de las fracciones cambia de valor, y se convierten respectivamente en:

$$\frac{adn}{bdn}, \frac{cbn}{bdn}, \frac{mbd}{bdn}$$

que como se ve, tiene el mismo denominador.

Por lo expuesto, resulta que: para reducir dos o más fracciones, a un común denominador, se multiplican ambos miembros de cada una de ellas, por el producto de los denominadores de todas las demás.

Fracciones reducidas a su mínimo común denominador.

Con el objeto de evitar, denominadores muy grandes, es preferible, siempre que sea posible, reducir las fracciones a su menor común denominador, es decir, transformarlas en otras, respectivamente equivalentes a las propuestas, cuyo denominador común sea mínimo.

Por ejemplo, consideremos las fracciones,

$$\frac{2a}{5\ (a^2 - 4)} \quad y \quad \frac{6a}{35\ (a^2 - 6a + 8)}$$

Para reducirlas a su menor común denominador, se debe hallar una expresión, que sea múltiplo de, $5(a^2-4)$ y al mismo tiempo de, $35(a^2-6a+8)$, y tal que su coeficiente sea el mínimo común múltiple, de los coeficientes de los denominadores y que el grado de la parte literal sea mínimo.

El primer denominador, $5(a^2-4)$, se descompone en: $5(a+2)(a-2)$, y el segundo, $35(a^2-6a+8)$ es igual a $5 \cdot 7\ (x-2)(x-4)$; entonces, en vez de tomar como denominador común el producto de, $5(a^2-4)$ por $35(a^2-6a+8)$, basta tomar $5 \cdot 7\ (x+2)(x-2)(x-4)$, que es el m.c.m. de los denominadores de las fracciones dadas.

Si a la primera fracción, se le da por denominador,

$$35(a+2)(a-2)(a-4) \;=\; 35(a^2-4)(a-4)$$

dicho denominador queda multiplicado por, $7(a-4)$ para que no se altere el valor de la fracción hay que multiplicar el numerador, por el mismo factor, y así se obtiene:

$$\frac{2a \cdot 7\ (a-4)}{35\ (a+2)(a-2)(a-4)} = \frac{14a\ (a-4)}{35\ (a^2-4)(a-4)}$$

dando a la segunda fracción el mismo denominador, el suyo queda multiplicado por $(a+2)$; para no alterar el valor de la fracción, hay que multiplicar también el numerador por, $(a+2)$, y así resulta:

$$\frac{6a\ (a+2)}{35\ (a+2)(a-2)(a-4)} = \frac{6a\ (a+2)}{35\ (a^2-4)(a+2)}$$

El mínimo común múltiplo.

El mínimo común múltiplo, (m.c.m.) de un conjunto de polinomios, es el polinomio de menor grado, y con los mínimos coeficientes enteros, que sea divisible exactamente, entre cada polinomio del conjunto.

El grado de un polinomio, es el grado de su término de mayor grado. El grado de un término, es la suma de los exponentes que aparecen en él.

Por ejemplo, el grado de, $2x^3-3x^2+4x$ es 3, y el grado de $3x^2y^2-2xy+3y^2$ es 4.

EJEMPLOS:

1) El m.c.m. de, $3x$; $4x^2y$; $8x^5y^2$ y de $36x^4$es, $72x^5y^2$.

2) El m.c.m. de, $2(x-y)$; $3(x+y)$; y de $(x-y)^2$,es $6(x-y)^2(x+y)$.

Si los polinomios están factorizados, se observa que, por definición, el m.c.m. factorizado, debe satisfacer los requisitos siguientes:

1.- Cada factor, de cada polinomio, debe aparecer como factor del m.c.m. Además, cada factor del m.c.m., debe estar elevado a una potencia igual, a la mayor que dicho factor tenga, en cualquiera de los polinomios factorizados.

2.- El m.c.m. no puede tener un factor, que no aparezca en alguno de los polinomios factorizados.

De ese modo, se tiene el siguiente método, para obtener el m.c.m. de un conjunto de polinomios:

1.- Se factoriza, cada uno de los polinomios.

2.- Se escribe el m.c.m., cada uno de los diferentes factores primos, de los polinomios, y luego se eleva cada factor, a la mayor potencia con que aparezca en alguno de los polinomios factorizados. (Número primo, es un número que no tiene más factores, que él mismo y la unidad).

EJEMPLO:

Encontrar el m.c.m. de los siguientes polinomios:

$$x^2 - 2xy + y^2$$
$$x^2 + 2xy + y^2$$
$$x^2 - y^2$$

$$x^2 - 3xy + 2y^2$$
$$2x^2 + 3xy + y^2$$

SOLUCIÓN:

Se escriben factorizados cada uno de esos polinomios, como se muestra en seguida:

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$
$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$
$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$
$$x^2 - 3xy + 2y^2 = (x - 2y)(x - y)$$
$$2x^2 + 3xy + y^2 = (2x + y)(x + y)$$

Los factores primos que aparecen arriba son, $(x-y)$; $(x+y)$; $(x-2y)$ y $(2x+y)$. Sin embargo, $(x-y)$ y $(x+y)$ tienen exponente 2, en el primero y en el segundo de los polinomios, respectivamente. Por tanto, el m.c.m. es, $(x-y)^2(x+y)^2(x-2y)(2x+y)$.

Reducción de fracciones al mínimo común denominador empleando el mínimo común múltiplo (m.c.m.).

Para reducir, dos o más fracciones a su mínimo común denominador, por el método del m.c.m., se pueden seguir los siguientes pasos:

1.- Se toma como denominador común, el m.c.m. de los denominadores.

2.- Se divide ese común denominador, entre el denominador de cada fracción.

3.- Se multiplica el numerador de cada fracción, por el cociente respectivo obtenido.

EJEMPLOS:

Reducir, a su mínimo común denominador:

1) $\frac{5ax^2}{8by^2}$, $\frac{7by}{10x^2z}$, $\frac{8cx^3}{15yz^3}$

m.c.m. $(8, 10, 15) = 120$

m.c.m. $(8by^2, 10x^2z, 15yz^3) = 120bx^2y^2z^3)$

Efectuando las operaciones indicadas resulta:

$$\frac{75ax^4z^3}{120bx^2y^2z^3}, \quad \frac{84b^2y^3z^2}{120bx^2y^2z^3}, \quad \frac{64bcx^5y}{120bx^2y^2z^3}$$

2) Reducir, a su mínimo común denominador:

$$\frac{2}{3m^3-12m^2}, \quad \frac{m}{m^2-6m+8}, \quad \frac{m^2}{m^3-8}$$

Factorizando los denominadores se tiene:

$$3m^3 - 12m^2 = 3m^2(m-4)$$
$$m^2 - 6m + 8 = (m-2)(m-4)$$
$$m^3 - 8 = (m-2)(m^2+2m+4)$$

Por tanto, el mínimo común denominador es:

$$3m^2(m-4)(m-2)(m^2+2m+4)$$

y las fracciones, se transforman respectivamente en:

$$\frac{2(m-2)(m^2+2m+4)}{3m^2(m-2)(m-4)(m^2+2m+4)}$$

$$\frac{m.3m^2(m^2+2m+4)}{3m^2(m-2)(m-4)(m^2+2m+4)}$$

$$\frac{m^2.3m^2(m-4)}{3m^2(m-2)(m-4)(m^2+2m+4)}$$

AUTOEVALUACION 1.

Transforma la siguiente fracción en una equivalencia, cuyo denominador sea, la expresión que aparece a la derecha.

1.- $\dfrac{5a}{3bc}$, $15ab^2c^2$

2.- $\dfrac{4r}{9s\ t}$, $27r^2s^2t^5$

3.- $\dfrac{2a}{3a-1}$, $(3a-1)(2a+3)$

4.- $\dfrac{3x+2y}{2x-3y}$, $4x^2-9y^2$

5.- $\dfrac{3a+4b}{5a-2b}$, $15a^2-26ab+8b^2$

Reducir al mínimo común denominador.

6.- $\dfrac{2a}{36c}$, $\dfrac{4b^2}{9c^2}$, $\dfrac{5c^3}{12a^2c^3}$, m.c.d. = ________________

7.- $\dfrac{4x}{9y^2z}$, $\dfrac{5y}{12xz^2}$, $\dfrac{8z}{15x^2y}$, m.c.d. = ________________

8.- $\dfrac{5w^2}{12u^2v}$, $\dfrac{7v^2}{24uw^2}$, $\dfrac{8u^2}{27v^2w}$, m.c.d. = ________________

9.- $\dfrac{a}{a^2-b^2}$, $\dfrac{a-b}{(a+b)^2}$, $\dfrac{a+b}{(a-b)^2}$, m.c.d. = ________________

10.- $\dfrac{2u+v}{4u^2-9v^2}$, $\dfrac{2u-3v}{4u^2+8uv+3v^2}$, $\dfrac{2u+3v}{4u^2-4uv-3v^2}$, m.c.d.= ________

Nota.

Generalmente es preferible, indicar la multiplicación en el denominador, sin efectuarla; así se ve más rápidamente, por qué factores, ha sido multiplicado el denominador de cada fracción y por tanto, qué factores deben multiplicar también su numerador.

1-5 SUMA DE FRACCIONES ALGEBRAICAS.

Definición.

La adición o suma, es una operación que tiene por objeto, reunir varios números de la misma especie, en uno solo.

Los números que se suman, se llaman sumados, y el resultado se denomina, suma o total.

El signo de la operación de sumar, es una cruz (+), que se lee más, y se coloca entre los sumandos.

En la suma de fracciones algebráicas se distinguen dos casos:

Primer caso; las fracciones algebráicas tienen igual denominador.

Para sumar fracciones algebráicas de igual denominador, se suman algebráicamente los numeradores y al resultado se le da, el denominador común.

EJEMPLOS.

$$\frac{x}{5} + \frac{2y}{5} = \frac{x+2y}{5}$$

$$\frac{8a}{7b} + \frac{-5a}{7b} = \frac{8a-5a}{7b} = \frac{3a}{7b}$$

$$\frac{3a+2b}{ab} + \frac{5a-3b}{ab} + \frac{2a+5b}{ab} = \frac{3a+2b+5a-3b+2a+5b}{AB}$$

$$= \frac{10a+4b}{ab}$$

Segundo caso: las fracciones algebraicas, no tienen igual denominador.

Para sumar fracciones algebraicas, que no tienen igual denominador, se busca el mínimo común múltiplo de los denominadores, se reducen las fracciones a otras equivalentes, que tengan como denomindador, el mínimo común múltiplo o común denominador y se efectúa la suma.

EJEMPLOS:

Sumar;

$$\frac{a}{6} + \frac{2a}{5} + \frac{3a}{4}$$

El común denominador de 6, 5 y 4 es, 60.

$$\frac{a}{6} = \frac{10a}{60} \; ; \; \frac{2a}{5} = \frac{24a}{60} \; ; \; \frac{3a}{4} = \frac{45a}{60}$$

$$\frac{a}{6} + \frac{2a}{5} + \frac{3a}{4} = \frac{10a}{60} + \frac{24a}{60} + \frac{45a}{60}$$

$$= \frac{10a+24a+45a}{60} = \frac{79a}{60}$$

EJEMPLO:

Sumar;

$$\frac{a+b}{a} + \frac{2a-3b}{b} + \frac{5a^2-2b^2}{ab}$$

El común denominador de a, b y ab es, ab.

$$\frac{a+b}{a} = \frac{(a+b)b}{ab} = \frac{ab+b^2}{ab}$$

$$\frac{2a-3b}{b} = \frac{(2a-3b)a}{ab} = \frac{2a^2-3ab}{ab}$$

Por tanto:

$$\frac{a+b}{a} + \frac{2a-3b}{b} + \frac{5a-2b}{ab} = \frac{ab+b^2}{ab} + \frac{2a^2-3ab}{ab} + \frac{5a^2-2b^2}{ab}$$

$$\frac{ab+b^2+2a^2-3ab+5a^2-2b^2}{ab} = \frac{7a^2-2ab-b^2}{ab}$$

EJEMPLO:

Suma.

$$\frac{x+y}{x^2+2xy+y^2} + \frac{x-y}{x^2-2xy+y^2} + \frac{2x+2y}{x^2-y^2}$$

Antes de comenzar cualquier operación, deben simplificarse las fracciones, siempre que se pueda,

$$\frac{x+y}{x^2+2xy+y^2} = \frac{1}{x+y}$$

$$\frac{x-y}{x^2-2xy+y^2} = \frac{1}{x-y}$$

$$\frac{2x+2y}{x^2-y^2} = \frac{2}{x-y}$$

Por tanto,

$$\frac{x+y}{x^2+2xy+y^2} + \frac{x-y}{x^2-2xy+y^2} = \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} + \frac{2}{x-y}$$

ahora, el común denominador de, $x+y$ y $x-y$ es, x^2-y^2 Luego,

$$\frac{1}{x+y} = \frac{x-y}{x^2-y^2}$$

$$\frac{1}{x-y} = \frac{x+y}{x^2-y^2}$$

$$\frac{2}{x-y} = \frac{2x+2y}{x^2-y^2}$$

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} + \frac{2}{x-y} = \frac{x-y+x+y+2x+2y}{x^2-y^2}$$

$$= \frac{4x+2y}{x^2-y^2}$$

En la práctica, para sumar fracciones algebráicas, se simplifican cuando se puede, se busca el común denominador, se divide el común denominador, entre el denominador de cada una de las fracciones y el resultado, se multiplica por el numerador de la fracción, luego, se reducen los términos semejantes.

EJEMPLOS:

$$\text{Sumar, } \frac{2a}{5b} + \frac{3b}{7a} + \frac{2b}{5a} = \frac{(2a)(7a)+(3b)(5b)+(2b)(7b)}{35ab}$$

$$= \frac{14a^2+15b^2+14b^2}{35ab} = \frac{14a^2+29b^2}{35ab}$$

$$\text{Sumar, } \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{x-3}{x^2-9} + \frac{x+3}{x^2+6x+9} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3}$$

$$= \frac{x+3+x-2+x-2}{x^2+x-6} = \frac{3x-1}{x^2+x-6}$$

$$\text{Sumar, } \frac{5x-5y}{x^2-y^2} + \frac{x^2+xy+y^2}{x^3-y^3} + \frac{3}{x+y} =$$

$$= \frac{5}{x+y} + \frac{1}{x-y} + \frac{3}{x+y} = \frac{8}{x+y} + \frac{1}{x-y}$$

$$= \frac{8(x-y)+1(x+y)}{x^2-y^2} = \frac{9x-7y}{x^2-y^2}$$

Propiedades de la suma con fracciones algebráicas.

La suma de fracciones algebráicas, es una operación conmutativa y asociativa, es decir:

Conmutativa; porque indistintamente, se puede obtener la misma suma, a pesar de cambiar el orden de los sumandos.

EJEMPLO:

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{12+4+3}{18} = \frac{19}{18} = 1\frac{1}{18}$$

$$\frac{2}{9} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{4+12+3}{18} = \frac{19}{18} = 1\frac{1}{18}$$

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{9} + \frac{2}{3} = \frac{3+4+12}{18} = \frac{19}{18} = 1\frac{1}{18}$$

Asociativa; porque se puede agrupar dos o más sumandos, y obtener una suma parcial que, agregada a los sumandos restantes, da el mismo resultado, que efectuada la suma en forma corriente.

EJEMPLO:

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{5}{4} = \frac{36+40+45+20+12+75}{60}$$

$$= \frac{228}{60} = 3\frac{48}{60} = 3\frac{4}{5}$$

Asociando fracciones, con el mismo denominador, se tiene:

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}=1$$

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{8}{4}=2$$

Por tanto, $\frac{4}{5}+1+2=3\frac{4}{5}$

Ley de cerradura para la adición de fracciones.

Dados, los números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, en ese orden, existe un único número racional, llamado la suma de estos dos números racionales.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\text{número racional}=\frac{ad+bc}{bd}$$

Suma de fracciones con denominadores monomios.

EJEMPLO:

Sumar, $\frac{2}{5x^2}$ y $\frac{1}{3xy}$

Hay que reducir las fracciones, al mínimo común denominador.

El m.c.m. de los denominadores es $15x^2y$, dividiendo $15x^2y$, entre los denominadores, tenemos;

$15x^2y \div 5x^2 = 3y$ y, $15x^2y \div 3xy = 5x$, estos cocientes, los multiplicamos por los numeradores respectivos y tenemos.

$$\frac{2}{5x^2}+\frac{1}{3xy}=\frac{2(3y)+5x(1)}{15x^2y}$$

sumando los numeradores $=\frac{6y+5x}{15x^2y}$

EJEMPLO;

Sumar, $\frac{a-4x}{2xa}+\frac{a-2}{5a^2}+\frac{1}{10a}$

El m.c.m. de los denominadores es, $10xa^2$. Dividiendo $10xa^2$ entre cada denominador y multiplicando los cocientes por el numerador respectivo, se tiene:

$$\frac{a-4x}{2xa}+\frac{a-2}{5a^2}+\frac{1}{10a}=\frac{5a(a-4x)+2x(a-2)+xa}{10xa^2}$$

multiplicando $=\frac{5a^2-20xa+2xa-4x+xa}{10xa^2}$

reduciendo términos semejantes $=\frac{5a^2-17xa-4x}{10xa^2}$

AUTOEVALUACION 2.

Efectuar, las operaciones indicadas y simplificar.

1.- $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{2}{3}=\frac{\qquad}{4}$

2.- $\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\frac{5}{12}=\frac{\qquad}{18}$

3.- $\frac{u}{9}+\frac{v}{2}+\frac{4u-9v}{18}=\frac{\qquad}{3}$

4.- $\frac{1}{6y}+\frac{1}{3x}+\frac{2x+3y}{12xy}=\frac{\qquad}{12xy}$

5.- $\frac{2}{3b}+\frac{3}{2a}+\frac{2a-3b}{2ab}=\frac{\qquad}{ab}$

6.- $\frac{5a}{12bc}+\frac{4b}{9ac}+\frac{3c}{16ab}=\frac{\qquad}{144abc}$

7.- $\frac{3yz}{4x^2}+\frac{5}{8xyz}+\frac{7x}{36yz^2}=\frac{\qquad}{72x^2yz^2}$

8.- $\frac{h}{10k} + \frac{2h^2-5k^2}{20hk} + \frac{k}{12h} = \frac{\quad}{30hk}$

9.- $\frac{2u}{9v^2} + \frac{5v}{18u^2} + \frac{u^2}{12v^3} = \frac{\quad}{36u^2v^3}$

10.- $\frac{4c}{5a^2b} + \frac{3b}{10ac^2} + \frac{5a}{6b^2c} = \frac{\quad}{30a^2b^2c^3}$

Suma de fracciones con denominadores polinomios.

EJEMPLO:

Sumar, $\frac{1}{3a+3} + \frac{1}{2a-2} + \frac{1}{a^2-1}$

Se factorizan los binomios, para encontrar el m.c.m. de los denominadores:

$3a+3 = 3(a+1)$

$2a-2 = 2(a-1)$ m.c.m. $= 6(a+1)(a-1)$

$a^2-1 = (a+1)(a-1)$

dividiendo el m.c.m., entre cada denominador y multiplicando cada cociente, por el numerador respectivo, tenemos:

$$\frac{1}{3a+3} + \frac{1}{2a-2} + \frac{1}{a^2-1} = \frac{2(a-1)+3(a+1)+6}{6(a+1)(a-1)}$$

multiplicando $= \frac{2a-2+3a+3+6}{6(a+1)(a-1)}$

reduciendo términos semejantes $= \frac{5a+7}{6(a+1)(a-1)}$

EJEMPLO:

Sumar, $\frac{x-1}{x^2-4} + \frac{x-2}{x^2-x-6} + \frac{x+6}{x^2-5x+6}$

Se encuentra el m.c.m. de los denominadores:

$x^2-4 = (x+2)(x-2)$

$x^2-x-6 = (x-3)(x+2)$ m.c.m. $= (x+2)(x-2)(x-3)$

$x^2-5x+6 = (x-3)(x-2)$

dividiendo el denominador común, entre cada denominador y multiplicando los cocientes, por los numeradores respectivos, se tiene:

$$\frac{x-1}{x^2-4} + \frac{x-2}{x^2-x-6} + \frac{x+6}{x^2-5x+6} = \frac{(x-1)(x-3)+(x-2)^2+(x+2)(x+6)}{(x+2)(x-2)(x-3)}$$

multiplicando $= \frac{x^2-4x+3+x^2-4x+4+x^2+8x+12}{(x+2)(x-2)(x-3)}$

reduciendo términos semejantes $= \frac{3x^2+19}{(x^2-4)(x-3)}$

AUTOEVALUACION 3.

Efectuar las operaciones siguientes y simplificar:

1.- $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{\quad}{x^2-1}$

2.- $\frac{1}{3a-2b} + \frac{a-b}{9a^2-4b^2} = \frac{\quad}{9a^2-4b^2}$

3.- $\frac{2}{x^2-xy} + \frac{2}{xy+y^2} = \frac{\quad}{xy(x^2-y^2)}$

4.- $\frac{xy}{9x^2-y^2} + \frac{x}{3x+y} = \frac{\quad}{9x^2-y^2}$

5.- $\frac{y+1}{10} + \frac{y-3}{5y-10} + \frac{y-2}{2} = \frac{\qquad}{10(y-2)}$

6.- $\frac{a}{x^2-xa} + \frac{x+a}{xa} + \frac{x}{xa-a^2} = \frac{\qquad}{a(x-a)}$

7.- $\frac{1}{b+b^2} + \frac{1}{b-b^2} + \frac{b+3}{1-b^2} = \frac{\qquad}{b(1-b)}$

8.- $\frac{z-a}{z+a} + \frac{z+a}{z-a} + \frac{4za}{z^2-a^2} = \frac{\qquad}{z-a}$

9.- $\frac{c-2}{2c^2-5c-3} + \frac{c-3}{2c^2-3c-2} + \frac{2c-1}{c^2-5c+6} = \frac{\qquad}{(2c+1)(c-2)(c-3)}$

10.- $\frac{k-2}{k-1} + \frac{k+3}{k+2} + \frac{k+1}{k-3} = \frac{\qquad}{(k-1)(k+2)(k-3)}$

1-6 RESTA DE FRACCIONES ALGEBRAICAS.

Definición.

La sustracción o resta, es una operación que tiene por objeto, hallar lo que falta a un número, para igualar a otro mayor de la misma especie; o también, hallar uno de dos sumandos, cuando se conocen la suma y el otro sumando.

La suma dada, se llama minuendo, el sumando conocido, se llama sustraendo, y el sumando que se busca, se denomina resta o diferencia.

El signo de la sustracción, es una rayita horizontal (-) que se lee menos, y que se coloca entre el minuendo y el sustraendo.

Para restar fracciones algebráicas, se reducen las fracciones a un común denominador y se restan los numeradores.

EJEMPLOS:

1) $\frac{3}{2a} - \frac{1}{6a} = \frac{9-1}{6a} = \frac{8}{6a} = \frac{4}{3a}$

2) $\frac{8}{a-b} - \frac{5}{a+b} = \frac{8(a+b)-5(a-b)}{a^2-b^2} = \frac{8a+8b-5a+5b}{a^2-b^2}$

$= \frac{3a+13b}{a^2-b^2}$

3) $\frac{a+3b}{a^2-9b^2} - \frac{a-5b}{a^2-25b^2} = \frac{1}{a-3b} - \frac{1}{a+5b}$

$= \frac{a+5b-(a-3b)}{a^2+2ab-15b^2} = \frac{a+5b-a+3b}{a^2+2ab-15b^2} = \frac{8b}{a^2+2ab-15b^2}$

Resta de fracciones con denominadores monomios.

EJEMPLO:

De, $\frac{x+2y}{3x}$ restar $\frac{4xy^2-3}{6x^2y}$

El m.c.m. de los denominadores es, $6x^2y$.

Dividiendo $6x^2y$ entre cada denominador y multiplicando cada cociente, por el numerador respectivo, se tiene:

$\frac{x+2y}{3x} - \frac{4xy^2-3}{6x^2y} = \frac{2xy(x+2y)}{6x^2y} - \frac{4xy^2-3}{6x^2y}$

multiplicando $= \frac{2x^2y+4xy^2}{6x^2y} - \frac{4xy^2-3}{6x^2y}$

restando los numeradores $= \frac{2x^2y+4xy^2-(4xy^2-3)}{6x^2y}$

eliminando el paréntesis $= \frac{2x^2y+4xy^2-4xy^2+3}{6x^2y}$

$= \frac{2x^2y+3}{6x^2y}$

obsérvese que para restar $4xy^2-3$ del primer numerador hay que cambiar el signo a cada uno de sus términos, y esta operación la indicamos, incluyendo $4xy^2-3$ en un paréntesis, precedido del signo (-).

Resta de fracciones con denominadores polinomios.

EJEMPLO:

Restar, $\dfrac{x}{xy-y^2} - \dfrac{1}{y}$

Se encuentra el m.c.m. de los denominadores:

$xy-y^2 = y(x-y)$ m.c.m: $y(x-y)$

$y = y$

dividiendo, $y(x-y)$ entre cada denominador y multiplicando cada cociente, por el numerador respectivo, se tiene:

$$\frac{x}{xy-y^2} - \frac{1}{y} = \frac{x-(x-y)}{y(x-y)} = \frac{x-x+y}{y(x-y)} = \frac{y}{y(x-y)} = \frac{1}{x-y}$$

EJEMPLO:

Simplificar: $\dfrac{4a^2-1}{2a^2-8} - \dfrac{(a+1)^2}{a^2+4a+4} - \dfrac{a+3}{a-2}$

Se encuentra el denominador común:

$2a^2-8 = 2(a^2-4) = 2(a+2)(a-2)$

$a^2+4a+4 = (a+2)^2$ m.c.m. $= 2(a+2)^2(a-2)$

$(a-2) = (a-2)$

dividiendo, $2(a+2)^2(a-2)$ entre cada denominador, queda:

$$\frac{4a^2-1}{2a^2-8} - \frac{(a+1)^2}{a^2+4a+4} - \frac{a+3}{a-2} = \frac{(a+2)(4a^2-1)-2(a-2)(a+1)^2-2(a+2)^2(a+3)}{2(a+2)^2(a-2)}$$

$$= \frac{(a+2)(4a^2-1)-2(a-2)(a^2+2a+1)-2(a^2+4a+4)(a+3)}{2(a+2)^2(a-2)}$$

$$= \frac{4a^3+8a^2-a-2-2(a^3-3a-2)-2(a^3+7a^2+16a+12)}{2(a+2)^2(a-2)}$$

$$= \frac{4a^3+8a^2-a-2-2a^3+6a+4-2a^3-14a^2-32a-24}{2(a+2)^2(a-2)}$$

resumiendo términos semejantes y simplificando, queda:

$$= \frac{-6a^2-27a-22}{2(a+2)^2(a-2)} = \frac{6a^2+27a+22}{2(a+2)^2(2-a)}$$

AUTOEVALUACION 4.

Efectuar las operaciones indicadas y simplificar.

Restar:

1.- $\dfrac{1}{2}$ de $\dfrac{4b}{a} = \dfrac{\qquad}{2a}$

2.- $\dfrac{2a+5}{2a}$, de $\dfrac{1}{10a} = \dfrac{\qquad}{10a}$

3.- $\dfrac{y-3}{xy}$, de $\dfrac{x+5y}{x} = \dfrac{\qquad}{x\ y}$

4.- De, $\dfrac{7x-4}{4}$, restar $\dfrac{3x+2}{3}$ $\dfrac{\qquad}{12}$

5.- De, $\dfrac{4}{rs}$, restar $\dfrac{2-t}{rt} = \dfrac{\qquad}{rst}$

6.- De, $\dfrac{b-2a}{20a}$, restar $\dfrac{a-3b}{24b} = \dfrac{\qquad}{120ab}$

7.- $\frac{3}{a^3} - \frac{2}{a^2} - \frac{1}{a} = \frac{\qquad\qquad}{a^3}$

8.- $\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} = \frac{\qquad\qquad}{x^3}$

9.- $\frac{a}{yz} - \frac{a+z}{xz} - \frac{a+y}{xy} = \frac{\qquad\qquad}{xyz}$

10.- $\frac{3}{5c} - \frac{c-1}{3c^2} - \frac{c^2+2c+3}{15c^3} = \frac{\qquad\qquad}{5c^3}$

AUTOEVALUACION 5.

Resta,

1.- $\frac{x}{2x-4}$, de $\frac{2x-5}{2-x} = \frac{\qquad\qquad}{2}$

2.- $\frac{a}{a^2-b^2}$, de $\frac{1}{a+b} = \frac{\qquad\qquad}{b^2-a^2}$

3.- $\frac{a-1}{a+3}$, de $\frac{3a}{2a+6} = \frac{\qquad\qquad}{2(a+3)}$

4.- De, $\frac{4x-7}{x^2-3x+2}$, restar $\frac{3}{x-1} = \frac{\qquad\qquad}{x-2}$

5.- De, $\frac{6m-13}{m^2-5m+6}$, restar $\frac{5}{m-3} = \frac{\qquad\qquad}{m-2}$

6.- De, $\frac{x}{x^2-25}$, restar $\frac{1}{2x+10} = \frac{\qquad\qquad}{2(x-5)}$

7.- $\frac{2}{x-1} - \frac{3}{1+x} - \frac{x-5}{1-x^2} = \frac{\qquad\qquad}{\qquad}$

8.- $\frac{a-2}{(a+2)^2} - \frac{a}{5(a+2)} - \frac{1}{25} = \frac{\qquad\qquad}{25(a+2)^2}$

9.- $\frac{a-6b}{2a^2+5ab+2b^2} - \frac{3}{2a+b} - \frac{7}{a+2b} = \frac{\qquad\qquad}{(2a+b)(a+2b)}$

10.- $\frac{a}{a^2+a-2} - \frac{3}{a^2+2a-3} - \frac{a}{a^2+5a+6} = \frac{\qquad\qquad}{(a-1)(a+2)(a+3)}$

1-7 SUMA Y RESTA COMBINADAS DE FRACCIONES ALGEBRAICAS.

EJEMPLO:

Efectuar las operaciones siguientes y simplificar:

$$\frac{a-2}{a^2-a} - \frac{a+3}{a^2+3a-4} + \frac{a^2+12a+16}{a^4+3a^3-4a^2}$$

se encuentra el común denominador:

$a^2-a = a(a-1)$

$a^2+3a-4 = (a+4)(a-1)$

$a^4+3a^3-4a^2 = a^2(a^2+3a-4) = a^2(a+4)(a-1)$

m.c.m. $= a^2(a-1)(a+4)$

se tiene:

$$\frac{a-2}{a^2-a} - \frac{a+3}{a^2+3a-4} + \frac{a^2+12a+16}{a^4+3a^3-4a^2} = \frac{a(a+4)(a-2)-a^2(a+3)+a^2+12a+16}{a^2(a-1)(a+4)}$$

multiplicando $= \frac{a^3+2a^2-8a-a^3-3a^2+a^2+12a+16}{a^2(a-1)(a+4)}$

simplificando $= \frac{4a+16}{a^2(a-1)(a+4)} = \frac{4(a+4)}{a^2(a-1)(a+4)} = \frac{4}{a^2(a-1)}$

AUTOEVALUACIÓN 6.

Efectúa las operaciones indicadas y simplifica:

1.- $\frac{5}{4} - \frac{11}{12} + \frac{5}{18} = \_\_\_\_\_\_$

2.- $\frac{1}{6y} + \frac{1}{3x} - \frac{2x+3y}{12xy} = \_\_\_\_\_\_$

3.- $\frac{5a}{12bc} + \frac{4b}{9ac} - \frac{3c}{16ab} = \frac{\_\_\_\_\_\_}{144abc}$

4.- $\frac{u}{9} - \frac{v}{2} - \frac{4u-9v}{18} = \_\_\_\_\_\_$

5.- $\frac{3x}{2x+y} + \frac{5y}{3x} - \frac{3}{2} = \frac{\_\_\_\_\_\_}{6x(2x+y)}$

6.- $\frac{x}{x-2y} + \frac{y}{2x+y} - 1 = \frac{\_\_\_\_\_\_}{(x-2y)(2x+y)}$

7.- $\frac{3u+v}{u^2-v^2} - \frac{2v}{u(u-v)} - \frac{1}{u+v} = \_\_\_\_\_\_$

8.- $\frac{x^2+4xy}{x^3+y^3} + \frac{1}{x+y} - \frac{x}{x^2-xy+y^2} = \frac{\_\_\_\_\_\_}{x^2-xy+y^2}$

9.- $\frac{a+2}{a^2-a-6} + \frac{a-4}{a^2-7a+12} - \frac{a+2}{a^2-2a-8} = \frac{\_\_\_\_\_\_}{(a-3)(a-4)}$

10.- $\frac{x}{x^2-5x-14} - \frac{2}{x-7} + \frac{x}{x^2-9x+14} = \frac{\_\_\_\_\_\_}{(x^2-4)(x-7)}$

6-8 FRACCIONES COMPLEJAS.

Si el numerador o el denominador de una fracción, o ambos, contienen a su vez fracciones, la fracción se llama, fracción compleja.

EJEMPLOS:

$$\frac{\frac{3}{2}}{5}\;;\quad \frac{1+\frac{x}{y}}{x+y}\;;\quad \frac{\frac{4x}{x+y}+\frac{2y}{x-y}}{3-\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}$$

Existen dos métodos, para reducir una fracción compleja a una simple. El primero consiste, en multiplicar el numerador y el denominador de la fracción compleja, por el m.c.m. de cada denominador que aparezca en ella.

EJEMPLO:

Reducir, la siguiente fracción compleja, a una simple.

$$\frac{1+\frac{x}{y}}{x+y}$$

se observa, que los denominadores de 1 y de (x+y), son 1. Por tanto, el m.c.m. de los denominadores de la fracción compleja es "y". Por consiguiente, se multiplican por "y" el numerador y el denominador, y se obtiene:

$$\frac{1+\frac{x}{y}}{x+y} = \frac{y(1+\frac{x}{y})}{y(x+y)} = \frac{y+x}{xy+y^2} = \frac{y+x}{y(x+y)} = \frac{1}{y}$$

EJEMPLO:

En la fracción compleja,

$$\frac{\frac{2}{x+y} - \frac{1}{x-y}}{\frac{4(x-y)}{x+y}\;\;\frac{x+y}{x-y}}$$

el m.c.m. de los denominadores es, $(x+y)(x-y)$ ó x^2-y^2. A continuación, se indican los pasos de la simplificación.

$$\frac{\frac{2}{x+y}-\frac{1}{x-y}}{\frac{4(x-y)}{x+y}-\frac{x+y}{x-y}} = \frac{\frac{2}{x+y}-\frac{1}{x-y}}{\frac{4(x-y)}{x+y}-\frac{x+y}{x-y}} \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2-y^2}$$

$$= \frac{\frac{2}{x+y}(x^2-y^2)-\frac{1}{x-y}(x^2-y^2)}{\frac{4(x-y)}{x+y}(x^2-y^2)-\frac{x+y}{x-y}(x^2-y^2)}$$

$$= \frac{2(x-y) \quad - (x+y)}{4(x-y)(x-y) - (x+y)(x+y)}$$

$$= \frac{2x-2y-x-y}{4(x^2-2xy+y^2) - (x^2+2xy+y^2)}$$

$$= \frac{x-3y}{4x^2-8xy+4y^2-x^2-2xy-y^2}$$

$$= \frac{x-3y}{3x^2-10xy+3y^2} = \frac{x-3y}{(3x-y)(x-3y)} = \frac{1}{3x-y}$$

Si las expresiones, en la fracción compleja son complicadas, resulta a veces más fácil, reducir el numerador y el denominador a fracciones simples y proceder luego, como en la división.

EJEMPLO:

Reducir, la siguiente fracción compleja.

$$\frac{\frac{x-y}{x+y}-\frac{x+y}{x-y}}{1-\frac{x^2-xy-y^2}{x^2-y^2}} = \frac{\frac{(x-y)^2-(x+y)^2}{(x+y)(x-y)}}{\frac{x^2-y^2-(x^2-xy-y^2)}{x^2-y^2}}$$

$$= \frac{\frac{x^2-2xy+y^2-x^2-2xy-y^2}{x^2-y^2}}{\frac{x^2-y^2-x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}} = \frac{\frac{-4xy}{x^2-y^2}}{\frac{xy}{x^2-y^2}}$$

$$= \frac{-4xy}{x^2-y^2} \cdot \frac{x^2-y^2}{xy} = -4$$

Si el numerador o el denominador de una fracción compleja, o ambos, son a su vez fracciones complejas, cada una debe de reducirse, a una fracción simple, como primer paso de la simplificación.

EJEMPLO:

Reducir, la siguiente fracción compleja.

$$\frac{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x-1}}}{\frac{1}{1-\frac{1}{x+1}}} = \frac{1+\frac{x-1}{x-1+1}}{\frac{x+1}{x+1-1}} = \frac{1+\frac{x-1}{x}}{\frac{x+1}{x}}$$

En el paso anterior, los dos miembros de la fracción compleja, se han multiplicado en el numerador por (x-1) y en el denominador por (x+1).

$$= \frac{x+x-1}{x+1} = \frac{2x-1}{x+1}$$

Se ha multiplicado el numerador y el denominador por x.

AUTOEVALUACION 7.

Reducir a fracciones simples, las siguientes fracciones complejas:

$$\frac{1+\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}} =$$

2.- $\dfrac{4 + \frac{2}{5}}{1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5}} =$

3.- $\dfrac{\frac{4}{3z} + \frac{8}{9y}}{1 + \frac{2z}{3y}} =$

4.- $\dfrac{1 + \frac{3b}{a-2b}}{1 + \frac{b}{a-2b}} = \dfrac{\quad}{a-b}$

5.- $\dfrac{5 + \frac{4}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x-1}} =$

6.- $\dfrac{\frac{3}{2} - \frac{2}{3}}{1 - \frac{5}{6}} =$

7.- $\dfrac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^3}} = \dfrac{\quad}{x^2+x+1}$

8.- $\dfrac{4c - \frac{3d^2}{c-d}}{2c-5d+ \frac{d^2}{c-d}} = \dfrac{\quad}{c-2d}$

9.- $\dfrac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{d}}}$

10.- $\dfrac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{d-1}}} =$

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DE LA LECCIÓN 2.

AUTOEVALUACION 1.

1.- $25a^3bc$

2.- $12r^3st^4$

3.- $4a^2+6a$

4.- $6x^2+13xy+6y^2$

5.- $9a^2-16b^2$

6.- $\dfrac{2a^3c^2}{36a^2c^3}, \dfrac{16a^2b^2c}{36a^2c^3}, \dfrac{15c^3}{36a^2c^3}$

7.- $\dfrac{80x^3z}{180x^2y^2z^2}, \dfrac{75xy^3}{180x^2y^2z^2}, \dfrac{96yz^3}{180x^2y^2z^2}$

8.- $\dfrac{90vw^4}{216u^2v^2w^2}, \dfrac{63uv^4}{216u^2v^2w^2}, \dfrac{64wu^4}{216u^2v^2w^2}$

9.- $\dfrac{a(a^2-b^2)}{(a^2-b^2)^2}, \dfrac{(a-b)^3}{(a^2-b^2)}, \dfrac{(a+b)^3}{(a^2-b^2)^2}$

10.- $\dfrac{(2u+v)^2}{(4u^2-9v^2)(2u+v)}, \dfrac{(2u-3v)^2}{(4u^2=9v^2)(2u+v)}$

$\dfrac{(2u+3v)^2}{(4u^2-9v\ )(2u+v)}$

AUTOEVALUACIÓN 2.

1.- 9

2.- 29

3.- u

4.- $4x+7y$

5.- $a+b$

6.- $60a^2+64b^2+27c^2$

7.- $54y^2z^3+45xz+14x^3$

8.- $6h^2-5k^2$

9.- $8u^3v+10v^4+3u^4$

10.- $24bc^3+9ab^3+25a^3c$

AUTOEVALUACIÓN 3.

1.- $2x$

2.- $4a+b$

3.- $2x^2+2y^2$

4.- $3x^2$

5.- $6y^2-19y+12$

6.- $2x$

7.- $b+2$

8.- $2(z+a)$

9.- $6c^2-10c+12$

10.- $3k^3-2k^2-14k+19$

AUTOEVALUACIÓN 6.

1.- $\frac{11}{18}$

2.- $\frac{1}{12x}$

3.- $60a^2+64b^2-27c^2$

4.- $-\frac{u}{9}$

5.- $10y^2+11xy$

6.- $5xy$

7.- $\frac{2}{u}$

8.- $x+y$

9.- $a-5$

10.- 8

AUTOEVALUACIÓN 7.

1.- 1

2.- 3

3.- $\frac{4}{3z}$

4.- $a+b$

5.- $1-5x$

6.- 5

7.- x^2

8.- $2c+d$

9.- $d+1$

10.- $-d+1$

AUTOEVALUACION 4.

1.- $8b-a$
2.- $1-10a-25$
3.- $5y^2+xy-x+3$
4.- $9x-20$
5.- $4t-2s+st$
6.- $6b^2+3ab-5a^2$
7.- $3-2a-a^2$
8.- x^2-2x-1
9.- $a(x-y-z)-2yz$
10.- c^2+c-1

AUTOEVALUACION 5.

1.- -5
2.- b
3.- $a+2$
4.- 1
5.- 1
6.- 1
7.- 0
8.- $-6a^2+11a-54$
9.- $-16a-19b$
10.- $a-6$

CAPITULO 2.
RELACIONES Y FUNCIONES.

2-1 INTRODUCCIÓN.

La mayoría de las personas tienen la idea de que números y matemáticas es lo mismo. Es común que al hablar de un matemático, se opine que dicha persona vive sumergida en un mundo en el que solo hay números, con los cuales adquiere tal familiaridad que, incluso, es de esperarse que realice operaciones aritméticas en un abrir y cerrar de ojos. Sin embargo, tal opinión es falsa, más con ello no queremos decir que sea falso que los números sean conceptos muy importantes para la matemática y por consecuencia para el matemático; lo que intentamos aclarar es que el concepto de número, a pesar de su gran importancia, no es el único que ocupa el interés de la matemática, pues hay muchísimos otros tanto o más importantes que éste. Además, el concepto de número no es elemental, es decir, no es posible alcanzar su comprensión sin que previamente se hayan entendido otros conceptos que sí son elementales.

En este contexto la palabra elemental no significa necesariamente sencillo o fácil; aquí se refiere a un concepto que ya no puede ser explicado en términos de otros y que, además, a partir de él se pueden construir conceptos más elaborados y complejos.

Si nos viéramos obligados a definir lo que es la matemática con un mínimo de palabras, estaríamos más cerca de la realidad al decir que es la cienica que se dedica al estudio

AUTOEVALUACION 4.

1.- $8b-a$
2.- $1-10a-25$
3.- $5y^2+xy-x+3$
4.- $9x-20$
5.- $4t-2s+st$
6.- $6b^2+3ab-5a^2$
7.- $3-2a-a^2$
8.- x^2-2x-1
9.- $a(x-y-z)-2yz$
10.- c^2+c-1

AUTOEVALUACION 5.

1.- -5
2.- b
3.- $a+2$
4.- 1
5.- 1
6.- 1
7.- 0
8.- $-6a^2+11a-54$
9.- $-16a-19b$
10.- $a-6$

CAPITULO 2.
RELACIONES Y FUNCIONES.

2-1 INTRODUCCIÓN.

La mayoría de las personas tienen la idea de que números y matemáticas es lo mismo. Es común que al hablar de un matemático, se opine que dicha persona vive sumergida en un mundo en el que solo hay números, con los cuales adquiere tal familiaridad que, incluso, es de esperarse que realice operaciones aritméticas en un abrir y cerrar de ojos. Sin embargo, tal opinión es falsa, más con ello no queremos decir que sea falso que los números sean conceptos muy importantes para la matemática y por consecuencia para el matemático; lo que intentamos aclarar es que el concepto de número, a pesar de su gran importancia, no es el único que ocupa el interés de la matemática, pues hay muchísimos otros tanto o más importantes que éste. Además, el concepto de número no es elemental, es decir, no es posible alcanzar su comprensión sin que previamente se hayan entendido otros conceptos que sí son elementales.

En este contexto la palabra elemental no significa necesariamente sencillo o fácil; aquí se refiere a un concepto que ya no puede ser explicado en términos de otros y que, además, a partir de él se pueden construir conceptos más elaborados y complejos.

Si nos viéramos obligados a definir lo que es la matemática con un mínimo de palabras, estaríamos más cerca de la realidad al decir que es la cienica que se dedica al estudio de las funciones, que si dijéramos, como es común, que es la ciencia que se dedica al estudio de los números.

Tradicionalmente el concepto "función" ha estado íntimamente asociado, en nuestro lenguaje diario, con la noción de "variación" o "cambio". Históricamente, ésta parece ser la motivación que condujo a introducir la idea de función en la matemática: si la masa M de un cuerpo varía, entonces la fuerza F que lo mueve varía también, en función de la masa según la ley F=Ma; si el radio r de un círculo varía, entonces, el área A del círculo varía también en función del radio según la fórmula $A = \pi r^2$; durante muchos años esta fué la única interpretación que se dió al concepto de función.

La definición de función que nosotros adoptamos fué introducida en la matemática en el presente siglo. Tiene la peculiaridad de que cubre la noción "relación entre dos variables", pero asimismo, describe o mejor dicho, permite describir relaciones de carácter mucho más general entre elementos de dos conjuntos. En nuestro caso, los dos conjuntos pueden ser enteramente arbitrarios y la relación o regla que asocie a sus elementos admite un grado de generalidad mucho más allá de la dependencia de carácter algebráico entre dos números.

Una de las cualidades que se le puede atribuir a la idea de función que adoptamos, consiste en su amplia aplicabilidad y cómodo manejo en casi todas las disciplinas del conocimiento humano, por ejemplo: Biología, Economía, Antropología, Sociología, Lingüística, Demografía, Genética, etc.; lo cual ha hecho de la matemática un lenguaje adecuado para la descripción de una amplísima gama de fenómenos, sin más limitaciones en esta aplicabilidad, que el ingenio del usuario.

2-2 CORRESPONDENCIA DE UNO A UNO.

Dados dos conjuntos A y B decimos que están en *correspondencia de uno a uno* si es posible aparear sus elementos en tal forma que cada uno de los elementos de A esté apareado con exactamente un elemento de B y cada uno de los elementos de B esté apareado con exactamente un elemento de A.

Ejemplo 1.

A = {a, b, c} y B = {2, 4, 6}

Están *en correspondencia de uno a uno* porque podemos mostrar los siguientes pares de elementos:

A = {a, b, c}
↕ ↕ ↕
B = {2, 4, 6}

La anterior no es la única manera de aparear los elementos de A con los elementos de B. La siguiente también es posible:

A = {a, b, c}

B = {2, 4, 6}

Los conjuntos A y B, que hemos usado, son conjuntos *finitos*: ambos tienen tres elementos. En una forma muy simple *podemos decir que un conjunto es finito si el número de sus elementos es cero o un número natural.* Todo conjunto que no es finito es *infinito*.

Ejemplo 2.

$$A = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Es *infinito porque el número de sus elementos no es ni cero ni un número natural.*

Dos conjuntos *finitos*, cuando es posible ponerlos en correspondencia de uno a uno, tienen el mismo número de elementos.

2-3 RELACIONES BINARIAS.

Par ordenado.

El concepto de *par ordenado* es muy importante en matemáticas.

Un par ordenado tiene dos elementos tomados en un orden preciso.

Ejemplo 3.

La dirección de un domicilio, nos da un par ordenado, el nombre de la calle y el número,

Ave. Juárez 35

Un par ordenado se escribe encerrándolo entre paréntesis y separando sus componenetes con una coma, (Ave. Juárez, 35). Ave. Juárez representa al *primer elemento* del par ordenado y 35 al *segundo*.

Si consideramos el par ordenado (7,3) no será el mismo que el par ordenado (3,7):

(7, 3): primer elemento 7; segundo 3.

(3, 7): primer elemento 3; segundo 7.

El par ordenado (7,3) tiene como su *opuesto* el par ordenado (3,7). Dichos pares son opuestos. El alumno debe aprender a localizar puntos en el plano, podemos mostrar lo anterior:

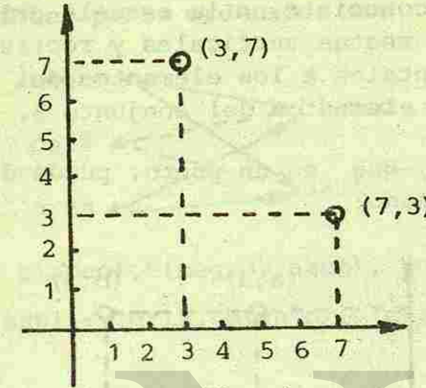


Fig. 1.

Producto cartesiano.

Supongamos que tenemos los conjuntos $A = \{a, b\}$ y $B = \{2, 3\}$. El *producto cartesiano* de los conjuntos A y B, escrito A X B, es el *conjunto* de todos los *pares ordenados* cuyos primeros elementos los tomamos de A y cuyos segundos se toman de B:

$A = \{a, b\}$

$B = \{2, 3\}$

$A \times B = \{(a,2), (a,3), (b,2), (b,3)\}$

Para estos conjuntos A y B, podemos considerar otro producto cartesiano y obtener un conjunto de *pares ordenados* completamente diferentes:

$A = \{a, b\}$

B = {2, 3}

B X A= {(2,a), (2,b), (3,a), (3,b)}

Representemos lo anterior gráficamente. Usemos esquemas como los que tú conociste en la escuela primaria. Tracemos una cuadrícula: rectas verticales y rectas horizontales. Asignemos las horizontales a los elementos del conjunto A y las verticales a los elementos del conjunto B.

La *intersección*, que es un punto, puede designarse por medio de un par ordenado:

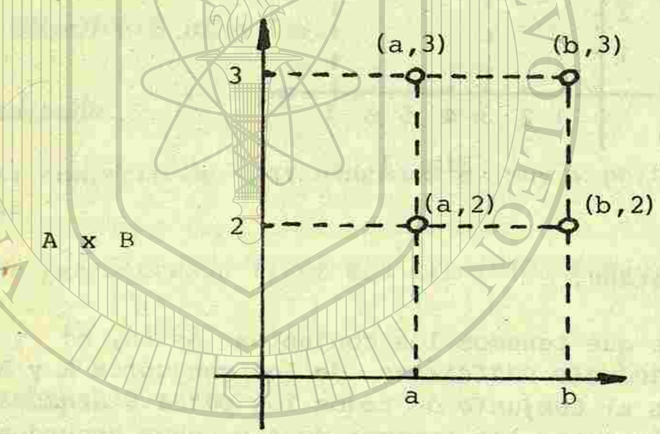


Fig. 2.

Obsérvese cuántos elementos tienen los conjuntos A y B y cuántos pares ordenados fue posible formar.

Ejemplo 4.

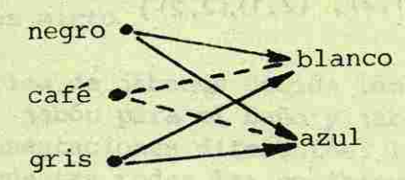
Un muchacho tiene tres pantalones: uno negro, otro café y otro gris. También cuenta con dos camisas: una blanca y otra azul. Encontrar de cuántas maneras diferentes es posible que se vista, tomando como primeros elementos a los pantalones.

Nombremos P, al conjunto de los pantalones y C al de las camisas:

P = {negro, café, gris}

C = {blanco, azul}

Los posibles pares ordenados son:



(negro, blanco), (negro, azul), (café, blanco)

(café, azul), (gris, blanco), (gris, azul)

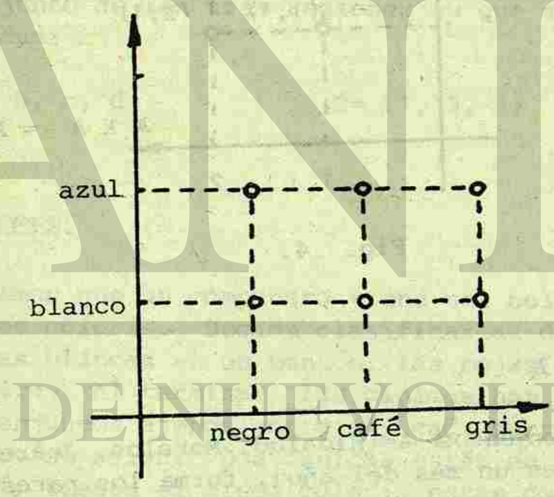


Fig. 3.

O sea que el *producto cartesiano* nos da seis pares ordenados que representan las seis posibles maneras de vestirse.

¿Cuántas maneras diferentes de vestir encontrarías si consideras como primer conjunto al de las camisas?

Hasta ahora hemos considerado dos conjuntos diferentes pero el conjunto A puede no ser diferente del conjunto B; por ejemplo A X A es el producto cartesiano de A por sí mismo. Si el conjunto A = {1,2}los pares ordenados serían:

$A \times A = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

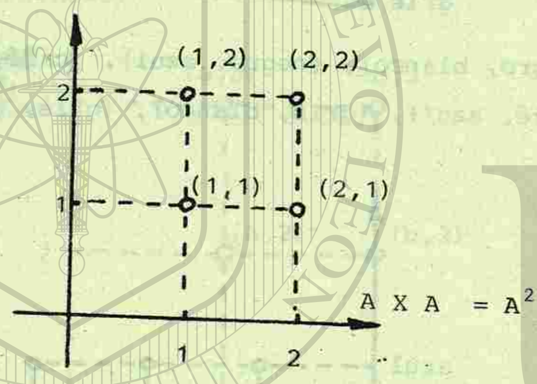


Fig. 4.

AUTOEVALUACIÓN 1.

1.- Dados los conjuntos: A={Hidalgo, Morelos, Juárez, Bolívar} y B= {x|x es un mes del año}, forma los pares ordenados pensando en el mes de nacimiento de cada uno de los elementos del conjunto A. Toma primero a los elementos del conjunto A.

2.- Forma los pares ordenados del producto cartesiano AXB, de los conjuntos siguientes:

A= {arroz, fideos} y B= {huevos, legumbres, carne}

3.- En un club se tienen los siguientes conjuntos de jugadores de tenis:

A= {Luis, Juan}

B= {Margarita, Alba, Esthela}

Encuentra todas las posibles formas de tener un equipo de dobles mixto.

4.- Una fábrica de jabones decide lanzar a la venta dos productos: jabón para el baño y jabón para la ropa, en tres presentaciones diferentes: líquida, sólida y en polvo. Encuentra todas las posibles opciones que se ofrecerán al consumidor.

5.- Calcule el producto cartesiano A X C cuando A es el conjunto de cuatro agentes vendedores de una empresa y C - el conjunto de las tres regiones en que se ha dividido la ciudad:

A= {a, b, c, d} C= {1, 2, 3}

2-4 RELACIONES.

Supongamos que un compañero tiene una bolsa con canicas de diferentes colores. Decide clasificarlas de acuerdo con el color, las blancas en un montón, las rojas en otro, las azules en otro. Al terminar, las canicas han quedado separadas en subconjuntos ajenos entre sí, cada subconjunto se caracteriza por su color. Dos canicas están en el mismo montón, si y solo sí, tienen el mismo color: estas dos canicas decimos que están *relacionadas* por la propiedad de tener el mismo color. Si no tienen el mismo color no se les puede *relacionar*. Nuestro universo es ahora el de las canicas. Las *relaciones* establecen *proposiciones abiertas* con dos variables siendo una variable un símbolo que admite la posibilidad de representar cualquier elemento de un conjunto dado.

"a" tiene el mismo color que "b" en esta proposición abierta, consideramos a las canicas que pueden ocupar los lugares de "a" y "b".

Ejemplo 5.

Sean los conjuntos A= {1,2} y B= {3,4} y la propiedad que *relaciona* a sus elementos:

R = "a" tiene una unidad menos que "b". Encontrar los posibles pares ordenados que cumplen la propiedad indicada en la proposición abierta.

Escribamos todas las parejas del producto cartesiano,

A X B = {(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)};

de estos pares ordenados hay solamente uno (2,3) que cumple la propiedad establecida por la proposición abierta. Este par por tanto, está en la *relación* que llamaremos *R*:
R = {(2,3)}, lo anterior se representa con la notación:

A *R* B

Ejemplo 6.

Sea el conjunto A= {1,2,3,4}. Si establecemos para los elementos de estos conjuntos que deba cumplirse la propiedad

"a" es divisor de "b"

Encontrar las posibles parejas que la cumplan. Escribimos los pares ordenados del producto cartesiano A X A:

A X A: {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), ~~(3,2)~~, (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)}

Los pares ordenados que cumplen con la propiedad establecida y que están, por tanto, en la relación son:

R = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)}

Si observamos con cuidado estos dos ejemplos, obtendremos conclusiones:

a) ¿Qué es una *relación?*

Una relación es un conjunto de pares ordenados.

b) ¿Qué relación existe entre *R* y el producto cartesiano?

La relación que existe es la relación de inclusión; toda relación es un subconjunto del producto cartesiano.

$R \subset (A \times B)$ $\qquad$ $R \subset A \times A$

Ejemplo 7.

Si nuestro universo es U = {enteros positivos} y tenemos la proposición abierta con dos variables: $3x + y = 8$, encontremos los posibles pares ordenados que la hagan verdadera.

Escribamos de la siguiente manera nuestra proposición abierta:

$$y = 8 - 3x$$

Ensayemos valores para x que nos den el valor de y:

Si $x = 0$; $y= 8- 3(0) = 8$; par ordenado (0, 8)
$x = 1$; $y= 8- 3(1) = 5$; par ordenado (1, 5)
$x = 2$; $y= 8- 3(2) = 2$; par ordenado (2, 2)
$x = 3$; $y= 8- 3(3) =-1$; par ordenado (3,-1)

Como nuestro universo es {enteros positivos}, no podemos aceptar el último par ordenado obtenido; el segundo componente de ese par es un entero negativo.

Los pares ordenados que cumplen, haciendo verdadera la proposición abierta, dentro del universo establecido, son:

$$R = \{(0,8), (1,5), (2,2)\}$$

Son pares ordenados, ya que (0,8) es una solución, per el par opuesto (8,0) no lo es:

$3(8) + 0 \neq 8; \qquad 24 + 0 \neq 8$

2-5 GRÁFICAS DE RELACIONES.

En nuestro salón de clases hemos escogido entre los alumnos a los más altos, los datos que obtuvimos son los si- guientes:

Hombres: { Juan: 1.60 ; Ernesto: 1.45 }   Mujeres: { Carmen: 1.4 ; Rosalba: 1.4 }

Con estos elementos podemos formar los conjuntos:

H = {Juan, Ernesto};   M= {Carmen, Rosalba}

Utilizando las iniciales de sus elementos podemos form el producto cartesiano H X M:

H X M = {(J,C), (J,R), (E,C), (E,R)} ;

si establecemos una relación en H X M mediante la aplicación de la proposición abierta: "a" tiene más estatura que "b", tendríamos:

$$R = \{(J, C), (J, R), (E, R)\}$$

ya que éstas son las parejas que hacen verdadera la proposición abierta.

Podemos representar lo anterior mediante una gráfica cartesiana:

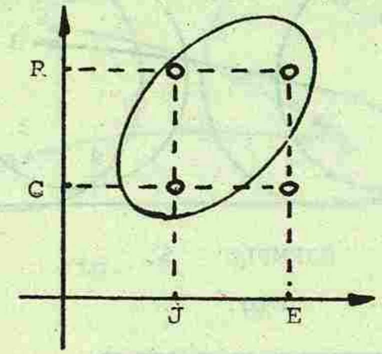


Fig. 5.

Observamos que la *relación* en H X M es una parte del producto cartesiano H X M.

Otra forma de representar gráficamente las relaciones consiste en emplear lo que llamamos "gráficas sagitales" (por el hecho de emplear flechas). Una gráfica sagital para el caso anterior sería:

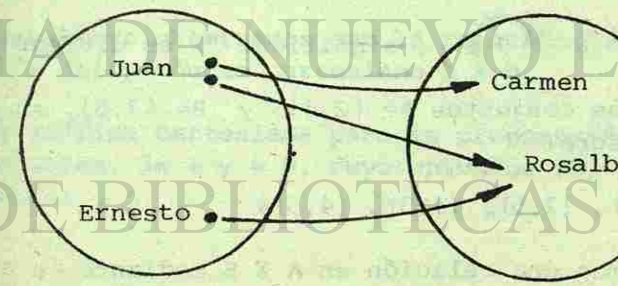
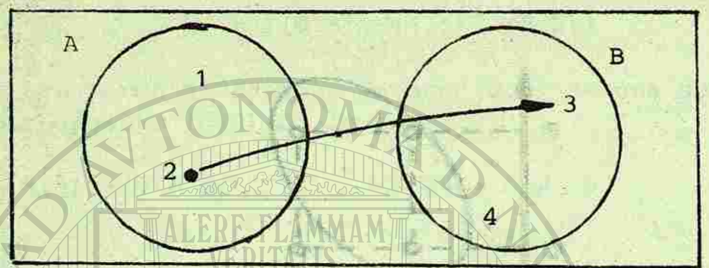


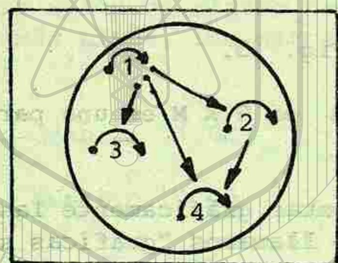
Fig. 6.

Podemos mostrar las relaciones de los ejemplos 5 y 6 en las siguientes gráficas sagitales.



EJEMPLO 5.

Fig. 7.



EJEMPLO 6.

Fig. 8.

En el ejemplo 6 1 , significa: "1 es divisor de 1".

Si tenemos los conjuntos A= {2,4} y B= {3,5}, su producto cartesiano será:

A X B= {(2,3), (2,5), (4,3), (4,5)}

Si establecemos una relación en A X B mediante la aplicación de la proposición abierta, "a" es menor que "b" tendremos los pares ordenados siguientes:

$\mathcal{R}$ = {(2,3), (2,5), (4,5)}

Las gráficas sagital y cartesiana para esta relación serían:

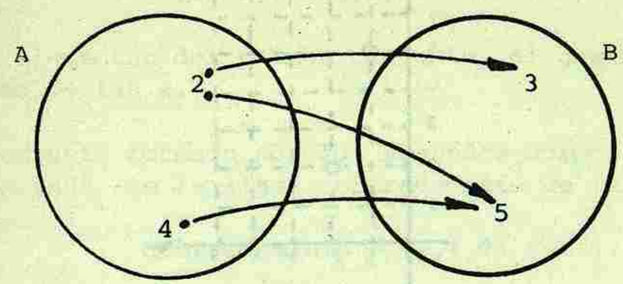


Fig. 9.

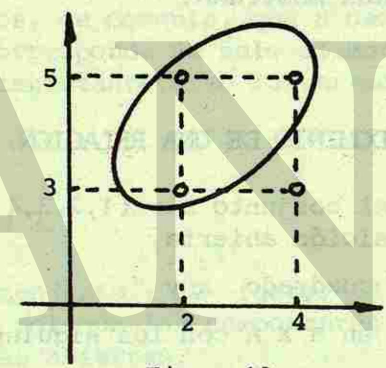


Fig. 10.

Nuevamente observamos que la relación ($\mathcal{R}$), en A X B, es una parte del producto cartesiano A X B.

La gráfica cartesiana para la proposición abierta, en dos variables, 3x + y = 8, cuyo universo es, {enteros positivos}, sería:

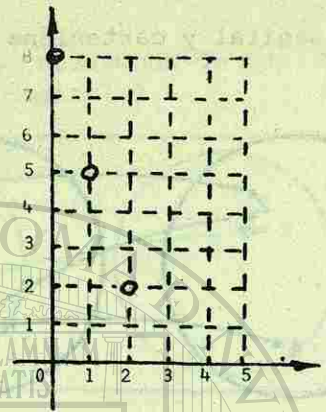


Fig. 11.

Traza las gráficas cartesianas de los ejemplos cuyas gráficas sagitales hemos mostrado.

2-6 DOMINIO Y CONTRADOMINIO DE UNA RELACION.

Si consideramos al conjunto A = {1,2,3,4,5,6,7,8,9} y le aplicamos la proposición abierta,

"x tiene por cuadrado a y ",

tendremos la relación en A X A con los siguientes pares ordenados:

$R = \{(1,1), (2,4), (3,9)\}$

cuya gráfica sagital es:

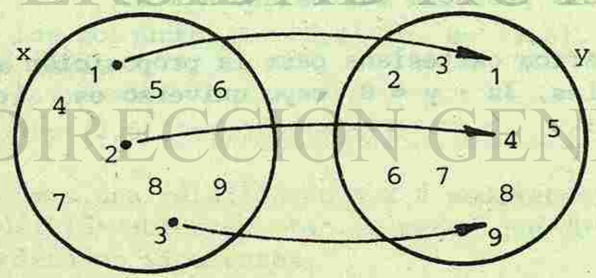


Fig. 12.

Al conjunto formado por los primeros componentes de cada par ordenado, se le llama *dominio de la relación:*

Dominio = {1,2,3}

todos son elementos del primer conjunto, al que hemos llamado conjunto de las x.

Al conjunto formado por los segundos componentes de cada par ordenado, se le llama contradominio de la relación:

Contradominio = {1,4,9}

en este segundo conjunto, llamado de las y, están los elementos que calificamos de *imágenes* de los elementos del dominio.

Observamos, de momento, que a cada elemento del primer conjunto le corresponde un solo elemento del segundo conjunto. Esto es importante como lo veremos más adelante.

AUTOEVALUACION 2.

1.- Dado el conjunto : P= {gato, (2^2), pato, (2+2), malo, loma} ; coloque los componentes de las siguientes proposiciones abiertas:

a) _______ es lo mismo que ____________.

b) _________ tiene las mismas letras que ____________.

c) _________ tiene el mismo número de letras que________.

2.- Un grupo de cirujanos dice prestar sus servicios en las siguientes instituciones:

Juan, Mario, Felipe en el I.M.S.S.
Mario y Juan en el I.S.S.S.T.E.
Juan y Alberto en el S.S.A.

Completa la gráfica sagital para la proposición abierta "a" es médico de "b".

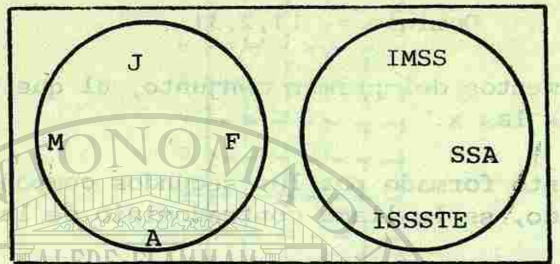


Fig. 13.

3.- Observa los diagramas, une con las flechas aquellos elementos, que cumplan con la proposición abierta: "x" es la mitad de "y".

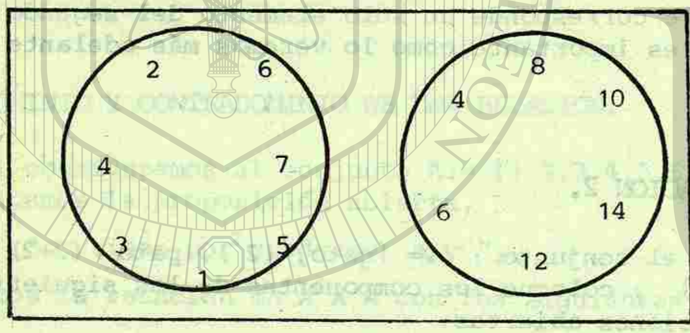
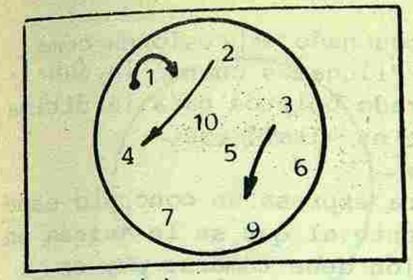


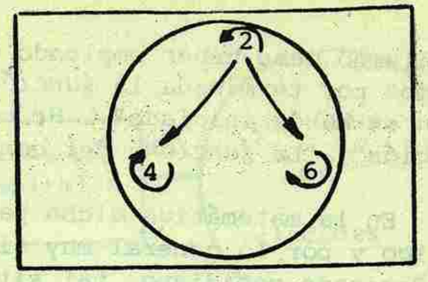
Fig. 14.

Para el ejercicio anterior escribe, dentro de paréntesis, los componentes de las parejas ordenadas de la relación.

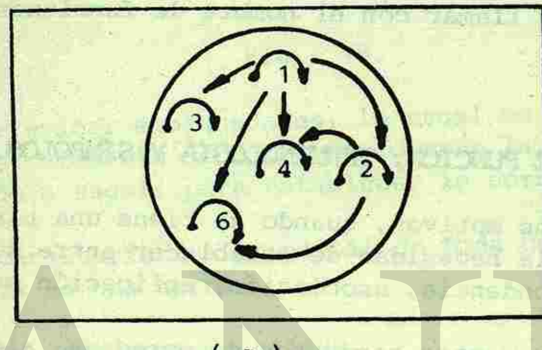
4.- Observa las siguientes gráficas sagitales:



(a)
Fig. 15.



(b)
Fig. 16.



(c)
Fig. 17.

Encuentra una proposición abierta en dos variables que tenga a cada uno de estos diagramas como gráfica.

5.- Escribe los elementos del dominio y del contradominio en la relación del problema 3.

6.- En el problema 4, inciso (a), escribe los pares ordenados de la relación y los elementos del dominio y contradominio.

2-7 FUNCIONES.

Uno de los conceptos básicos de la matemática es el de *función*. Esta palabra es de uso común y con frecuencia el alumno debe haber empleado o escuchado expresiones como: "Damos por terminada la *función*"; "llegamos cuando la *función* se había iniciado". He comprado boletos para la última función"; "La *función* del corazón es vital", etc.

En la matemática dicha palabra expresa un concepto específico y por lo general muy diferente al que se le asigna en el lenguaje cotidiano, tal situación debe tomarse muy en cuenta para evitar confusiones. Una función es un caso particular de relación. Esto quiere decir que algunas relaciones las podremos llamar con el nombre de funciones.

2-8 CONCEPTO DE FUNCION, TERMINOLOGÍA Y SÍMBOLOS.

Por diversos motivos, cuando se tiene una pareja de conjuntos, existe la necesidad de establecer entre sus elementos una correspondencia, asociación, aplicación o relación.

Por ejemplo, entre conjuntos de personas, algunas de las expresiones que permiten establecer una correspondencia entre sus elementos son:

a) Fecha de nacimiento.
b) Edad de la persona.
c) Signo del zodíaco.
d) Lugar de origen.
e) Profesión.
f) Factor Rh
g) Tipo sanguíneo.
h) Color de la piel.
i) Color del pelo.
j) Color de los ojos.
k) Estatura.

En algunos casos la expresión a emplear para establecer la correspondencia nos conduce en forma natural a determinar los elementos del otro conjunto.

Ejemplo 8.

P: conjunto de países.
Expresión a emplear: "tiene por capital a".
C: conjunto de ciudades.

Fig. 18.

Para evitar ambigüedades, lo usual es determinar ambos conjuntos. También debe proporcionarse la receta, regla o indicación a seguir para establecer la correspondencia.

La característica principal de toda correspondencia es que consta de una terna:

1. P: conjunto de países.
2. C: conjunto de ciudades.
3. *Regla*: "tiene por capital a"

De este ejemplo, el lector habrá observado lo siguiente se tienen dos conjuntos y un método, una regla o una ley a seguir, para asignar a cada elemento de un conjunto uno o más elementos del otro conjunto.

Si deseamos una mayor precisión deben usarse las palabras "aplicar", "corresponder", "relacionar"; en esta forma se tendrán expresiones como "el conjunto A está aplicado al conjunto B" o bien, "el conjunto A se corresponde con el conjunto B". Estas expresiones constan de varias palabras, razón por la cual se crea la siguiente notación:

$$A \longrightarrow B$$

o sea que si entre dos letras mayúsculas se encuentra una flecha y dichas letras designan conjuntos, tal notación debe interpretarse de las siguientes maneras:

El conjunto A está aplicado al conjunto B

o bien:

A cada elemento del conjunto A le corresponde un elemento del conjunto B.

Cuando se tiene una correspondencia de un conjunto A en un conjunto B, es necesario distinguirlos de alguna manera, lo cual se logra diciendo que el conjunto A es el *dominio* de la correspondencia y B el contradominio de la misma.

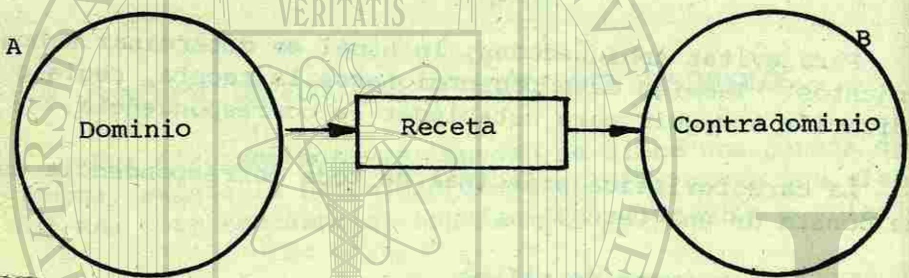


Fig. 19.

DEFINICION 1: Una correspondencia es una terna formada por:

1.- Un primer conjunto no vacío llamado dominio.

2.- Un segundo conjunto llamado contradominio.

3.- Una regla o receta, la cual permitirá tomar un elemento del dominio y asignarle un elemento del contradominio.

Sean los conjuntos A y B:

A: conjunto de países.
B: conjunto de ciudades.
f: "tiene por capital a".

Para simplificar aún más las anteriores expresiones se adopta el convenio de designar la correspondencia con una letra f minúscula de nuestro alfabeto, situada antes de la

letra que designa al dominio y cuidando separar dichas letras por dos puntos:

$f : A \to B$ *(notación a emplear para correspondencias).*

Es fácil advertir que existen cuatro tipos de correspondencia, de los cuales dos adquieren una relevancia tal, en matemáticas, que se designan con el nombre particular de *funciones*.

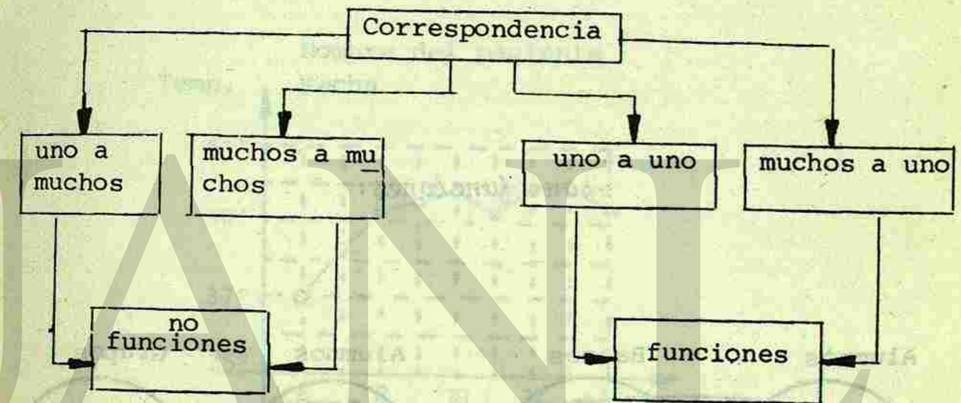
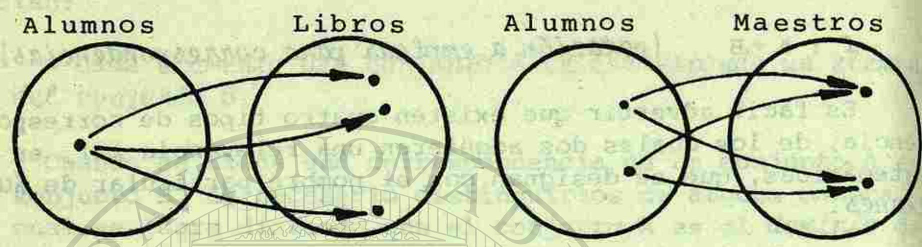


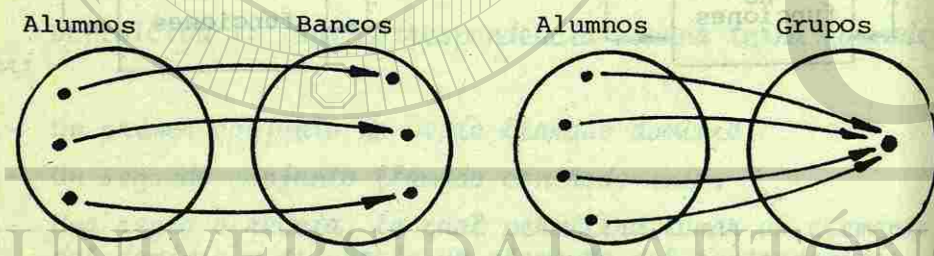
Fig. 20.



uno a muchos (no es función)

muchos a muchos (no es función)

son funciones:



uno a uno

muchos a uno

Fig. 21.

Ejemplo 9.

Al examinar a su paciente, un médico ordena:

"Necesito una gráfica de las temperaturas; deben tomarse éstas cada hora".

En este caso se va a establecer una correspondencia entre dos conjuntos: conjunto de horas y conjunto de temperaturas, la gráfica que sigue muestra tal situación.

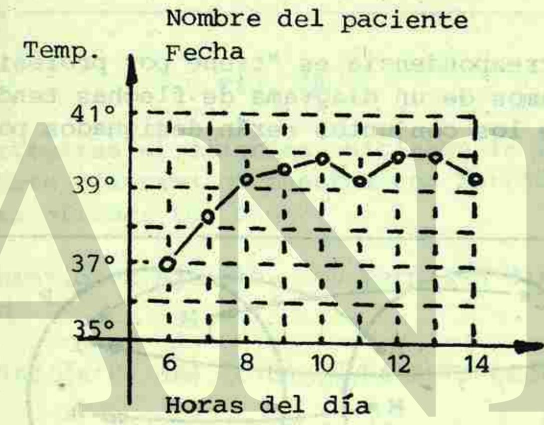


Fig. 22.

En esta gráfica de temperaturas puede advertirse la siguiente situación: El enfermo podrá tener la misma temperatura varias veces, pero nunca se podrá repetir el mismo momento; se trata de una *función*.

Ejemplo 10.

Si se tiene una lista de profesionales como la que sigue:

Nombre	Profesión.
Carlos	Médico
Arturo	Ingeniero
Gabriel	Ingeniero
Jorge	Contador
Benito	Licenciado
Mario	Arquitecto

y la regla de correspondencia es "tiene por profesión", y por comodidad usamos de un diagrama de flechas tendremos: (los elementos de los conjuntos serán designados por su primera letra):

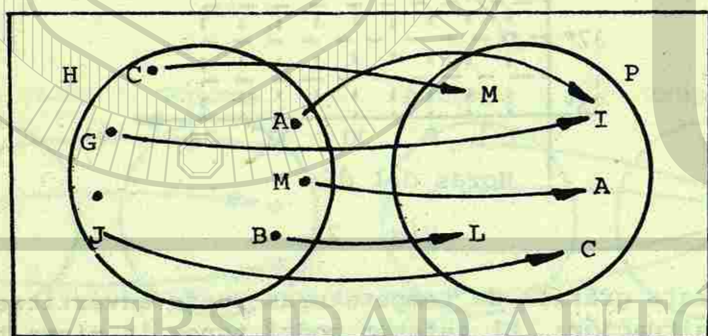


Fig. 23.

Tal esquema nos permite observar que de cada elemento de H parte una flecha.

Cuando el esquema le fue mostrado a Jorge, éste protestó diciendo: "No es correcto, han olvidado que tengo dos profesiones; de acuerdo con este diagrama están omitiendo un No deben olvidar que soy contador y licenciado". Ante tal

situación, el diagrama tuvo que corregirse.

Diagrama corregido.

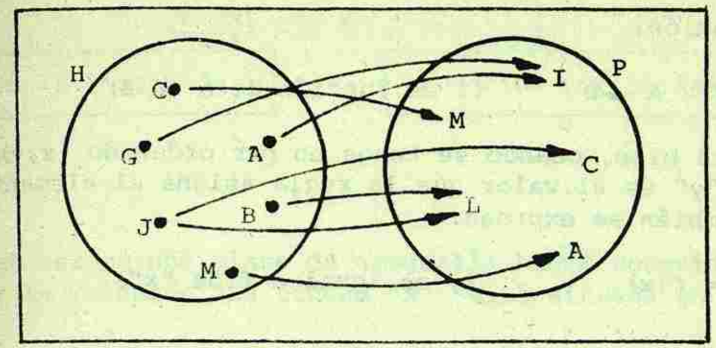


Fig. 24.

Al corregirse el diagrama, hicieron la siguiente advertencia: "Este diagrama no muestra una función". ¿En qué se basaron para afirmar tal cosa?

Los anteriores ejemplos nos permiten dar la definición de *función*.

Una función es una terna cuyos componentes son:

1.- *Un primer conjunto no vacío llamado dominio de la función.*

2.- *Un segundo conjunto llamado contradominio de la función.*

3.- *Una regla de correspondencia con las siguientes características:*

a) *Por medio de esta regla, a cualquier elemento del dominio de la función se le puede asociar un elemento del contradominio.*

b) *Ningún elemento del dominio ha de quedarse sin su asociado en el contradominio.*

c) *Ningún elemento del dominio puede tener más de un asociado en el contradominio.*

Notación:

$f : A \to B$ (f es función de A en B)

Ahora bien, cuando se tenga un par ordenado (x,y), se dice que "y" es el valor que la regla asigna al elemento "x", lo que también se expresa:

y= f(x) (y es igual a f de "x")

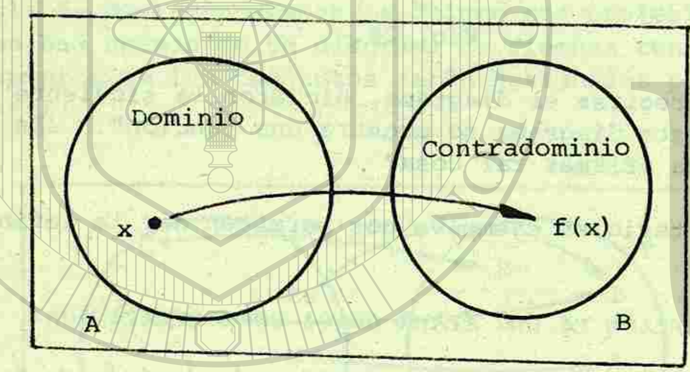


Fig. 25.

A f(x) se le llama *"imagen"* de x.

Debemos ser cuidadosos para no interpretar en forma errónea esta notación; el siguiente esquema será de utilidad

f ( ) = [ ] ← el elemento que pertenece a B y que está asociado con x bajo la regla f.

↑

un elemento que pertenece a A

El siguiente esquema nos permite interpretar lo que llamamos *imagen* del *dominio* de una *función*.

f (x) = y

"y" es la imagen de x — producida por la regla f

Tal vez en una clase de geografía habrá necesidad de emplear la relación "La ciudad "x" está situada en el país "y".

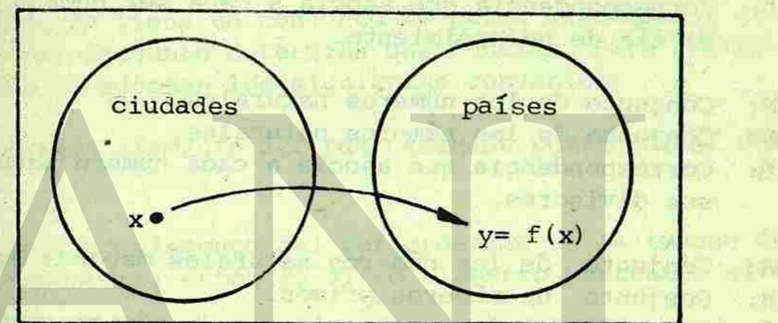


Fig. 26.

Se tendrán expresiones como: "París es una ciudad que se encuentra situada en Francia". "Roma es una ciudad que se encuentra situada en Italia". "Barcelona es una ciudad que se encuentra situada en España". "Madrid es una ciudad que se encuentra situada en España".

Se observa que tales expresiones están referidas a dos conjuntos y una receta que cumple con las tres características citadas; es decir, que se trata de una función, entonces podemos emplear la notación:

f (x) = y

f (París) = Francia

f (Roma) = Italia
f(Barcelona) = España
f (Madrid) = España

AUTOEVALUACION 3.

Diga si cada una de las siguientes ternas son o no funciones:

1.- A: Conjunto de los seres humanos.
B: Conjunto de los días del año.
f: Correspondencia que asocia a cada ser humano con el día de su nacimiento.

2.- N: Conjunto de los números naturales.
N: Conjunto de los números naturales.
f_1: Correspondencia que asocia a cada número natural sus divisores.

3.- A: Conjunto de los números naturales mayores que 1.
B: Conjunto de números primos.
f_2: Correspondencia que asocia a cada número natural sus factores primos.

4.- X: Conjunto de todos los números reales (positivos, cero, negativos, enteros, quebrados, raíces, etc.)
Y: Conjunto de los números reales.
K: Correspondencia que a cada número real le asocia su cuadrado.

2-9 FUNCIONES COMO CONJUNTOS DE PARES ORDENADOS.

Si el dominio de una función es un conjunto finito y éste consta de muy pocos elementos, dicha función queda determinada con facilidad por medio de un conjunto de pares ordenados.

A = {(1,3), (2,4), (3,5), (4,6)}

Primer componente del par.	Segundo componente del par.
1	3
2	4
3	5
4	6

Cuando se tiene un conjunto de pares ordenados y se indica que tal conjunto determina una función, para evitar ambigüedades se adoptan los siguientes convenios:

El primer elemento del par ordenado pertenece al dominio.

El segundo elemento del par ordenado es la imagen del primer componente; entonces dicho elemento pertenece al contradominio.

(a,b) — b es la imagen de a y pertenece al contradominio.
— a es el elemento del dominio.

Dicho conjunto de pares debe cumplir con la siguiente condición: *no deben existir pares ordenados cuyas primeras componentes sean iguales.*

2-10 GRÁFICA DE UNA FUNCION.

El conjunto de pares ordenados que sirve para designar una función recibe el nombre de *grafo*; ¿por qué razón usamos tal nombre? Tal vez se deba a que cuando a los pares ordenados que forman el grafo se les asigna un punto del plano, dicho conjunto de puntos constituye lo que se llama gráfica de la función

DEFINICION 2: *Sea* f *una ley de correspondencia de una función de un conjunto* A *en un conjunto* B,

$$f : A \to B$$

Al conjunto de los pares ordenados $(x, f(x))$, *con* $x \in A$, *que a su vez es subconjunto del producto cartesiano* $A \times B$, *se le llama grafo de la función* f.

2-11 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN.

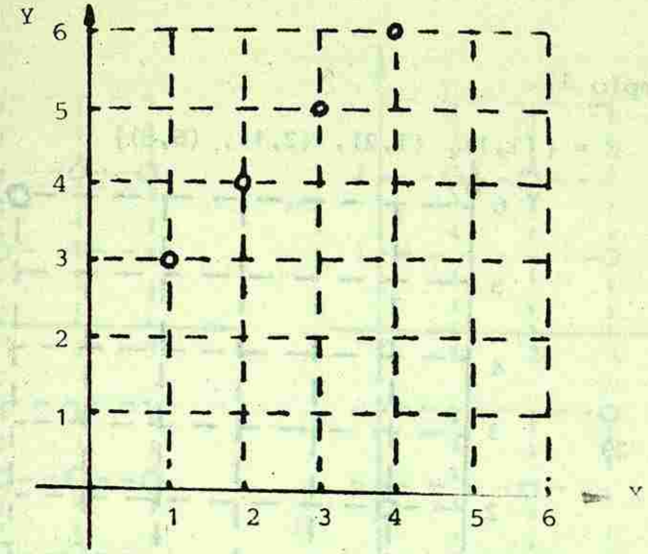
Ejemplo 11:

$$A = \boxed{\{(1,3),\ (2,4),\ (3,5),\ (4,6)\}}$$ grafo de la función

Dominio: primeros componentes de los pares ordenados; dichos elementos se sitúan en el eje horizontal $\{1,2,3,4\}$.

Contradominio: segundos componentes de los pares ordenados; tales elementos se sitúan en el eje vertical $\{3,4,5,6\}$.

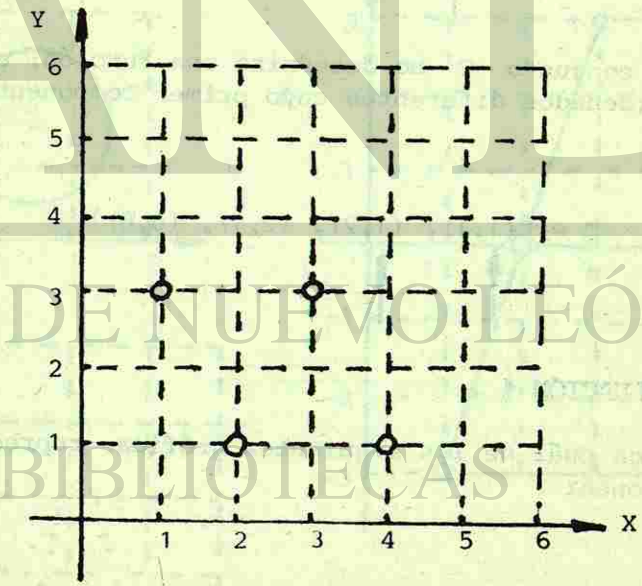
Fig. 27



Ejemplo 12:

$$C = \{(1,3),\ (2,1),\ (3,3),\ (4,1)\}$$

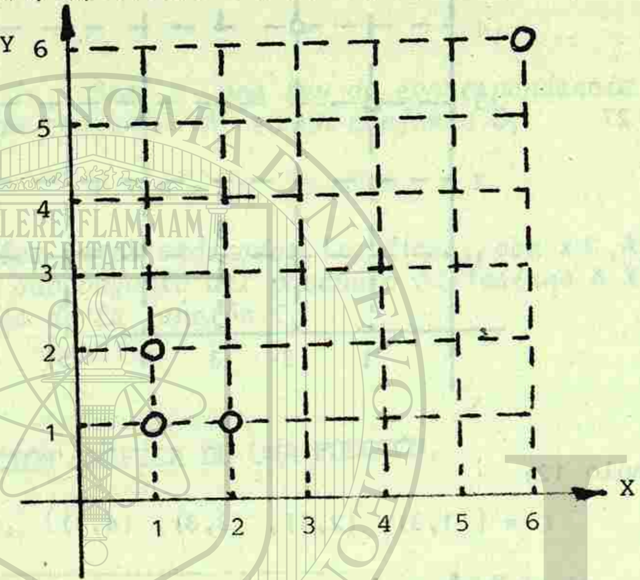
Fig. 28



Ejemplo 13.

C = {(1,1), (1,2), (2,1), (6,6)}

Fig. 29

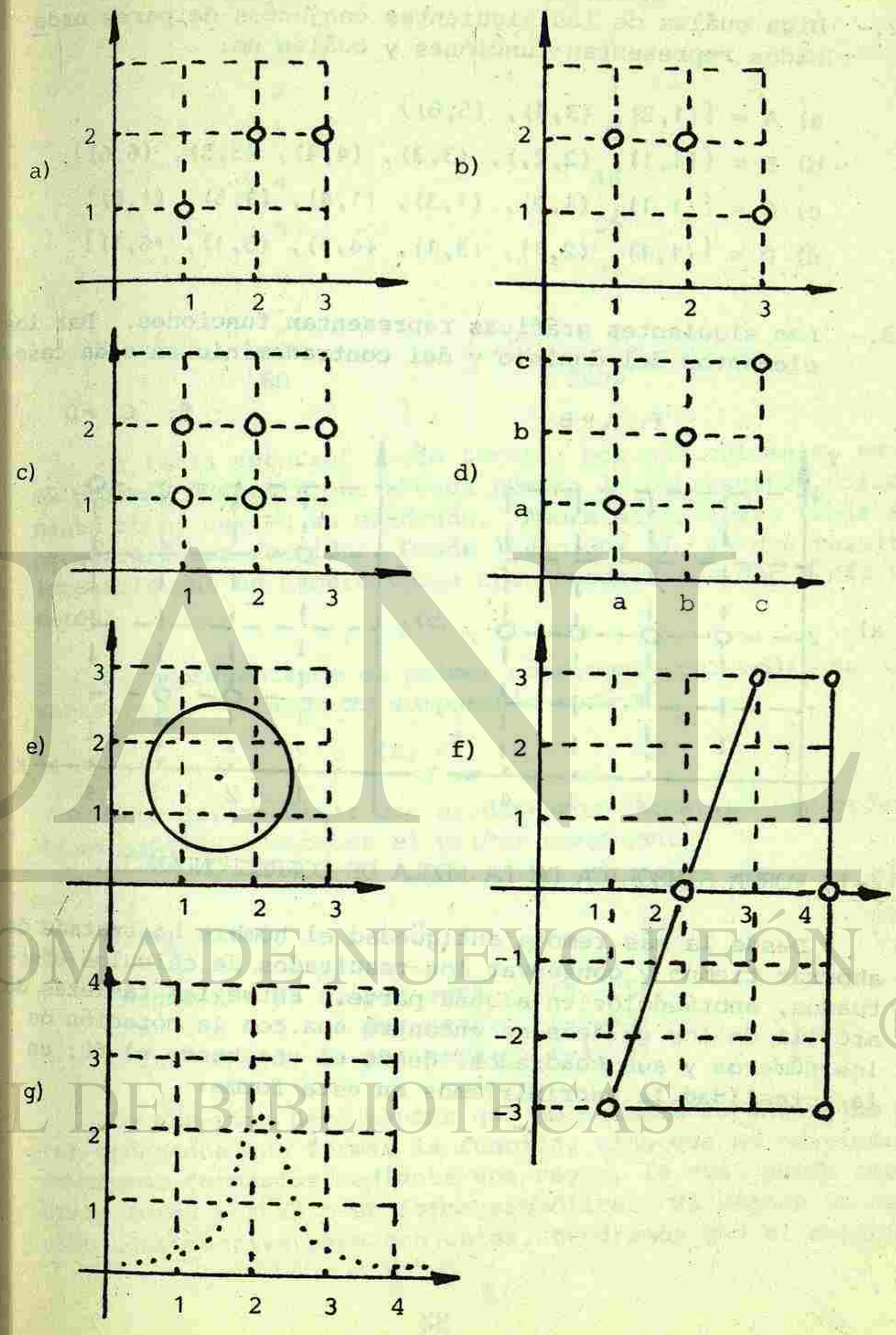


El conjunto C no determina una función; existen dos pares ordenados diferentes cuyo primer componente es el mismo.

C = {(1,1), (1,2), (2,1), (6,6)}

AUTOEVALUACIÓN 4 .

1.- Diga cuál de las siguientes gráficas representan funciones:



2.- Diga cuáles de los siguientes conjuntos de pares ordenados representan funciones y cuáles no:

a) $A = \{(1,2), (3,4), (5,6)\}$

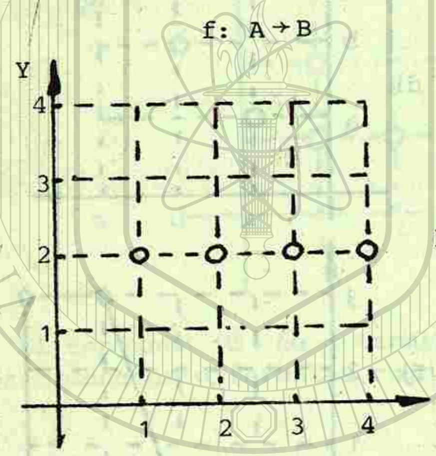
b) $B = \{(1,1), (2,2,), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$

c) $C = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\}$

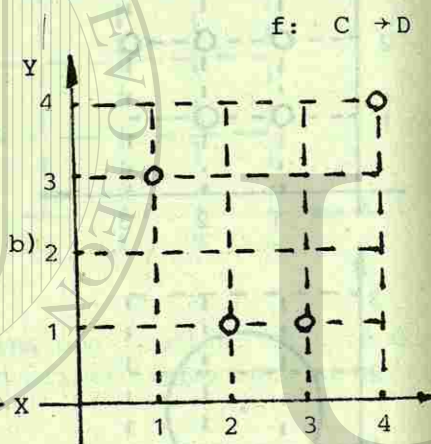
d) $D = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1)\}$

3.- Las siguientes gráficas representan funciones. Dar l[os] elementos del dominio y del contradominio en cada cas[o]

a)



b)



2-12 FORMA SIMBÓLICA DE LA REGLA DE CORRESPONDENCIA.

Desde la más remota antigüedad el hombre ha tratado [de] ahorrar tiempo y conservar los resultados de cálculos efe[c]tuados, anotándolos en alguna parte. Entre las tabletas [de] arcilla de los caldeos se encontró una con la notación de los números y sus cuadrados, desde el uno hasta el 60; en la actualidad la escribiríamos en esta forma:

Número	Cuadrado
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
⋮	⋮
60	3600

La tabla anterior está formada por dos columnas; además podemos advertir que a cada número le corresponde únicamente otro, que es su cuadrado. Ahora bien, ¿esta tabla representará una función? Desde luego que sí, ya que resulta imposible que un número tenga como cuadrados a dos o más números.

Si representamos el primer componente por medio de una variable x, el segundo componente será x^2.

$$(x, x^2)$$

Esto quiere decir que si deseamos formar un par ordenado es necesario conocer el primer componente.

Ejemplo 14.

Cuando x = 5, el par será: (5, 25)
Cuando x =-5, el par será: (-5,25)
Cuando x =-3, el par será: (-3, 9)

Lo anterior hace pensar que no siempre se darán los pares ordenados que forman la función, sino que en ocasiones deberemos formarlos mediante una regla, la cual puede ser dada en forma verbal o en forma simbólica. Si usamos la notación constructiva para conjuntos, tendremos que el conjunto de pares ordenados para la regla anterior será:

$$A = \{(x,y) \mid y = x^2\}$$

pares ordenados que pertenecen al conjunto A.

Regla para encontrar el segundo componente expresado en forma simbólica.

Formar la tabulación cuando se conoce el dominio y la regla de la función resulta sencillo si imaginamos tener un máquina de funciones:

Se toma un elemento del dominio y mediante la regla se calcula su correspondiente.

Primer componente del par (se toma del dominio).

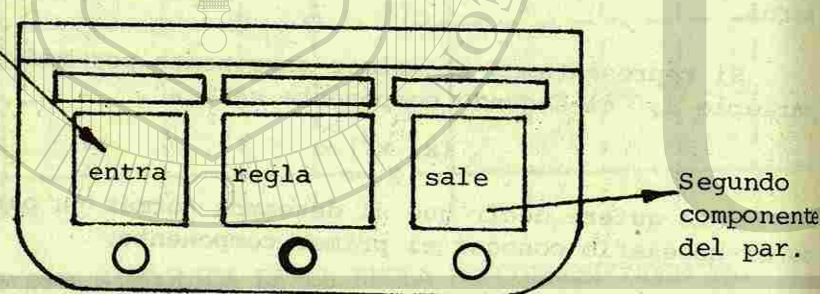


Fig. 30.

Si el dominio de la función es el conjunto de los números enteros, sólo es posible enlistar algunos elementos del conjunto A.

$$A = \{(2,4),\ (3,9),\ (4,16),\ (-2,4),\ (-3,9),\ \ldots\}$$

Ejemplo 15.

Formemos algunos pares empleando nuestra máquina de funciones.

REGLA

3	duplícalo	6

número que entra: 3
número que sale: 6
par formado: (3,6)
notación: $f(3) = 6$

5	duplícalo	10

número que entra: 5
número que sale: 10
par formado: (5,10)
notación: $f(5) = 10$

7	duplícalo	14

número que entra: 7
número que sale: 14
par formado: (7,14)
notación: $f(7) = 14$

Si suponemos que nuestra máquina ya no admite la entrada de nuevos elementos, tendremos:

x	y
3	6
5	10
7	14

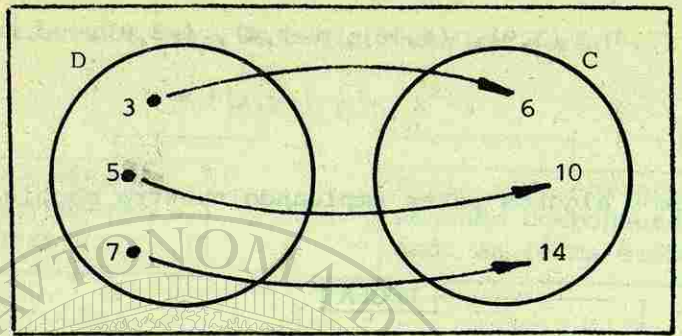


Fig. 31.

La notación constructiva para el conjunto de pares ordenados es la siguiente:

$P = \{(x,y) \mid y = 2x\}$, siendo el dominio $\{3,5,7\}$

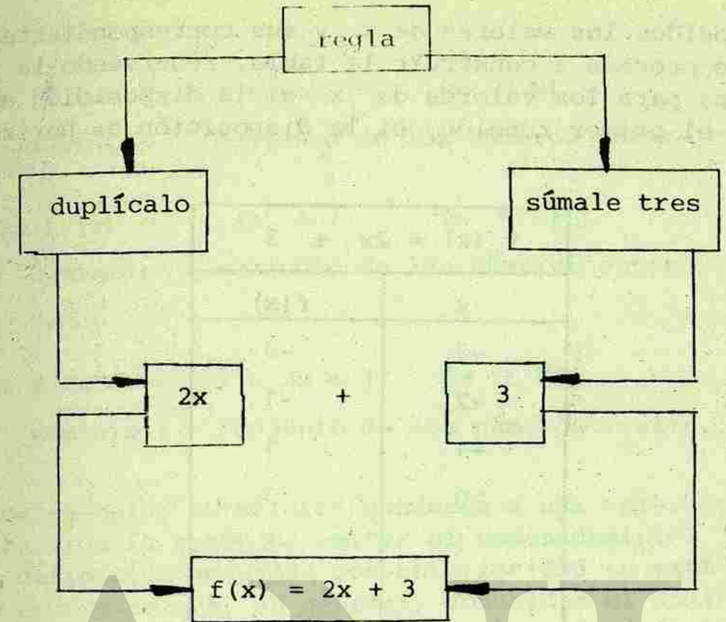
Cuando se conocen el dominio de la función y la regla, hay necesidad de efectuar las operaciones indicadas para conocer la imagen correspondiente de cada elemento del dominio, es decir, cuando se conocen los primeros componentes de los pares ordenados y la regla, se pueden calcular los segundos componentes de los pares.

Ejemplo 16.

Hacer una tabulación para el siguiente dominio:

$$D = \{0, 1, 2, -1, -2, -3\}$$

Sabiendo que la regla es: "Toma un elemento del dominio, duplícalo y luego súmale tres", dicha regla puede expresarse en otra forma: "Multiplica por dos el número que te doy, ahora súmale tres al resultado obtenido y de esta manera obtendrás la imagen del número dado." Se observa que en la regla intervienen dos operaciones, una multiplicación y una adición.



No se piense que el proceso de tabular es complicado, hay que sustituir el valor que admite x teniendo cuidado de efectuar en forma correcta las operaciones que indica la regla.

$$\boxed{f(x) = 2x + 3}$$

Si $x = 0$; $f(0) = 2(0) + 3 = 0 + 3 = 3$

Si $x = 1$; $f(1) = 2(1) + 3 = 2 + 3 = 5$

Si $x = 2$; $f(2) = 2(2) + 3 = 4 + 3 = 7$

Si $x = -1$; $f(-1) = 2(-1) + 3 = -2 + 3 = 1$

Si $x = -2$; $f(-2) = 2(-2) + 3 = -4 + 3 = -1$

Si $x = -3$; $f(-3) = 2(-3) + 3 = -6 + 3 = -3$

Conocidos los valores de x y sus correspondientes imágenes, se procede a construir la tabla, reservando la primera columna para los valores de x si la disposición es vertical, y el primer renglón, si la disposición es horizontal.

$f(x) = 2x + 3$	
x	f(x)
-3	-3
-2	-1
-1	1
0	3
1	5
2	7

Disposición vertical.

x	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	-3	-1	1	3	5	7

Disposición horizontal.

Aclaremos que en general, para dar una función es necesario además de una expresión simbólica de la regla de correspondencia, dar el dominio.

Ejemplo 17.

a) $f(x) = 3x + 5 \quad (x \in N)$

dominio: conjunto de los números naturales.

b) $f(x) = 2x^2 + 1 \quad (x \in Z)$

dominio: conjunto de los números enteros.

c) $f(x) = x^2 - 3x + 1 \quad (x \in \mathcal{R})$

dominio : conjunto de los números reales.

Los ejemplos anteriores conducen a una interrogativa: ¿Cuál ha sido la razón de omitir el contradominio? Parece que la definición aceptada con anterioridad se está violando; lo que ocurre es que, en general, conocidos el dominio y la ley de correspondencia, podemos calcular las imágenes; tal situación nos permite considerar como contradominio cualquier conjunto, con la condición de que contenga a todas las imágenes. De esta manera, cuando se tenga la función $f(x) = 3x^2+1$, cuyo dominio es N, su contradominio puede ser, N, Z, Q o $\mathcal{R}$.

Si llamamos A al grafo de la función, entonces A es un subconjunto de N X N, N X Z, NX Q, N X $\mathcal{R}$,

Calculemos algunos elementos de A:

$$f(x) = 3x^2 + 1$$

$f(0) = 3(0)^2 + 1 = 1 \qquad (0, 1)$

$f(1) = 3(1)^2 + 1 = 3 + 1 = 4 \qquad (1, 4)$

$f(2) = 3(2)^2 + 1 = 12 + 1 = 13 \qquad (2, 13)$

AUTOEVALUACIÓN 5

1.- Calcula los elementos que faltan en las siguientes tabulaciones:

$f(x) = x^2 - 1$		$f(x) = 2x - 5$		$f(x) = 3x + 1$	
x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)
0		-1		0	
1		0		5	
-2		1		10	
3		-2		-6	

2.- Calcula algunos elementos para:

$$A = \{(x,y) \in Z \times Z \mid y = 2x - 1\}$$

a) f(0)   b) f(-1)   c) f(5)
d) f(-5)

$$B = \{(x,y) \in Z \times Z \mid y = -2x + 1\}$$

e) f(2)   f) f(5)   g) f(3)
h) f(-3)

3.- Dada la función $f(x) = x^2 + x + 3$, encuentra:

a) f(0)   b) f(-1)   c) f(1)
d) f(3)   e) f(-3)   f) f(-2)

4.- Si se tiene que: $f(x) = 2x-3$, encuentra:

a) f(0)   b) f(-2)   c) f(-3)
d) f(-5)   e) f(-10)   f) f(15)

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO I.

Dados los productos cartesianos:

$P \times Q = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3)\}$

$Q \times P = \{(2,1), (2,2), (3,1), (3,2)\}$

1.- Encuentre el conjunto P.

0) {1,2}   1) {1,3}   2) {2,1}
3) {3,2}   4) {2,2}

2.- Encuentre el conjunto Q.

0) {3,1}   1) {2,3}   2) {1,3}
3) {3,3}   4) {1,1}

Los puntos A(0,0), B(5,1) y C(1,3) son vértices de un paralelogramo. Encontrar las coordenadas del cuarto vértice si:

3.- Si AB es una diagonal.

0) (5,0)   1) (1,2)   2) (4,-2)
3) (-2,3)   4) (-1,-1)

4.- Si AC es una diagonal.

0) (0,0)   1) (-1,3)   2) (2,5)
3) (-4,2)   4) (0,-3)

5.- Si BC es una diagonal.

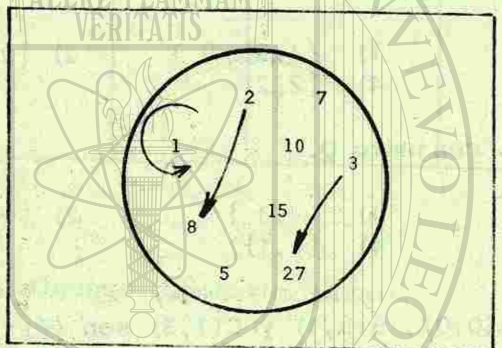
0) (2,3)   1) (1,2)   2) (-1,-2)
3) (5,3)   4) (6,4)

6.- Si, E= {2,5,8,11} y F = {8,11,14,2} , diga cuál de las siguientes proposiciones es válida.

0) E = F 1) E > F 2) E ↔ F
3) E ⊂ F 4) F ⊂ E

Dada la siguiente gráfica sagital encuentre una porposición abierta en dos variables que la represente.

7.-



0) "x" es la mitad de "y".
1) "x" es el doble de "y".
2) "x" tiene como cubo a "y".
3) "x" tiene como cuadrado a "y".
4) "x" es la tercera parte de "y".

8.- Sean los conjuntos A = {1,2} y B = {3,4} y la propiedad que relaciona a sus elementos "R". "R" = "a tiene como cuadrado a "b".
Encuentre los posibles pares ordenados que cumplen con la propiedad indicada en la proposición abierta.

0) {(2,3)} 1) {(2,4)} 2) {(4,1)}
3) {(4,2)} 4) {(1,4)}

9.- Encuentre el dominio de la relación R del problema 7.

0) {5,7,10 } 1) {8,27} 2) {1,8,27}
3) {5,10,15} 4) {1,2,3}

10.- Encuentre el contradominio de la relación R del problema 8.

0) ϕ 1) {3} 2) {1}
3) {4} 4) {2}

11.- Encuentre cuál de los siguientes conjuntos de parejas de números no determina una función.

0) {(2,0),(2,3),(5,0)} 1) {(1,1),(0,0),(2,2)}
2) {(5,2),(0,1),(3,4)} 3) {(2,1),(3,0),(1,2)}
4) {(4,1),(3,0),(0,3)}

Calcula las imágenes correspondientes a cada elemento del dominio que se da:

f : A → B cuya regla de correspondencia es:
$f(x) = 3x + 5$

12.- f(-1)

0) -3 1) 0 2) -2
3) 2 4) 1

13.- f(0.5)

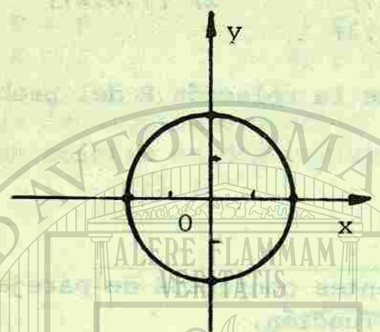
0) 5/2 1) 13/2 2) 7/2
3) 3/2 4) 9/2

14.- f(-2)

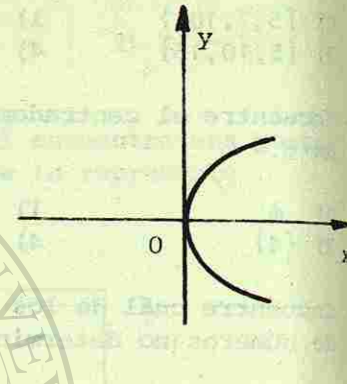
0) -4 1) 1 2) 0
3) -1 4) 2

15.- Diga cuál de las siguientes gráficas representa una función.

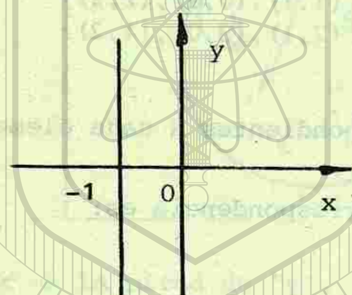
0)



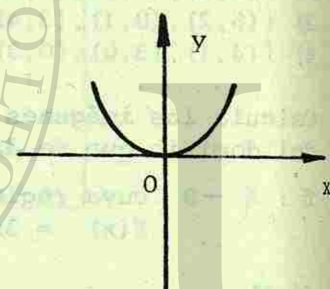
1)



2)

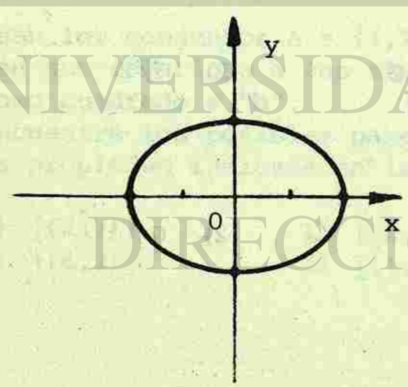


3)

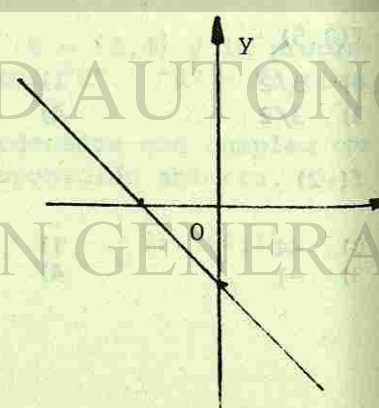


16.- Diga cuál de las siguientes gráficas no representa una función.

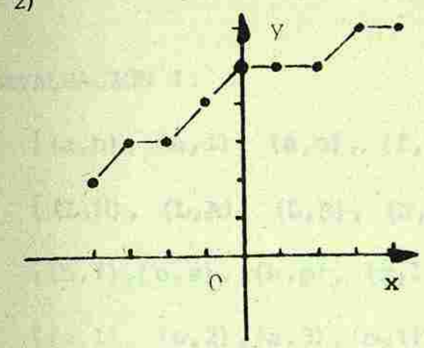
0)



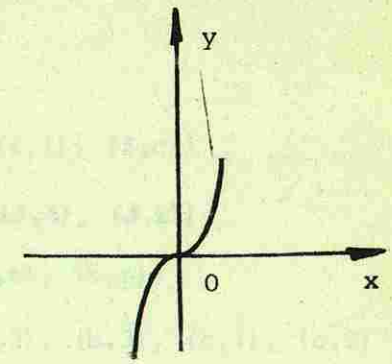
1)



2)



3)



2-13 RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DEL CAPÍTULO I.

AUTOEVALUACIÓN 1.

2.- {(a,h), (a,l), (a,c), (f,h), (f,l), (f,c)}

3.- {(L,M), (L,A), (L,E), (J,M), (J,A), (J,E)}

4.- {(b,l),(b,s), (b,p), (r,l),(r,s), (r,p)}

5.- {(a,1), (a,2),(a,3),(b,1), (b,2), (b,3), (c,1), (c,2)
(c,3), (d,1), (d,2), (d,3)}

AUTOEVALUACIÓN 2.

3.- {(2,4), (3,6), (4,8), (5,10), (6,12), (7,14)}

4.- a) "x tiene como cuadrado a y".

b) "x es divisor de y"

c) "x es divisor de y"

5.- Dominio {2,3,4,5,6,7}

Contradominio; {4,6,8,10,12,14}

6.- R = {(1,1), (2,4), (3,9)}

Dominio= {1,2,3 }

Contradominio= {1,4,9}

AUTOEVALUACIÓN 3.

1.- Sí. 2.- No.

3.- No. 4.- Sí.

AUTOEVALUACIÓN 4.

1.- a) Sí. b) Sí. c) No. d) Sí.
e) No. f) No. g) Sí.

2.- A sí.
B sí.
C no.
D sí.

3.- a) Dominio= $\{1,2,3,4\}$
Contradominio= $\{2\}$

b) Dominio= $\{1,2,3,4\}$
Contradominio= $\{3,1,1,4\}$

AUTOEVALUACIÓN 5.

1.-

f(x)	f(x)	f(x)
-1	-7	1
0	-5	16
3	-3	31
8	-9	-17

2.- a) -1 b) -3 c) 9 d) -11
e) -3 f) -9 g) -5 h) 7

3.- a) 3 b) 3 c) 5 d) 15
e) 9 f) 5

4.- a) -3 b) -7 c) -9 d) -13
e) -23 f) 27

CAPITULO 3.

ECUACIONES LINEALES EN UNA VARIABLE.

LECCIÓN 1.

3-1 INTRODUCCIÓN.

A las matemáticas se le ha llamado muchas veces la "servidora de las ciencias". Desde tiempos muy remotos la ciencia y las matemáticas han estado relacionadas.

Así, los babilonios y griegos la usaron en la astronomía, Eratóstenes usó las matemáticas para medir la circunferencia de la tierra, y Arquímides expuso los principios de la mecánica.

En la época del Renacimiento, Galileo y Kepler pusieron los cimientos de la astronomía y la dinámica moderna. Hacia el año 1637, las matemáticas crecieron con el descubrimiento de la Geometría Analítica por Descartes y el cálculo infinitesimal por Newton y Leibniz aproximadamente por el año 1700.

A la entrada del siglo XX, empezó una revolución científica. La era de la física relativista había comenzado. Sin la contribución de Einstein, Lorentz, Dirac, Heisenberg, la era atómica moderna hubiera sido imposible. La ciencia está reconstruyendo nuestro mundo, y las matemáticas han hecho que esas ciencias sean una realidad.

AUTOEVALUACIÓN 4.

1.-	**a) Sí.**	b) Sí.	c) No.	d) Sí.
	e) No.	f) No.	g) Sí.	

2.- **A sí.**
B sí.
C no.
D sí.

3.- a) **Dominio=** $\{1,2,3,4\}$
Contradominio=$\{2\}$

b) Dominio= $\{1,2,3,4\}$
Contradominio=$\{3,1,1,4\}$

AUTOEVALUACIÓN 5.

1.-

f(x)	f(x)	f(x)
-1	-7	1
0	-5	16
3	-3	31
8	-9	-17

2.-	**a) -1**	b) -3	c) 9	d) -11
	e) -3	f) -9	g) -5	h) 7
3.-	**a) 3**	b) 3	c) 5	d) 15
	e) 9	f) 5		
4.-	**a) -3**	b) -7	c) -9	d) -13
	e) -23	f) 27		

CAPITULO 3.

ECUACIONES LINEALES EN UNA VARIABLE.

LECCIÓN 1.

3-1 INTRODUCCIÓN.

A las matemáticas se le ha llamado muchas veces la "servidora de las ciencias". Desde tiempos muy remotos la ciencia y las matemáticas han estado relacionadas.

Así, los babilonios y griegos la usaron en la astronomía, Eratóstenes usó las matemáticas para medir la circunferencia de la tierra, y Arquímides expuso los principios de la mecánica.

En la época del Renacimiento, Galileo y Kepler pusieron los cimientos de la astronomía y la dinámica moderna. Hacia el año 1637, las matemáticas crecieron con el descubrimiento de la Geometría Analítica por Descartes y el cálculo infinitesimal por Newton y Leibniz aproximadamente por el año 1700.

A la entrada del siglo XX, empezó una revolución científica. La era de la física relativista había comenzado. Sin la contribución de Einstein, Lorentz, Dirac, Heisenberg, la era atómica moderna hubiera sido imposible. La ciencia está reconstruyendo nuestro mundo, y las matemáticas han hecho que esas ciencias sean una realidad.

2-2 INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES LINEALES.

Una ecuación es el enunciado que se expresa en términos **matemáticos** para indicar que las cantidades o expresiones a **ambos** lados de un signo = son iguales. Se dice que una ecuación es la expresión de la igualdad del valor de dos cantidades. **Una** expresión como $C = \pi D$ es una ecuación simple. La C es el símbolo de la circunferencia D el diámetro del círculo y π la letra griega empleada como símbolo para la constante 3.14159. La ecuación $C = \pi D$ indica que la circunferencia C es igual al producto de π por el diámetro D. Los símbolos C y D se usan en este caso para representar cantidades desconocidas.

Una ecuación es, por tanto, una combinación de cantidades numéricas y símbolos, que cuando se suman, se multiplican o se dividen (según lo indiquen los signos en una expresión) son iguales a otra cantidad establecida. Una ecuación generalmente es una pregunta:

¿Qué número sumado a 7 es igual a 21? La letra X se usa comúnmente para representar la cantidad desconocida. Este problema puede expresarse como una simple ecuación que puede resolverse a simple vista.

$$X + 7 = 21$$

$$14 + 7 = 21$$

entonces, $X = 14$

Por tanto:

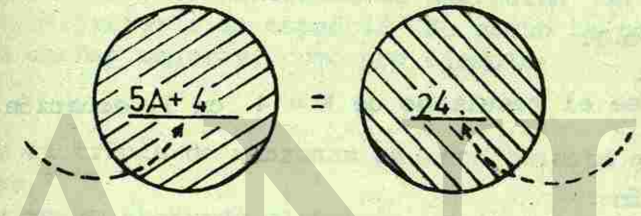
Cuando se indican las operaciones de resta, multiplicación y división, también se hace en cada caso una pregunta por ejemplo:

¿Qué número restado de 10 es igual a 4?
¿Qué número multiplicado por 6 es igual a 4?
¿Qué número dividido por 5, un número dado(o cualquier símbolo), es igual a 10, una cantidad fijada?

Partes de una ecuación.

En todas las ecuaciones, las expresiones que aparecen a uno y otro lado del signo de igualdad (=) se llaman miembros. Usualmente, se usa el término primer miembro para indicar la cantidad que se coloca a la izquierda del signo, y segundo miembro, a la cantidad que va a la derecha del signo de igualdad.

El primer miembro en la ilustración es 5A + 4; el segundo miembro 24.



Equilibrio de una ecuación.

En toda ecuación ambos miembros deben ser iguales y se dice que la ecuación está equilibrada. Para mantener una ecuación en equilibrio, los números iguales deben aumentarse o disminuirse, multiplicarse o dividirse por cantidades iguales.

Después de que se ha resuelto una ecuación, el valor obtenido para una cantidad desconocida se sustituye en ella. Si la ecuación está equilibrada, según lo indica la igualdad de ambos miembros, la solución es correcta.

Esta operación de comprobación es siempre esencial para probar la exactitud de las dimensiones y de las cantidades. Es relativamente sencillo sustituir los valores calculados en la ecuación original para saber la exactitud de los cálculos.

***Reglas** para probar una ecuación.*

1.- Sustitúyase el valor calculado de cualquier letra o símbolo en la ecuación original.

2.- Ejecútese cada operación como se indica.

NOTA: La ecuación esta equilibrada cuando sus valores a ambos lados son iguales.

Ejemplo 1.

Pruébese el resultado de $B = 4$ en la ecuación $6B = 24$

Solución:

Primer paso: Sustitúyase el valor de B en la ecuación original ($B = 4$)

$$6(4) = 24$$

Segundo paso: multiplíquese.

$$6 \times 4 = 24$$

Tercer paso: Compruébese el resultado. Como ambos miembros de la ecuación son iguales, la respuesta $B = 4$ es correcta.

3-3 LAS MATEMÁTICAS Y NUESTRO IDIOMA.

En el curso pasado aprendimos a usar algunos símbolos que es el idioma propio de las matemáticas. Por ejemplo, los símbolos como $=$, $\neq$, $+$, $>$, ε, etc. forman parte de este idioma. Estos y otros símbolos nos capacitan para escribir frases y proposiciones abiertas.

Hemos trabajado ya con frases y proposiciones abiertas. Ahora trataremos que el estudiante vea más claramente estas ideas. Para ello, consideremos la expresión "3n" ¿Cómo podríamos interpretarla en español? De hecho la podemos interpretar de muchas maneras, como por ejemplo:

"Hay el triple de manzanas en esta canasta que en la otra."
"Hoy tengo ahorrado el triple de dinero que lo que tenía ayer."
"El es tres veces más grande que ella."
"El largo del salón es tres veces mayor que el ancho."

Evidentemente, existen muchas otras interpretaciones de la frase abierta.

Empezamos con la frase abierta "3n" y la traducimos a muchas frases diferentes en español. Pero, cabe mencionar que en todas ellas estamos hablando de dos números o dos cantidades. En todos ellos hay un *punto de partida*. Podrá haber un *número desconocido* de manzanas o de dinero o de edades o de dimensiones. Este número desconocido se representó por la letra "n", que previamente identificamos como una *variable*. La segunda cantidad fue escrita siempre como 3 veces mayor que la primera cantidad, o "3n".

Pudimos haber comenzado con la frase en español y traducirla en una expresión matemática. A continuación se exponen varios ejemplos:

FRASE: "Hay 3 manzanas más en la primera canasta que en la segunda."

EXPRESIÓN: " $x+3$ ", donde x= manzana.

FRASE: "El doble de un número aumentado en 8."

EXPRESIÓN: "$2y+8$", donde y= número.

Los símbolos "+" y "-" tienen muchos significados equivalentes en español. Por ejemplo, el signo (+) puede significar "más que", "aumentado en", "sumado a", "más largo que", "más viejo que", "más alto que", etc. El signo (-) puede significar "menor que", "disminuido en", "más corto que", "más joven que", "más bajo que", etc.

AUTOEVALUACIÓN 1.

Traducir cada una de las siguientes expresiones en frases equivalentes en español.

1.- $x + 5$	6.- $1/2\ (5x-3)$
2.- $(2n-3)+ 4$	7.- y^2-7
3.- $5 + 2y$	8.- $t + 2(t+1)$
4.- $x + y$	9.- $8(3a+4)$
5.- $2x + 3$	10.- $K + 5K$

Escribir en forma de expresión matemática cada una de las siguientes frases:

11.- La edad de un niño hace 5 años si él tiene exactamente **x** años.

12.- El número de huevos que hay en z docenas-

13.- Un tercio de un número.

14.- La edad que tendrá Pedro dentro de 10 años si ahora tiene y años.

15.- El número de centavos que hay en d monedas de diez centavos y c monedas de 25 centavos.

16.- El doble de un número aumentado en la mitad del mismo número.

17.- El siguiente al número natural z.

18.- Un número par.

19.- Un número impar.

20.- Un número de 2 dígitos.

3-4 RESOLUCION DE ECUACIONES.

Conjunto solución.

Hasta ahora hemos hablado de proposiciones abiertas con una variable. Sabemos que el conjunto solución de una proposición de esta clase es el conjunto de valores del dominio de la variable que hacen verdadera la proposición. Si todos los números del dominio hacen que sea cierta, decimos que la proposición es una "identidad". Y si solo para algunos valores del dominio de la variable es verdadera la proposición, decimos que se trata de una igualdad condicional, o ecuación condicional, o más usualmente, por brevedad decimos que es una ecuación. Los elementos del conjunto solución de una ecuación reciben el nombre de raíces de la ecuación; también se dice que las raíces satisfacen la ecuación.

Hasta ahora hemos encontrado algunas veces las raíces de una ecuación por tanteos. Veremos ahora procedimientos sistemáticos para obtener el conjunto solución de una ecuación sencilla. Llamemos ecuación sencilla a una proposición abierta, con una variable, que tiene una sola raíz. La expresión que está a la izquierda del signo de igualdad se le llama primer miembro de la ecuación. La expresión que está a la derecha del signo igual recibe el nombre de segundo miembro de la ecuación,

Así, por ejemplo:

$$\underbrace{5y + 3 - 2y}_{\text{Primer miembro}} = \underbrace{2y - 1}_{\text{Segundo miembro}}$$

"Resolver" una ecuación significa encontrar su conjunto solución. Pero antes de ver esto debemos aprender dos propiedades importantes de la igualdad.

3-5 PROPIEDADES DE LA IGUALDAD.

Vamos a demostrar algunos teoremas relativos a la igualdad que nos serán muy útiles en este capítulo.

TEOREMA 1. Si a, b y c son números reales y a=b, entonces a + c = b + c. Esta es llamada la "propiedad de adición de los números reales"

"Demostración":

a+c es un número real.	(Propiedad de cerradura del conjunto de los números reales respecto a la adición).
a+c = a+c	(Propiedad reflexiva de la igualdad)
a=b	(Dato conocido)
a+c = b+c	(Puesto que a y b son iguales son nombres diferentes para el mismo número. Así pues, podemos sustituir "a" por "b" en el segundo paso).

TEOREMA 2. Si a, b y c son números reales y a=b, entonces $a \cdot c = b \cdot c$ A esto se le llama la propiedad de multiplicación de los números reales.

"Demostración".

a.c es un número real.	(Propiedad de cerradura del conjunto de los números reales respecto a la multiplicación.)
a.c = a.c	(Propiedad reflexiva de la igualdad)
a = b	(Dato conocido)
a.c = b.c	

Estos teoremas lo que nos dicen es que: "podemos sumar el mismo número a ambos miembros de la ecuación, o podemos multiplicar los dos miembros de una ecuación por el mismo número. En cualquiera de los dos casos, se mantiene la igualdad.

3-6 OPERACIONES INVERSAS Y ECUACIONES EQUIVALENTES.

Considérese lo siguiente:

$$30 + 2 - 2 = 30 \qquad y + 2 - 2 = y$$

Nótese que el restar 2, anula el efecto de sumar 2 en ambos casos. Cuando dos operaciones están en tal forma que cada una anula lo que la otra hace, se dice que son *operaciones inversas*. Sumar un número y restar el mismo número son operaciones inversas.

Análogamente, multiplicar por un número y dividir por el mismo son *operaciones inversas*. Por ejemplo, si comenzamos con 12, multiplicamos por 4 y después dividimos por 4, tenemos $12 \times 4 \div 4 = 12$.

Ejemplo 2.

Consideremos ahora la ecuación: $x + 2 = 7$.

Solución:

Esto nos dice que cuando se le suma 2 a cierto número (x), el resultado es 7. Podemos anular la suma de 2 restando 2, o agregando el inverso aditivo de 2, a ambos miembros de la ecuación.

$x+2 + (-2) = 7 + (-2)$	(Por el teorema 1)
$x + 0 = 5$	(Propiedad del inverso aditivo y efectuando la suma).
$x = 5$	(Propiedad del elemento de identidad para la suma).

El conjunto solución de la ecuación es { 5 }.

Nótese que {5} es el conjunto solución de cada uno de los tres pasos de la ecuación original, puesto que la sustitución de x por 5 hará verdadera cada una de estas ecuaciones. Decimos que estas ecuaciones son *ecuaciones equivalentes*. En general, las ecuaciones equivalentes son las que tienen el mismo conjunto solución.

Ejemplo 3.

Consideremos ahora la ecuación: $5x = 10$

Solución:

Esto nos dice que cuando se le multiplica a un número (x) por 5, el resultado es 10. Análogamente que en el problema anterior, podemos eliminar el 5 dividiendo entre 5 ó multiplicar por el inverso multiplicativo de 5, a ambos miembros de la ecuación.

$(\frac{1}{5})(5x) = (\frac{1}{5})(10)$	(Por el teorema 2).
$1.x = \frac{10}{5}$	(Propiedad del inverso multiplicativo y efectuando la operación de multiplicación).
$x = 2$	(Propiedad del elemento de identidad de la multiplicación y efectuando la operación de división).

El conjunto solución es {2}. Al igual que el problema anterior el conjunto solución se cumple para las demás ecuaciones derivadas de la primera, puesto que son *ecuaciones equivalentes*.

En los ejemplos anteriores, el dominio de la variable es el conjunto de los números reales (R). Por convención de aquí en delante, cuando no se de el dominio de la variable se sobreentenderá que es el conjunto de los números reales.

AUTOEVALUACIÓN 2.

1.- Decir cuál es la operación inversa de cada una de las siguientes:

a) Ponerse los zapatos.
b) Cerrar la puerta.
c) Apagar la televisión.
d) Dividir los números por tres.
e) Doblar un número.
f) Aumentar un número en 7.

2.- Escribe el inverso aditivo y el multiplicativo de las siguientes expresiones:

a) 1
b) -3
c) 4x
d) 5xy
e) 5+x
f) 4y-3x

3.- Decir cuáles de los siguientes pares de ecuaciones son ecuaciones equivalentes.

a) $x = 2$
$2x = 6$

c) $3x = 12$
$2x = 8$

b) $x + 1 = 3$
$x + 2 = 4$

d) $y - 3 = -9$
$y = -6$

4.- Decir en cada caso, el número que debemos agregar a la expresión para que quede solamente **x**:

a) $x+3$
b) $x-1$
c) $x+9$
d) $x-3$
e) $x+1$
f) $x-2$
g) $x+7$

5.- Identificar el número por el cual debemos multiplicar la expresión para que quede solamente **x**:

a) $2x$
b) $\frac{1}{3}x$
c) $-\frac{1}{2}x$
d) $-4x$
e) $5x$
f) $\frac{7}{6}x$

Hallar los conjuntos solución de las ecuaciones siguientes. En todos los casos, comprobar los resultados en la ecuación original.

6.- $x+12 = 29$

7.- $y+28 = 50$

8.- $x-35 = 34$

9.- $39+x = 47$

10.- $x+18 = 8$

11.- $-5+y = -12$

12.- $6K = -3$

13.- $-\frac{2}{7}K = \frac{2}{3}$

14.- $-15z = -5$

15.- $8y = 13/2$

16.- $-\frac{2}{3}q = 7$

17.- $-\frac{3}{4}z = -5$

3-7 APLICACION SIMULTANEA DE LOS TEOREMAS DE LA IGUALDAD EN LA RESOLUCION DE ECUACIONES LINEALES EN UNA VARIABLE.

Al resolver ecuaciones, a menudo es necesario usar los dos inversos, el aditivo y el multiplicativo. En general, es recomendable usar primero el inverso aditivo y después el inverso multiplicativo.

Ejemplo 4.

Resolver la ecuación $\frac{3y}{9} = 2$

Solución:

$\frac{3}{9}y = 2$ (Ecuación dada)

$(\frac{9}{3})(\frac{3}{9}y) = (\frac{9}{3})(2)$ (Teorema 1)

$1 \cdot y = \frac{18}{3}$ (Propiedad del inverso multiplicativo).

$y = 6$ (Propiedad del elemento de identidad para la multiplicación y efectuando la operación de división)

El conjunto solución es: $\{6\}$

Ejemplo 5.

Resolver la ecuación $z-4 = 3$

Solución:

$z - 4 + (4) = 3+(4)$ (Por el teorema 1)

$z + 0 = 7$ (Propiedad del inverso aditivo y efectuando la operación de suma)

$z = 7$ (Propiedad del elemento de identidad para la suma)

En los ejemplos anteriores se ha visto la forma de usar los teoremas de la igualdad por separado y sus inversos tanto aditivo como multiplicativo. Ahora vamos a hacer uso de los dos teoremas y los inversos simultáneamente en ecuaciones del tipo $ax = bx+c$.

Ejemplo 6.

Consideremos ahora la ecuación:

$$3y + 7 = 5$$

Solución:

Esta ecuación es posible resolverla empleando ambos teoremas. Utilizando el teorema 1, con el inverso aditivo de tenemos,

$3y + 7 + (-7) = 5+(-7)$ (Teorema 1)

$3y + 0 = -2$ (Propiedad del inverso aditivo y efectuando la operación de suma)

$3y = -2$ (Propiedad del elemento de identidad para la suma de números reales);

ahora, aplicando el teorema 2 y usando el inverso multiplicativo de 3, tenemos,

$(\frac{1}{3})(3y) = (\frac{1}{3})(-2)$ (Teorema 2)

$1 \cdot y = -\frac{2}{3}$ (Propiedad del inverso multiplicativo y efectuando la operación de multiplicación)

$y = -\frac{2}{3}$ (Propiedad del elemento de identidad para la multiplicación)

El conjunto solución es: $\{-\frac{2}{3}\}$

Ejemplo 7.

Resolver la ecuación $8 = 11-6K$

Solución:

Aplicando el teorema 1 y utilizando el inverso aditivo de 6 K y 8, tenemos:

$8+(6K) = 11-6K+(6K)$ (Teorema 1)

$8+6K = 11$ (Propiedad del inverso aditivo de los números reales)

$(-8)+8+6K = (-8)+11$ (Teorema 1)

$0+6K = 3$ (Propiedad del inverso aditivo de los números reales y efectuando la operación de suma).

$6K = 3$ (Propiedad del elemento de identidad para la suma de números reales).

Ahora aplicando el teorema 2 y utilizando el inverso multiplicativo de 6, nos queda que $K= 1/2$. El conjunto solución de la ecuación es $\{1/2\}$

Otra forma de resolver esta ecuación es la siguiente:

$(-11)+8 = (-11)+11-6K$ (Teorema 1)

$-3 = 0+(-6K)$ (Propiedad del inverso aditivo de los números reales y efectuando la operación de suma).

$-3 = -6K$ (Propiedad del elemento de identidad para la suma de números reales).

$-1(-3) = -1(-6K)$ (Teorema 2)

$3 = 6K$ (Efectuando la multiplicación)

$(\frac{1}{6})(3) = (\frac{1}{6})(6K)$ (Teorema 2)

$\frac{3}{6} = 1 \cdot K$ (Efectuando la operación, propiedad del inverso multiplicativo).

$\frac{1}{2} = K$ (Propiedad del elemento de identidad para la multiplicación; fracción equivalente).

$K = \frac{1}{2}$ (Propiedad de simetría de la igualdad).

donde tenemos el mismo conjunto solución $\{\frac{1}{2}\}$. En realidad, la podemos resolver de distintas maneras, todo depende de la habilidad que tengamos al usar los teoremas anteriores.

Ejemplo 8.

Resolver la ecuación: $13x-8 = 9x+16$

Solución:

Primero) Agregamos el inverso aditivo de -8 a los dos miembros de la ecuación (teorema 1) para obtener una ecuación equivalente:

$$13x-8+(8) = 9x+16+(8)$$
$$13x = 9x+24 \quad \text{(Ecuación equivalente)}$$

Segundo) Agregamos ahora el inverso aditivo de 9x a los dos miembros de la ecuación y obtenemos una equivalente:

$$(-9x)+13x = (-9x)+9x+24$$
$$4x = 24 \quad \text{(Ecuación equivalente)}$$

Tercero) Finalmente, multiplicamos los dos miembros de la ecuación por el inverso multiplicativo de 4, para obtener una ecuación equivalente:

$$(\tfrac{1}{4})\ 4x = (\tfrac{1}{4})\ 24$$
$$x = 6 \quad \text{(Ecuación equivalente)}$$

Por último, para poder comprobar el resultado lo hacemos por el proceso de sustitución. Al comprobar este resultado se sustituye x por 6 en la ecuación original o dada:

Comprobación:

$$13x-8 = 9x+16$$
$$13(6)-8 = 9(6)+16$$
$$78-8 = 54+16$$
$$70 = 70$$

Por lo tanto, el conjunto solución es $\{6\}$.

Cuando resuelva una ecuación, debe comprobar siempre su respuesta, sustituyendo el conjunto solución en la ecuación original y comprobar si da un enunciado verdadero. Se deja al estudiante la comprobación de las ecuaciones resueltas anteriores.

AUTOEVALUACIÓN. 3.

Hallar los conjuntos solución de las ecuaciones siguientes. En todos los casos comprobar los resultados en la ecuación original.

1.- $3x = 15+2x$	7.- $-2y+5 = -y+2$	13.- $3p-11 = -5p$
2.- $2y+3 = y+2$	8.- $-3y+5 = 7$	14.- $-2y+8 = 5$
3.- $5y+9 = 4y$	9.- $-5 = 5-2b$	15.- $-2 = 8-5y$
4.- $3x-5 = 2x+2$	10.- $4z+7 = 9z$	16.- $5z+9 = 2z$
5.- $8z+1 = 7z+5$	11.- $4m-6 = -11$	17.- $3y-5 = -7$
6.- $5z = 9+4z$	12.- $K = -4K+7$	

2-8 SOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES DE LA FORMA $ax+b = cx+d$.

En la sección anterior mostramos cómo ampliar los métodos para encontrar la solución de ecuaciones. Ahora vamos a ampliar el método para ecuaciones con más de tres términos, pero sin paréntesis o fracciones.

Ejemplo 9.

Consideremos ahora la ecuación:

$$5z+6+2z = 3+z+1$$

Solución:

Apliquemos varias veces el teorema 1 sucesivamente hasta que todos los términos que contengan variables estén en el miembro izquierdo de la ecuación y todos los términos sin variables estén en el miembro derecho:

$$5z+6+(-6)+2z = (-6)+3+z+1$$
$$5z+2z = (-6)+3+z+1 \quad \text{(ecuación equivalente)}$$
$$5z+(-z)+2z = (-6)+3+z+(-z)+1$$
$$5z+(-z)+2z = (-6)+3+1 \quad \text{(ecuación equivalente)}$$

A continuación simplifiquemos ambos miembros de la ecuación por "reducción de términos semejantes":

$$4z+2z = -3+1 \quad \text{(ecuación equivalente)}$$
$$6z = -2 \quad \text{(ecuación equivalente)}$$

Ahora, utilizando el teorema 2 y usando el inverso multiplicativo de 6, nos queda:

$$\left(\frac{1}{6}\right)6z = \left(\frac{1}{6}\right)(-2)$$
$$z = \frac{-2}{6} \quad \text{(ecuación equivalente)}$$
$$z = -\frac{1}{3} \quad \text{(ecuación equivalente)}$$

Comprobación:

$$5z+6+2z = 3+z+1 \quad \text{(ecuación original)}$$
$$5\left(-\frac{1}{3}\right)+6+2\left(-\frac{1}{3}\right) = 3+\left(-\frac{1}{3}\right)+1 \quad \text{(sustitución del conjunto solución)}$$
$$-\frac{5}{3}+6-\frac{2}{3} = 3-\frac{1}{3}+1$$

$$6-\frac{7}{3} = 4-\frac{1}{3} \quad \text{(sumando términos semejantes)}$$
$$\frac{18-7}{3} = \frac{12-1}{3} \quad \text{(sacando común denominador)}$$
$$\frac{11}{3} = \frac{11}{3} \quad \text{(es verdadero)}$$

Por lo tanto, el conjunto solución es $\{-\frac{1}{3}\}$

Ejemplo 10.

Resolver la ecuación $8y-5-3y-2 = 6y-8+7$ y comprobar la respuesta.

Solución:

Aplicando los teoremas 1 y 2, tenemos:

$$(-6y)+8y-5-3y-2 = (-6y)+6y-8+7 \quad \text{(Teorema 1, inverso aditivo de 6y)}$$
$$(-6y)+8y-5+(+5)-3y-2 = 0-8+7+(+5) \quad \text{(Teorema 1, y el inverso aditivo de -5)}$$
$$(-6y)+8y+0-3y-2+(+2) = 0-8+7+(+5)+(+2) \quad \text{(teorema 1, y el inverso aditivo de -2)}$$
$$-6y+8y+0-3y+0 = 0-8+7+(+5)+(+2)$$
$$-9y+8y = -8+14 \quad \text{(ecuación equivalente)}$$
$$(-9+8)y = +6 \quad \text{(reducción de términos semejantes)}$$
$$(-1)(-y) = (-1)(+6) \quad \text{(teorema 2)}$$
$$y = -6 \quad \text{(ecuación equivalente)}$$

Comprobación:

$$8y-5-3y-2 = 6y-8+7 \quad \text{(ecuación original)}$$
$$8(-6)-5-3(-6)-2 = 6(-6)-8+7 \quad \text{(conjunto sustitución)}$$
$$-48-5+18-2 = -36-8+7 \quad \text{(efectuando la operación de multiplicación)}$$
$$-55+18 = -44+7 \quad \text{(efectuando la operación de la suma)}$$
$$-37 = -37 \quad \text{(es verdadero)}$$

Por lo tanto, el conjunto solución es {-6}

Los pasos que se sugieren para resolver una ecuación por esta forma de "trasposición de términos semejantes" son los siguientes:

1°) Determínese cuáles términos deben cambiarse de un miembro a otro de la ecuación.

2°) Aplicar el teorema 1 tantas veces como sea necesario, buscando que en la ecuación equivalente queden en un solo miembro todos los términos que contengan la variable y del otro miembro los que no contengan variables.

3°) Efectuar las operaciones indicadas, buscando que la nueva ecuación equivalente quede en la forma.

$ax = b$ (donde a y b son constantes)

4°) Despejar la variable, aplicando el teorema 2, para encontrar su conjunto solución.

5°) Comprobar el conjunto solución en la ecuación original.

"Otra forma de resolver ecuaciones lineales"

Hay diferentes formas, como ya se vió anteriormente, de resolver ecuaciones lineales. Ahora vamos a resolver la siguiente ecuación aplicando primero la "reducción de términos semejantes" en ambos miembros de la ecuación y luego aplicamos los teoremas de la igualdad.

Ejemplo 11.

Resolver la ecuación: $7p+8-3p-2 = 5p-8+3$

Solución:

Primero vamos a reducir a términos semejantes el miembro izquierdo de la ecuación:

$7p-3p+8-2 = 5p-8+3$ (reordenando el primer miembro de la ecuación)

$(7-3)p+6 = 5p-8+3$ (Propiedad distributiva y efectuando la operación de suma)

$4p+6 = 5p-8+3$ (ecuación equivalente)

Ahora, partiendo de la ecuación equivalente, vamos a reducir a términos semejantes el segundo miembro de la ecuación:

$4p+6 = 5p-5$ (efectuando la operación de suma)

Luego aplicando los teoremas 1 y 2 tenemos:

$(-5p)+4p+6 = (-5p)+5p-5$ (teorema 1 y el inverso aditivo de 5p)

$(-5p)+4p+6+(-6) = 0-5+(-6)$ (teorema 1 y el inverso aditivo de 6)

$(-5p)+4p+0 = 0-5+(-6)$ (ecuación equivalente).

$(-5+4)p = -5-6$ (Propiedad distributiva y elemento de identidad para la suma).

$(-1)(-p) = (-1)(-11)$ (teorema 2)

$p = 11$ (ecuación equivalente)

Comprobación.

$7p+8-3p-2 = 5p-8+3$ (ecuación original)

$7(11)+8-3(11)-2 = 5(11)-8+3$ (conjunto sustitución)

$77+8-33-2 = 55-8+3$ (efectuando la operación de multiplicación)

$85-35 = 58-8$ (efectuando la operación de suma)

$50 = 50$ (es verdadera)

Por lo tanto el conjunto solución es {11}

Cualquiera de las dos formas es correcta para resolver este tipo de ecuaciones. En realidad, sólo es cuestión que se tenga amplio dominio sobre los teoremas y la habilidad para operar con los inversos aditivos y multiplicativos.

Los pasos que se sugieren para esta forma de "reducción de los términos semejantes" son los siguientes:

1°) Simplificar primero cualquiera de los dos miembros de la ecuación reordenando los términos para luego reducirlos a su mínima expresión.

2°) Hacer lo mismo con el otro miembro de la ecuación buscando que la ecuación equivalente quede en la forma:

$$ax + b = cx + d$$

3°) Aplicar simultáneamente los teoremas de la igualdad, hasta reducir la ecuación original a la ecuación equivalente

$$x = K \quad \text{(donde K es cualquier número real)}$$

4°) Comprobar el conjunto solución en la ecuación original.

AUTOEVALUACIÓN 4.

Hallar los conjuntos solución de las ecuaciones siguientes. En todos los casos comprobar los resultados en la ecuación original.

1.- $7y+8-3y-2 = 5y-8+3$
2.- $6x+7-13x = 4x-12+8$
3.- $2-3y+8 = 4y-2-9y$
4.- $4p+3-9 = 11-3p+8p$
5.- $5y+9-6y-3 = 7y-4+18$
6.- $3x+2-8 = 11-4x+9x$
7.- $6+3m-5 = 3m+9-4m$
8.- $8+8y-3y = 5-y+1$

3-9 SOLUCIONES DE ECUACIONES QUE CONTIENEN PARÉNTESIS.

En esta sección vamos a ampliar los métodos de las secciones anteriores a ecuaciones que contienen paréntesis. Para ello vamos a hacer uso de una propiedad de los números reales que es la *Propiedad distributiva*, que se enuncia como sigue:

$$a(b+c) = ab + ac \quad \text{(para cualquier } a,b,c \in R)$$

La propiedad distributiva afirma que un producto puede ser igual a una suma y que, recíprocamente, la suma en cuestión es igual a un producto, puesto que la igualdad es simétrica. El nombre que se le da a esta propiedad de los números reales parece apropiado en vista de que el multiplicador "a" se *distribuye* a cada elemento de la suma (b+c). Esta propiedad, es básica en la estructura del álgebra elemental.

Una consecuencia inmediata de esta propiedad es el hecho de que el producto de un número por la suma de tres o más números es igual a la suma de los productos del primer número con cada uno de los números que forman la suma. Así, para el caso de tres números, tenemos:

$$\begin{aligned} a[b+c+d] &= a[(b+c) + d] \\ &= a(b+c) + ad \\ &= (ab + ac) + ad \\ &= ab + ac + ad \end{aligned}$$

Ejemplo 12.

Consideremos ahora la ecuación:

$$5(3-4m) = 2(m+5)$$

Solución:

1°) Aplicamos la Propiedad distributiva en ambos miembros de la ecuación.

$$5(3)-5(4m) = 2(m)+2(5) \quad \text{(Propiedad distributiva)}$$

$$15-20m = 2m+10 \quad \text{(ecuación equivalente)}$$

2°) Resolviendo la ecuación equivalente por cualquier(a) de las formas anteriores, tenemos:

$$15-20m+(-2m) = 2m+(-2m)+10 \quad \text{(teorema 1 y por el inverso aditivo de 2m)}$$

$$(-15)+15-20m+(-2m) = 0+10+(-15) \quad \text{(teorema 1 y por el inverso aditivo de 15)}$$

$$0-20m+(-2m) = 0+10+(-15) \quad \text{(Por el elemento inverso de la suma)}$$

$$(-20-2)m = 10-15$$

$$-22m = -5 \quad \text{(ecuación equivalente)}$$

$$\left(-\frac{1}{22}\right)(-22m) = \left(-\frac{1}{22}\right)(-5) \quad \text{(teorema 2 y por el inverso multiplicativo de } -22\text{)}$$

$$1 \cdot m = \frac{5}{22}$$

$$m = \frac{5}{22} \quad \text{(ecuación equivalente)}$$

Comprobación:

$$5(3-4m) = 2(m+5) \quad \text{(ecuación original)}$$

$$5\left[3-4\left(\frac{5}{22}\right)\right] = 2\left[\left(\frac{5}{22}\right)+5\right] \quad \text{(conjunto sustitución)}$$

$$5\left[3-\frac{20}{22}\right] = 2\left[\frac{5}{22}+5\right]$$

$$5\left(\frac{66-20}{22}\right) = 2\left(\frac{5+110}{22}\right)$$

$$5\left(\frac{46}{22}\right) = 2\left(\frac{115}{22}\right)$$

$$\frac{230}{22} = \frac{230}{22} \quad \text{(verdadero)}$$

Por lo tanto el conjunto solución es $\{\frac{5}{22}\}$

Ejemplo 13.

Resuelve la ecuación: $-2(y-6) = 3(5y-8)-(y-3)$

Solución:

Aplicando la Propiedad distributiva tenemos:

$$(-2)(y)-(-2)(6) = 3(5y)-3(8)-1y-(-1)(3)$$

$$-2y+12 = 15y-24-y+3 \quad \text{(ecuación equivalente)}$$

Ahora, aplicando la segunda forma de la sección anterior para resolver la ecuación equivalente tenemos:

$$(-15y)-2y+12 = (-15y)+15y-24-y+3 \quad \text{(teorema 1)}$$

$$(-15y)+(y)-2y+12 = 0-24+(y)-y+3 \quad \text{(teorema 1)}$$

$$(-15y)+(y)-2y+12+(-12) = -24+0+3+(-12) \quad \text{(teorema 1)}$$

$$(-15y)+(y)-2y+0 = -24+3+(-12) \quad \text{(teorema 1)}$$

$$(-15+1-2)y = -36+3 \quad \text{(efectuando operaciones)}$$

$$(-17+1)y = -33 \quad \text{(efectuando operaciones)}$$

$$-16y = -33 \quad \text{(ecuación equivalente)}$$

$$\left(-\frac{1}{16}\right)(-16y) = \left(-\frac{1}{16}\right)(-33) \quad \text{(teorema 2)}$$

$$y = 33/16$$

Comprobación.

$$-2(y-6) = 3(5y-8)-(y-3) \quad \text{(ecuación original)}$$

$$-2\left[\left(\frac{33}{16}\right)-6\right] = 3\left[5\left(\frac{33}{16}\right)-8\right]-\left[\left(\frac{33}{16}\right)-3\right] \quad \text{(conjunto sustitución)}$$

$$-2\left(\frac{33-96}{16}\right) = 3\left[\frac{5(33)-128}{16}\right]-\left[\frac{33-48}{16}\right]$$

$$-2\left(-\frac{63}{16}\right) = 3\left(\frac{37}{16}\right) - \left(-\frac{15}{16}\right)$$

$$\frac{(-2)(-63)}{16} = \frac{(3)(37)}{16} + \frac{15}{16}$$

$$\frac{126}{16} = \frac{111}{16} + \frac{15}{16}$$

$$\frac{126}{16} = \frac{126}{16} \quad \text{(es verdadero)}$$

Por tanto el conjunto solución es $\left\{ \frac{33}{16} \right\}$

En resumen podemos decir que: "cuando haya ecuaciones que contengan paréntesis primero vamos a usar la propiedad distributiva para expresar ambos miembros de la ecuación por términos sin símbolos de agrupación y, segundo, aplicar cualquiera de las formas vistas en la sección anterior.

AUTOEVALUACION 5.

Hallar los conjuntos solución de las ecuaciones siguientes. **En** todos los casos, comprobar los resultados en la **ecuación** original.

1.- $3(2x-7) = 4x + x - 2$

2.- $4(2y + 7) = 3y - 1 + 4y$

3.- $5 + (x + 2) = 2x - 4$

4.- $a - 2(3a - 1) = 7 - 4a$

5.- $4(3 - 7y) - 2(4 - 3y) = 2($[illegible]$y + 8)$

6.- $5(2n - 5) = 4(3n - 7) - 2(2n + 9)$

7.- $3(2-5k) - 6(3 - 4k) = 7(2k + 9)$

8.- $2(7k - 3) = 5(2k - 5) - 3(4k + 7)$

9.- $-3(x - 4) = 5(2x - 9) - (x - 5)$

3-10 SOLUCIÓN DE ECUACIONES QUE CONTIENEN FRACCIONES.

En las secciones anteriores hemos considerado ecuaciones con números enteros. Ahora vamos a resolver ecuaciones que contienen fracciones. Para ello, vamos a hacer uso del M.C.D. (mínimo común denominador) para luego multiplicar por este toda la ecuación y así poder convertir la ecuación a otra equivalente que no contenga fracciones y luego proceder a resolverla.

Pero antes de resolver ecuaciones de este tipo, hagamos un ejemplo de como sumar fracciones con distinto denominador.

Ejemplo 14.

Efectuar la operación:

$$\frac{5}{12} + \frac{7}{9} + \frac{1}{6}$$

Solución:

Al operar con fracciones en sumas o restas es cuando tenemos que tener un mismo denominador para poder sumar o restar los numeradores. Cuando no sucede esto hay que usar el M.C.D. Así, de los denominadores tenemos que:

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$$
$$9 = 3 \cdot 3 = 3^2$$
$$6 = 2 \cdot 3$$
$$\text{M.C.D.} = 2^2 \cdot 3^2 = 36$$

Luego, poniendo como el M.C.D. el 36, tenemos que:

$$\frac{5(3)+7(4)+1(6)}{36} = \frac{15+28+6}{36}$$

$$= \frac{49}{36}$$

Ejemplo 15.

Consideremos ahora la ecuación:

$$\frac{3w}{4} - \frac{w}{2} + \frac{1}{4} = 2w - 5$$

Solución:

Para poder resolver este tipo de ecuaciones con fracciones, primero debemos encontrar el M.C.D. de la ecuación. Para ello debemos calcular el m.c.m. (mínimo común múltiplo) de los denominadores 4 y 2 que es el 4.

Una vez localizado el M.C.D. por el teorema 2, tenemos:

$4(\frac{3w}{4} - \frac{w}{2} + \frac{1}{4}) = 4(2w - 5)$ (teorema 2 y usando el M.C.D. = 4)

$\frac{(4)(3)w}{4} - \frac{4(w)}{2} + \frac{4(1)}{4} = 4(2w) - 4(5)$ (propiedad distributiva)

$3w - 2w + 1 = 8w - 20$ (efectuando la operación de multiplicación)

Ahora, resolvemos esta ecuación equivalente por cualquiera de las formas vistas anteriormente:

$(3-2)w + 1 = 8w - 20$ (propiedad distributiva)

$w + 1 = 8w - 20$ (ecuación equivalente)

$(-8w) + w + 1 = (-8w) + 8w - 20$ (teorema 1 y usando el inverso aditivo de 8w)

$(-8w) + w + 1 + (-1) = 0 - 20 + (-1)$ (teorema 1 y el inverso aditivo de 1)

$(-8w) + w = -20 + (-1)$

$(-8 + 1)w = -21$ (propiedad distributiva)

$-7w = -21$ (ecuación equivalente)

$(-\frac{1}{7})(-7w) = (-\frac{1}{7})(-21)$ (teorema 2 y el inverso multiplicativo de -7)

$w = \frac{21}{7}$

$w = 3$ (ecuación equivalente)

Comprobación:

$\frac{3w}{4} - \frac{w}{2} + \frac{1}{4} = 2w-5$ (ecuación dada)

$\frac{3(3)}{4} - \frac{(3)}{2} + \frac{1}{4} = 2(3)-5$ (conjunto sustitución)

$\frac{9}{4} - \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = 6 - 5$

$\frac{9 - 3(2) + 1}{4} = 1$ (común denominador)

$\frac{9 - 6 + 1}{4} = 1$

$\frac{4}{4} = 1$

$1 = 1$ (es verdadera)

Por lo tanto el conjunto solución es $\{3\}$.

Ejemplo 16.

Resolver la ecuación:

$$\frac{5b}{3} + \frac{3}{7} - \frac{b}{2} = \frac{3b}{14} + \frac{4}{21}$$

Solución:

Primero encontremos el M.C.M de 3, 7, 2, 14, 21.

$$\begin{aligned} 3 &= 3 \\ 7 &= 7 \\ 2 &= 2 \\ 14 &= 2 \times 7 \\ 21 &= 3 \times 7 \\ \text{m.c.m.} &= 3 \times 7 \times 2 = 42 \end{aligned}$$

Luego, con el teorema 2 y el M.C.D. = 42, tenemos:

$$42\left(\frac{5b}{3} + \frac{3}{7} - \frac{b}{2}\right) = 42\left(\frac{3b}{14} + \frac{4}{21}\right)$$

$$\frac{(42)(5b)}{3} + \frac{(42)(3)}{7} - \frac{(42)(b)}{2} = \frac{(42)(3b)}{14} + \frac{(42)(4)}{21}$$

(propiedad distributiva)

$$(14)(5b) + (6)(3) - (21)b = (3)(3b) + (2)(4)$$

$$70b + 18 - 21b = 9b + 8$$

(ecuación equivalente)

Ahora, resolviendo esta ecuación equivalente tenemos:

$$(70-21)b + 18 = 9b + 8$$

$$49b + 18 = 9b + 8 \quad \text{(ecuación equivalente)}$$

$$(-9b) + 49b + 18 = (-9b) + 9b + 8 \quad \text{(teorema 1)}$$

$$(-9b) + 49b + 18 + (-18) = 0 + 8 + (-18) \quad \text{(teorema 1)}$$

$$(-9b) + 49b + 0 = 8 + (-18) \quad \text{(teorema 1)}$$

$$(-9 + 49)b = -10$$

$$40b = -10 \quad \text{(ecuación equivalente)}$$

$$\left(\frac{1}{40}\right)(40b) = \left(\frac{1}{40}\right)(-10) \quad \text{(teorema 2)}$$

$$b = -\frac{10}{40}$$

$$b = -\frac{1}{4} \quad \text{(ecuación equivalente)}$$

Comprobación:

$$\frac{5b}{3} + \frac{3}{7} - \frac{b}{2} = \frac{3b}{14} + \frac{4}{21} \quad \text{(ecuación original)}$$

$$\frac{5}{3}b + \frac{3}{7} - \frac{1}{2}b = \frac{3}{14}b + \frac{4}{21}$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{3}{7} - \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{14}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{4}{21} \quad \text{(conjunto sustitución)}$$

$$-\frac{5}{12} + \frac{3}{7} + \frac{1}{8} = -\frac{3}{56} + \frac{4}{21}$$

$$\frac{-5(14) + 3(24) + 21}{168} = \frac{-3(3) + 4(8)}{168}$$

$$\frac{-70 + 72 + 21}{168} = \frac{-9 + 32}{168}$$

$$\frac{-70 + 93}{168} = \frac{23}{168}$$

$$\frac{23}{168} = \frac{23}{168} \quad \text{(es verdadera)}$$

Por lo tanto el conjunto solución es {- 1/4}

De lo anterior podemos resumir que: "cuando haya ecuaciones lineales que tengan fracciones primero aplicamos el teorema 2 con el m.c.m. de los denominadores o bien se le llama también el M.C.D. Luego, la ecuación equivalente la resolvemos por los pasos vistos en secciones anteriores". Al igual que en las demás ecuaciones se debe comprobar siempre la respuesta en la ecuación original.

AUTOEVALUACIÓN 6.

Hallar los conjuntos solución de las ecuaciones siguientes. En todos los casos, comprobar los resultados en la ecuación original.

1.- $\frac{3y}{4} - \frac{y}{2} + \frac{1}{4} = 2y - 5$

2.- $\frac{5y}{8} - \frac{y}{3} - \frac{1}{9} = \frac{3y}{4} - 2$

3.- $y - \frac{11y}{7} + \frac{7}{3} = \frac{3}{7} - 2y$

4.- $\frac{3y}{5} - \frac{y}{8} - \frac{7}{4} = \frac{7y}{10} - 3$

5.- $\frac{4y}{3} + 3 - \frac{y}{6} = \frac{1}{3} + \frac{y}{2}$

6.- $\frac{2y}{3} + 7 = \frac{2}{3} - \frac{11y}{12}$

3-11 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES EN GENERAL.

En esta sección podremos utilizar todos los métodos de las secciones anteriores para resolver ecuaciones que contengan tanto fracciones como paréntesis. Esperamos que el estudiante a esta altura ya haya adoptado un procedimiento regular; aquí vamos a utilizar,el que consiste en quitar primeramente los paréntesis y en segundo término las fracciones.

Ejemplo 17.

Consideremos ahora la ecuación

$$\frac{1}{7}(2c - 4) - \frac{1}{2}(c - 5) = \frac{3}{14}$$

Solución:

Para resolver este tipo de ecuaciones, se sugieren los pasos siguientes:

1) Eliminar los paréntesis usando para ello la propiedad distributiva.

$$\frac{1}{7}(2c) - \frac{1}{7}(4) - \frac{1}{2}(c) + \frac{1}{2}(5) = \frac{3}{14}$$

$$\frac{2c}{7} - \frac{4}{7} - \frac{c}{2} + \frac{5}{2} = \frac{3}{14} \quad \text{(ecuación equivalente)}$$

2) Aplicar el teorema 2 a la ecuación equivalente por el M.C.D. = 14.

$$14\left(\frac{2c}{7} - \frac{4}{7} - \frac{c}{2} + \frac{5}{2}\right) = 14\left(\frac{3}{14}\right)$$

$$(2)(2c) - (2)(4) - (7)(c) + (7)(5) = (1)(3)$$

$$4c - 8 - 7c + 35 = 3 \quad \text{(ecuación equivalente)}$$

3) Resolviendo la ecuación equivalente por el método acostumbrado, tenemos:

$$4c - 8 + (8) - 7c + (35)+(-35) = 3 + (8)+(-35)$$

$$4c - 7c = 3 + 8 - 35$$

$$(4 - 7)\,c = 11 - 35$$

$$-3c = -24$$

$$(-\tfrac{1}{3})(-3c) = (-\tfrac{1}{3})(-24)$$

$$c = 8 \quad \text{(ecuación equivalente)}$$

Comprobación:

$$\frac{1}{7}(2c-4) - \frac{1}{2}(c-5) = \frac{3}{14} \quad \text{(ecuación original)}$$

$$\frac{1}{7}\left[2(8)-4\right] - \frac{1}{2}\left[8-5\right] = \frac{3}{14} \quad \text{(conjunto sustitución)}$$

$$\frac{1}{7}(16-4) - \frac{1}{2}(3) = \frac{3}{14}$$

$$\frac{12}{7} - \frac{3}{2} = \frac{3}{14}$$

$$\frac{3}{14} = \frac{3}{14} \quad \text{(es verdadera)}$$

Por lo tanto, el conjunto solución es $\{8\}$.

AUTOEVALUACIÓN 7.

Hallar los conjuntos solución de las ecuaciones siguientes. En todos los casos, comprobar los resultados en la ecuación original.

1.- $\frac{1}{4}(4x + 3) + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}(3x - 2)$

2.- $\frac{1}{5}(10x + 7) - \frac{2}{3}(4x-2) = \frac{1}{10}(5x + 4)$

3.- $\frac{1}{2}(3x + \frac{4}{3}) - \frac{2}{3}(\frac{5x}{4} + 2) = 2x$

4.- $\frac{1}{8}(2x + 3) - \frac{2}{3}(5x - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}(\frac{5}{6} - 3x)$

5.- $\frac{1}{7}(2x - 4) - \frac{1}{2}(x - 5) = \frac{3}{14}$

6.- $\frac{1}{5}(\frac{3x}{2} + 10) = \frac{1}{4}(\frac{7x}{5} + 6)$

7.- $\frac{1}{4}(\frac{5x}{3} + 2) - \frac{1}{3}(3x - \frac{5}{2}) = \frac{1}{6}(4x - 7)$

3-12 CÁLCULO DEL VALOR DE UNA VARIABLE EN UNA FÓRMULA.

Las fórmulas tienen un interés especial porque expresan relaciones que son muy útiles tanto en las ciencias como en las matemáticas. Por ejemplo, la fórmula $F = 9/5\ C + 32$ expresa la relación entre la temperatura medida en la escala centígrada y en la escala Farenheit. La fórmula $P = 2\ell + 2a$ expresa la relación entre las variables que representan el perímetro y el ancho de un rectángulo.

El dominio de las variables en una fórmula está determinado por su significado en cada caso que se presenta en la práctica. Así, por ejemplo, consideremos la fórmula $C = 4n$, que establece el costo (c) de "n" camisas a $ 120.00 por camisa. Es claro que "n" en este caso tiene como dominio al conjunto de los números naturales, puesto que no se comparan fracciones de camisas.

Ahora, si los valores de todas las variables, excepto de una, se conocen, suele ser fácil calcular el valor de la variable desconocida.

Ejemplo 18.

El área total de un prisma rectangular de largo "ℓ", ancho "a", y altura "h", está dado por la fórmula:

$$A = 2\ell a + 2\ell h + 2ah$$

Encontrar el área total cuando $\ell = 20$ cm, a = 8 cm, h = 2.5 cm.

Solución:

Comenzamos por *sustituir* todos los valores conocidos en la fórmula dada, de tal manera que:

$$A = 2(20)(8) + 2(20)(2.5) + 2(8)(2.5)$$

Ahora, efectuando los productos y sumando todos los términos queda que:

$$A = 320 + 100 + 40$$
$$A = 460 \text{ cm}^2$$

Para comprobar el resultado sustituiremos en la fórmula original cada variable por su valor correspondiente, incluyendo el que hemos encontrado. Si la igualdad que resulta es una identidad, la respuesta es correcta.

$$A = 2\ell a + 2\ell h + 2ah$$

$$460 = 2(20)(8) + 2(20)(2.5) + 2(8)(2.5)$$
$$460 = 320 + 100 + 40$$
$$460 = 460$$

Ejemplo 19.

Consideremos ahora la fórmula:

$$M = C + C\,rt$$

que se usa para calcular el monto (capital más interés) que se obtiene al invertir un capital (C) a un tipo de interés (r) por un número de años (t).

Si al invertir un capital (C) por dos años al 4 % de interés nos da un monto de $ 5,400.00. ¿Cuál es el capital C?

Solución:

Primero sustituyamos los valores conocidos como son M= $ 5,400.00, r = 0.04, t = 2, en la fórmula de tal manera que:

$$M = C + C\,rt$$

$$5400 = C + C(0.04)(2)$$

Luego, simplificando tenemos:

$$5400 = C + 0.08\,C$$
$$5400 = (1 + 0.08)C$$
$$5400 = 1.08\,C$$

Aplicamos ahora el teorema 2 y el inverso multiplicativo de 1.08 a la ecuación equivalente, tenemos que:

$$\left(\frac{1}{1.08}\right)(5400) = \left(\frac{1}{1.08}\right)(1.08\ C)$$

$$\frac{5400}{1.08} = C$$

$$C = \$\ 5,000.00$$

el capital es de \$ 5,000.00. Se deja la comprobación al estudiante.

Ejemplo 20.

La fórmula A = h/2 (a+b) se usa para encontrar el área de un trapecio. En ella "h" es la altura y "a" y "b" son las longitudes de las bases inferior y superior del trapecio. Si el área de un trapecio es de 84 cm^2, la altura de 8 cm y la base inferior mide 12 cm, encontrar la base superior.

Solución:

$A = (h/2)(a + b)$	(fórmula dada)
$84 = (8/2)(a + 12)$	(sustitución de datos conocidos)
$84 = 4(a + 12)$	
$84 = 4a + 48$	(propiedad distributiva)
$84 + (-48) = 4a + 48 + (-48)$	(teorema 1 y el inverso aditivo de 48)
$36 = 4a$	
$4a = 36$	(propiedad de simetría de la igualdad)
$\left(\frac{1}{4}\right)(4a) = \left(\frac{1}{4}\right)(36)$	(teorema 2 y el inverso multiplicativo de 4)
$a = 9$	

La base superior mide 9 cm.

Comprobación:

$$A = (h/2)(a+b)$$

$$84 = 8/2\ (9 + 12)$$

$$84 = 4(21)$$

$$84 = 84$$

AUTOEVALUACIÓN 8.

En todos los casos encontrar el valor de la variable desconocida.

1.- En la fórmula $P = 2\ell + 2a$, encontrar "P" si $\ell = 3.5$ y $a = 5$ cm.

2.- Si $S = 6e$, encontrar "S" si $e = 4$ cm.

3.- Si $A = 2(ab + ac + bc)$, encontrar "A" cuando $a = 3$ cm, $b = 6$ cm, $c = 4.5$ cm.

4.- Si $C = 2\pi r$, hallar "r" si $C = 88$ cm y $\pi = 22/7$.

5.- Si $M = C + Crt$, hallar "t" si $M = \$\ 200$, $C = \$\ 100.00$ y $r = 5\ \%$.

6.- Si $A = 1/3\ (x+y+z)$, hallar "z" si $A = 73$, $x = 88$ e $y = 62$.

7.- Si $E = I\ (R + r)$ encontrar "r" si $E = 132$, $I = 12$ y $R = 6$.

8.- Si $K = wv^2/2g$, encontrar "w" si $K = 1296$, $v = 48$ y $g = 9.8$.

3-13 DESPEJAR UNA LITERAL DE UNA FÓRMULA.

Una variable puede estar en cualquier miembro de la igualdad que expresa una fórmula. A la que está sola en el primer miembro se le llama a veces el "sujeto" de la fórmula. Es la literal con respecto a la cual la fórmula da una descripción o regla. Algunas veces conviene escribir la fórmula con un diferente "sujeto". Es lo que se llama "despejar" una literal de la fórmula.

Ejemplo 21.

De la fórmula A = 1/2 bh despejar "h", o sea, escribir "h" como sujeto.

Solución:

Podemos escribir esta fórmula como:

$$\frac{1}{2}bh = A \quad \text{(propiedad de simetría de la igualdad)}$$

ó

$$\frac{b}{2}h = A$$

Puesto que deseamos despejar "h", aplicamos el teorema 2, multiplicando ambos miembros de la ecuación por el inverso multiplicativo de b/2 para obtener una ecuación equivalente

$$\left(\frac{2}{b}\right)\left(\frac{b}{2}\right) h = \left(\frac{2}{b}\right)(A) \quad \text{(teorema 2)}$$

$$h = \frac{2}{b}\,A$$

ó

$$h = \frac{2A}{b}$$

Ejemplo 22.

De la fórmula F = 9/5 C + 32, despejar C.

Solución:

$$\frac{9}{5}C + 32 = F \quad \text{(propiedad de simetría de la igualdad)}$$

$$\frac{9}{5}C + 32 + (-32) = F + (-32) \quad \text{(teorema 1 y el inverso aditivo de 32)}$$

$$\frac{9}{5}C = F - 32 \quad \text{(ecuación equivalente)}$$

$$\left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{9}{5}C\right) = \left(\frac{5}{9}\right)(F-32) \quad \text{(teorema 2 y el inverso multiplicativo de 9/5).}$$

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

AUTOEVALUACIÓN 9.

En los siguientes ejercicios, despejar la variable que se indica :

1.- V = d/t, despejar "t".

2.- PV = rT, despejar "V".

3.- $d = v_o t + \frac{1}{2} gt^2$, despejar "$v_o$".

4.- $P = 2\ell + 2a$, despejar "ℓ".

5.- $S = \frac{1}{2} h (a+b)$, despjar "a".

6.- C = 10d + 5n, despejar "n".

7.- $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$, despejar "h".

8.- D = dq + r, despejar "q".

3-14 CONJUNTOS SOLUCIÓN DISTINTOS.

Resumiendo , las secciones anteriores tratamos con proposiciones abiertas como lo son las ecuaciones lineales en una variable, vimos como resolverlas, o sea encontramos su conjunto solución por diferentes formas o procedimientos.

En general, al resolver una ecuación lineal se sugieren los siguientes pasos:

1) Visualizar la ecuación original, si está afectada por paréntesis, proceder a efectuar las multiplicaciones. (Por la propiedad distributiva).

2) Una vez que ya se expresó la ecuación original en otra equivalente, observar si no contiene fracciones. En caso de contener fracciones hacer uso del teorema 2 de la igualdad multiplicando ambos lados de la ecuación por el M.C.D. de la ecuación, o sea, el m.c.m. de los denominadores de la ecuación. Proceder después a efectuar las multiplicaciones correspondientes, con el fin de expresar la ecuación en otra equivalente que no contenga fracciones.

3) Una vez expresada la ecuación original en otra equivalente fuera de paréntesis y fracciones, se puede proceder a resolverla de 2 maneras:

   a) Trasponer, por medio del teorema 1 de la igualdad, hacia un mismo miembro de la ecuación todos los términos que contengan la variable y hacia el otro miembro los otros términos que no contengan variable. Luego, proceder a simplificar ambos miembros de la ecuación y despejar la variable. (Encontrar su conjunto solución).

   b) O bien, primero podemos simplificar ambos miembros de la ecuación, reuniendo términos semejantes y expresarla en la forma $ax + b = cx + d$. Luego, haciendo uso del teorema 1, trasponer hacia un miembro de la ecuación los términos que contengan variable y hacia el otro miembro los que no contengan variable. Después proceder a simplificar y despejar la variable. (Encontrar el conjunto solución).

4) Sustituir el valor encontrado en la ecuación original para comprobar si el valor encontrado mantiene la igualdad. Si la mantiene la igualdad entonces ese es el conjunto solución de la ecuación original dada.

Es muy importante el hecho de que el estudiante compruebe la solución encontrada con el fin de que esté seguro de la respuesta.

Ejemplo 23.
Ahora consideremos la ecuación:

$$3y + 8 - 5y - 3 = 13 - 2y - 8$$

Resolviéndola por los pasos expuestos anteriormente, tenemos:

$$3y - 5y + 8 - 3 = 13 - 8 - 2y \qquad \text{(reordenando los términos)}$$

$$(3-5)y + 5 = 5 - 2y$$

$$-2y + 5 = 5 - 2y \qquad \text{(ecuación equivalente)}$$

$$(+2y) - 2y + 5 = 5 - 2y + (2y) \qquad \text{(teorema 1 y el inverso aditivo de } -2y\text{)}$$

$$0 + 5 = 5$$

$$5 = 5 \qquad \text{(elemento de identidad de la suma)}$$

Vemos que se nos ha eliminado la variable y sin embargo se cumple la igualdad. Cuando al resolver una ecuación de este tipo nos quede una *identidad*, decimos que *el conjunto solución es el dominio de la variable* o sea, el conjunto de los números reales, en caso de no especificarlo.

En este caso, en realidad aún cuando sea una ecuación, se trata de una *proposición cerrada* y no abierta.

$$0 + 11 + 0 - 2 = 6 + 0 + 7 + 0 - 4$$
$$11 - 2 = 6 + 7 - 4$$
$$9 = 13 - 4$$
$$9 = 9 \quad \text{(es verdadero)}$$

Por lo tanto, el conjunto solución es $\{0\}$.

Podemos resumir diciendo:

a) Si una ecuación es equivalente a una expresión verdadera tal como $0 = 0$, $5 = 5$, etc.; entonces la ecuación será verdadera para *todos* los valores de la variable. Por lo tanto, su conjunto solución será el dominio de la variable.

b) Si una ecuación es equivalente a una expresión falsa, tal como $1 = 3$, $5 = 0$, etc.; entonces la ecuación será verdadera para *ninguno* de los valores de la variable; por lo tanto su conjunto solución será ϕ ó $\{\}$.

AUTOEVALUACIÓN 10.

Determinar los conjuntos solución para las siguientes ecuaciones:

1.- $4x + 3 - 7x + 2 = 11 - 3x + 8$

2.- $3m - 5 + 6m - 7 = 2 + 11m - 14 - 2m$

3.- $2(7p + 3) = 5(6p + 4) - 7(3p + 2)$

4.- $4(3 - 5y) - 6(2 - 7y) = 11(2y + 5)$

5.- $\frac{5}{6}(2y + 9) - \frac{3}{4}(5y - 2) = \frac{3}{4}(7y + 12)$

6.- $\frac{3}{5}(6y + 2) - \frac{2}{3}(4y + 3) = \frac{2}{15}(7y - 6)$

AUTOEVALUACIÓN DE LA LECCIÓN 1

1.- Determine el conjunto solución de $y + 6 = 12$ cuando el dominio de y es: a) $\{1,2,3,4,5\}$; b) $\{y/y$ es un número racional$\}$.

2.- En general, siempre que se multiplique cada lado de una proposición abierta por el mismo número, se obtiene una proposición abierta __________, cuidando que el número por el cual se multiplique no __________.

3.- También se dice que dos ecuaciones son equivalentes si ______________________________

4.- ¿Qué se entiende por dominio de la variable? __________

5.- ¿Qué se entiende por conjunto solución? __________

6.- Cuando no se especifica el dominio de la variable se entiende que __________

7.- ¿Qué entiende por ecuaciones equivalentes? __________

8.- ¿Qué puede decir acerca de una ecuación? __________

9.- ¿Qué significa "resolver una ecuación"?

10.- ¿Qué se entiende por ecuaciones idénticas y condicionales?

11.- Traduce las siguientes frases verbales a frases matemáticas apropiadas.

a) Un número aumentado por el doble de sí mismo.

b) La diferencia entre la cuarta parte de un número y la mitad del número.

12.- Traduce las siguientes frases matemáticas a frases verbales apropiadas.

a) $\frac{2}{3}(4n + 5)$

b) $\frac{3x + 2}{4}$

13.- Hallar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones comprobando su resultado:

a) $\frac{5}{4}K = -\frac{3}{8}$

b) $-\frac{2}{9}y = -\frac{11}{4}$

c) $3y + 7 + 5y = 2y - 12 + 1$

d) $5(2y - 3) - 7(3y - 2) = -2(3y + 2)$

e) $\frac{3y}{5} - \frac{1}{4} + \frac{7y}{10} = \frac{3y}{2} + \frac{3}{4}$

f) $\frac{2}{5}(y + \frac{3}{4}) - \frac{3}{4}(\frac{3y}{5} + 2) = -\frac{1}{5}(3y + 7)$

g) $\frac{3}{4}(2y + 7) - \frac{5}{6}(y - 3) = \frac{1}{3}(2y - 5)$

14.- De la fórmula $C = \frac{SE}{SK + R}$, despejar S.

15.- De la fórmula $\frac{a}{g} = \frac{h - L}{h + L}$, despejar L.

16.- Si $K = \frac{wv^2}{2g}$, encontrar w si K = 1296, v = 48 y g = 9.8.

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DEL CAPÍTULO II.

AUTOEVALUACIÓN 1.

11.-	$x - 5$	16.-	$2x + \frac{1}{2}x$
12.-	$12z$	17.-	$z + 1$
13.-	$\frac{1}{3}x$	18.-	$2x \; (x \in Z)$
14.-	$y + 10$	19.-	$2x + 1 (x \in Z)$
15-	$10d + 25c$	20.-	$10x+y$

AUTOEVALUACIÓN 2.

2.- a) $-1, 1$ b) $3, \; -1/3$ c) $-4x, \; 1/4x$
d) $-5xy, \; 1/5xy$ e) $-5-x, \; 1/(5+x)$ f) $-4y+3x, \; 1/(4y-3x)$

3.- b), c) y d)

4.- a) -3 b) 1 c) -9
d) 3 e) -1 f) 2
g) -7

5.- a) $1/2$ b) 3 c) -2
d) $-1/4$ e) $1/5$ f) $6/7$

6.- {17}

7.- {22}

8.- {69}

9.- {8 }

10.- {-10}

11.- {-7}

12.- {-1/2}

13.- {-7/3}

14.- {1/3}

15.- {13/16}

16.- {21/2}

17.- {20/3}

AUTOEVALUACIÓN 3.

1.- {15}

2.- {-1}

3.- {-9}

4.- { 7}

5.- { 4}

6.- { 9}

7.- { 3}

8.- {-2/3}

9.- { 5 }

10.- {7/5}

11.- $\{-\frac{5}{4}\}$

12.- {7/5}

13.- {11/8}

14.- {3/2}

15.- {2}

16.- {-3}

17.- {-2/3}

AUTOEVALUACIÓN 4.

1.- {11}

2.- {1}

3.- {-6}

4.- {-17}

5.- {-1}

6.- {-17/2}

7.- { 2}

8.- {-1/3}

AUTOEVALUACIÓN 5.

1.- {19}

2.- {-29}

3.- {11 }

4.- {-5}

5.- {-3/7}

6.- {-21/2}

7.- {-15}

8.- {-5/2}

9.- {13/3}

AUTOEVALUACIÓN 6.

1.- {3}

2.- $\{\frac{136}{33}\}$

3.- {-4/3}

4.- {50/9}

5.- {-4}

6.- {-4}

AUTOEVALUACIÓN 7.

1.- {-7/2}

2.- {2}

3.- {-1/2}

4.- {3/14}

5.- {8}

6.- {10}

7.- {2}

AUTOEVALUACIÓN 8.

1.- 17

2.- 24

3.- 117

4.- 14

5.- 20

6.- 69

7.- 5

8.- 11.025

AUTOEVALUACIÓN 9.

1.- $t = d/V$

2.- $V = \dfrac{rT}{P}$

3.- $v_o = \dfrac{d}{t} - \dfrac{1}{2}gt$

4.- $\ell = \dfrac{P - 2a}{2}$

5.- $a = \dfrac{2s}{h} - b$

6.- $n = \dfrac{c - 10d}{5}$

7.- $h = \dfrac{3V}{\pi r^2}$

8.- $q = \dfrac{D - r}{d}$

AUTOEVALUACIÓN 10.

1.- ϕ

2.- El dominio de la variable.

3.- {0}

4.- ϕ

5.- { 0}

6.- El dominio de la variable.

ECUACIONES LINEALES EN DOS VARIABLES.

LECCIÓN 2.

3-15 INTRODUCCIÓN.

Hace miles de años, cuando el hombre aprendió a contar, inventó sistemas numéricos. Al hacerlo, sentó inconscientemente las bases de lo que un día sería el álgebra. El origen del álgebra, como el comienzo mismo del lenguaje, es desconocido, pero podemos estar seguros de que se desarrolló a causa del interés que la gente ha tenido siempre por los números.

Sabemos que los antiguos babilonios, conocieron, hace más de cinco mil años, los sistemas de numeración de bases 10 y 60. Aun cuando supieron extraer raíces cuadradas, resolver algunos tipos de ecuaciones y calcular el interés compuesto, su álgebra era muy elemental y limitada.

Ni los greigos ni los romanos estuvieron sensiblemente más adelantados. A los griegos les interesaban más la geometría y la lógica, mientras que los romanos se preocuparon principalmente en problemas prácticos de topografía y mediciones.

Por cerca de mil quinientos años no hubo avances de importancia, especialmente en el uso de letras y símbolos. Un siglo o dos antes del descubrimiento de América por Colón, la gente comenzó a preocuparse por el álgebra: Primero los hindúes, árabes y persas, más tarde, los españoles, italianos y alemanes.

Poco después de la invención de la imprenta, por 1490, comenzaron a aparecer muchos libros de aritmética y álgebra.

AUTOEVALUACIÓN 8.

1.-	17	5.-	20
2.-	24	6.-	69
3.-	117	7.-	5
4.-	14	8.-	11.025

AUTOEVALUACIÓN 9.

1.- $t = d/V$

2.- $V = \dfrac{rT}{P}$

3.- $v_o = \dfrac{d}{t} - \dfrac{1}{2}\,gt$

4.- $\ell = \dfrac{P - 2a}{2}$

5.- $a = \dfrac{2s}{h} - b$

6.- $n = \dfrac{c - 10d}{5}$

7.- $h = \dfrac{3V}{\pi r^2}$

8.- $q = \dfrac{D - r}{d}$

AUTOEVALUACIÓN 10.

1.- ϕ

2.- El dominio de la variable.

3.- {0}

4.- ϕ

5.- { 0}

6.- El dominio de la variable.

ECUACIONES LINEALES EN DOS VARIABLES.

LECCIÓN 2.

3-15 INTRODUCCIÓN.

Hace miles de años, cuando el hombre aprendió a contar, inventó sistemas numéricos. Al hacerlo, sentó inconscientemente las bases de lo que un día sería el álgebra. El origen del álgebra, como el comienzo mismo del lenguaje, es desconocido, pero podemos estar seguros de que se desarrolló a causa del interés que la gente ha tenido siempre por los números.

Sabemos que los antiguos babilonios, conocieron, hace más de cinco mil años, los sistemas de numeración de bases 10 y 60. Aun cuando supieron extraer raíces cuadradas, resolver algunos tipos de ecuaciones y calcular el interés compuesto, su álgebra era muy elemental y limitada.

Ni los greigos ni los romanos estuvieron sensiblemente más adelantados. A los griegos les interesaban más la geometría y la lógica, mientras que los romanos se preocuparon principalmente en problemas prácticos de topografía y mediciones.

Por cerca de mil quinientos años no hubo avances de importancia, especialmente en el uso de letras y símbolos. Un siglo o dos antes del descubrimiento de América por Colón, la gente comenzó a preocuparse por el álgebra: Primero los hindúes, árabes y persas, más tarde, los españoles, italianos y alemanes.

Poco después de la invención de la imprenta, por 1490, comenzaron a aparecer muchos libros de aritmética y álgebra.

Poco después se desarrolló el álgebra, tal como la conocemos. Las fracciones decimales, los números negativos, los exponentes y las raíces, fueron algunas de las ideas que se empezaron a usar ampliamente.

Desde principios del siglo XX, los símbolos y métodos del álgebra son más elaborados. Una página de álgebra moderna parece un grupo de marcas sin significado, pero puede ser leída, por los que han aprendido álgebra, tan fácilmente como una prosa cualquiera. Y lo más importante, esta álgebra "teórica" es una herramienta indispensable en la ciencia, en la ingeniería y en la tecnología.

3-16 GRÁFICAS.

Es costumbre muy generalizada, en la vida moderna, establecer comparaciones entre ciertas magnitudes, como la producción de tal o cual artefacto, de algún metal determinado en varios años, los records alcanzados en atletismo en varias olimpiadas, las velocidades a que se ha llegado con los modernos medios de transporte, los nacimientos y las defunciones en tal número de años, etc., ya sea limitándose a un país o bien a regiones más extensas del globo o al mundo entero.

En la practica, la comparación de esas magnitudes se hace sobre todo por gráficas, basándose en los datos numéricos correspondientes a dichas magnitudes.

La ventaja de las gráficas es mostrar, rápida e intuitivamente, la relación que guardan las magnitudes que se comparan, cosa que no se logra al mismo grado, con simples datos numéricos.

3-17 LAS GRÁFICAS EN ÁLGEBRA.

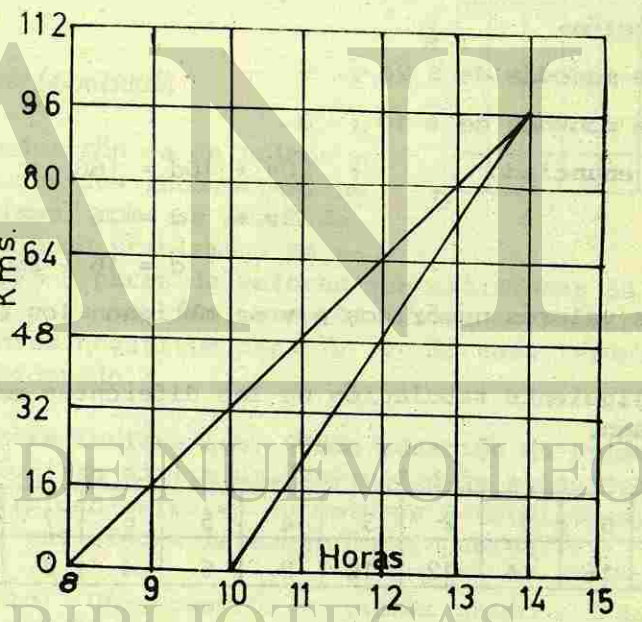
Lo que más interesa en Álgebra, es la representación gráfica de fórmulas y ecuaciones, en la resolución de problemas, como se ve a continuación.

Ejemplo 1.

Un ciclista sale a las 8 de la mañana con una velocidad, supuesta uniforme de 16 Km por hora, con dirección a un punto determinado. Otro ciclista sale dos horas después, con una velocidad de 24 Km por hora y se dirige hacia el mismo punto. ¿Cuánto tiempo tardará el segundo en alcanzar al primero?

Solución:

La gráfica adjunta indica que se encuentran cuatro horas después de haber salido el segundo ciclista, es decir, a las 14 horas.



La misma gráfica señala igualmente que cada ciclista ha recorrido 96 Km, y por ella puede verse también, a qué distancia estaba cada uno del otro a las diferentes horas: 32 Km a las 10, 24 a las 11, 16 a las 12, etc.

La resolución del mismo problema, por ecuación es:

Número pedido : x

recorrido por el primer ciclista : $32 + 16x$

recorrido por el segundo cicilista : $24x$

según el enunciado : $32 + 16x = 24x$

$$32 = 24x - 16x$$

$$8x = 32$$

$$x = 4 \text{ horas}$$

Ejemplo 2.

Se quiere pagar la cantidad de \$ 160 con monedas de \$ 20 **y monedas de \$ 10.** ¿De cuántas maneras puede hacerse el pago?

Solución:

Número de monedas de \$ 20 : v

Número de monedas de \$ 10 : d

según el enunciado : $20v + 10d = 160$

$$2v + d = 16$$

$$d = 16 - 2v$$

dando los valores numéricos a v se obtienen los correspondientes a d.

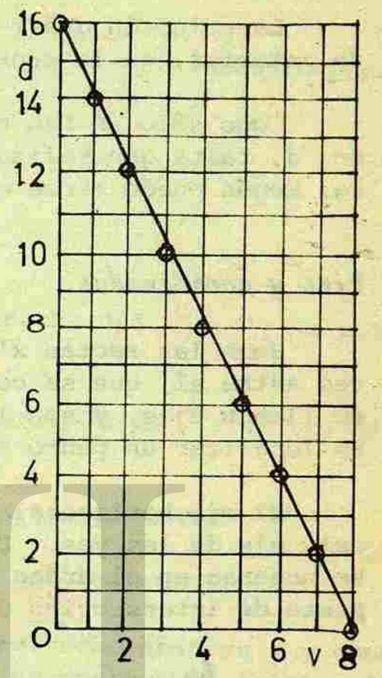
La siguiente tabulación de las diferentes maneras de hacer el pago.

v	0	1	2	3	4	5	6	7	8
d	16	14	12	10	8	6	4	2	0

Puede dibujarse un diagrama como el adjunto, en donde se **ha llevado, en dirección horizontal,** el número de monedas de **\$20, y en dirección vertical** el de las monedas de \$ 10.

Los puntos blancos tomados en la recta que une los puntos **extremos, indican** las diferentes soluciones del problema y **corresponden a los pares** de valores calculados para v y d **en la tabulación.**

Ecuación determinada.



En las ecuaciones y problemas de la lección anterior se ha obtenido una sola raíz o solución, lo cual permite afirmar que: Toda ecuación de primer grado con una incógnita solo tiene una raíz o solución, es decir, existe un valor único, bien determinado para dicha incógnita, que satisface la ecuación.

Luego: toda ecuación de primer grado con una incógnita es determinada.

Ecuación indeterminada.

Si la ecuación es de primer grado, pero con dos incógnitas, no sucede lo mismo, como se acaba de ver en el segundo problema. Se han encontrado 9 pares de valores que satisfacen la ecuación $2v + d = 16$, y se habrían obtenido más si se hubieran podido señalar valores negativos para v y d, cosa inadmisible en el caso considerado.

De esto se infiere que: Toda ecuación de primer grado con dos incógnitas admite una infinidad de soluciones, es decir, una infinidad de pares de valores determinados, no arbitrarios, que satisfacen la ecuación propuesta.

Por tanto: Una ecuación de primer grado con dos incógnitas, es indeterminada.

3-18 REPRESENTACIÓN CARTESIANA.

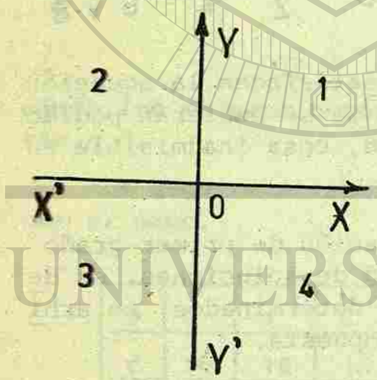
La solución gráfica dada al segundo problema en el párra-fo anterior, es la representación llamada cartesiana.

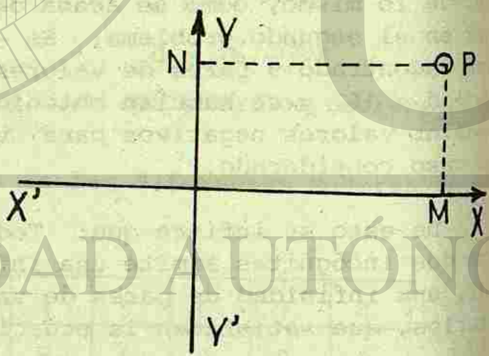
Como sólo se han considerado valores positivos de v y de d, falta generalizar para valores algebraicos cualesquiera, según puede verse a continuación.

Ejes y coordenadas.

Sean las rectas x'x y y'y (ver figura), perpendiculares entre sí, que se cortan en el punto 0. Estas dos rectas se llaman ejes, y son líneas de referencia, porque sirven para localizar un punto en el plano que determinan.

El eje horizontal se llama eje de las equis y el vertical, eje de las yes. Dichos ejes determinan 4 cuadrantes que se numeran en el orden que está indicado en la figura. El punto de intersección 0 se llama origen o cero.





Abscisa de un punto P es su distancia NP al eje vertical, y suele representarse con x (ver figura).

Ordenada de un punto P es su distancia MP al eje horizontal, y suele representarse con, y.

La abscisa y la ordenada del punto P se llaman coordenadas cartesianas de ese punto.

Signos de las coordenadas.

Por convención:

1.- Toda abscisa que queda a la derecha del eje y'y es positiva.

2.- Toda abscisa que queda a la izquierda de y'y es negativa.

3.- Toda ordenada arriba del eje x'x es positiva.

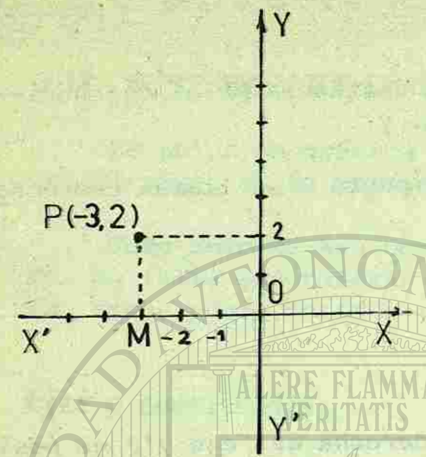
4.- Toda ordenada debajo del mismo eje es negativa.

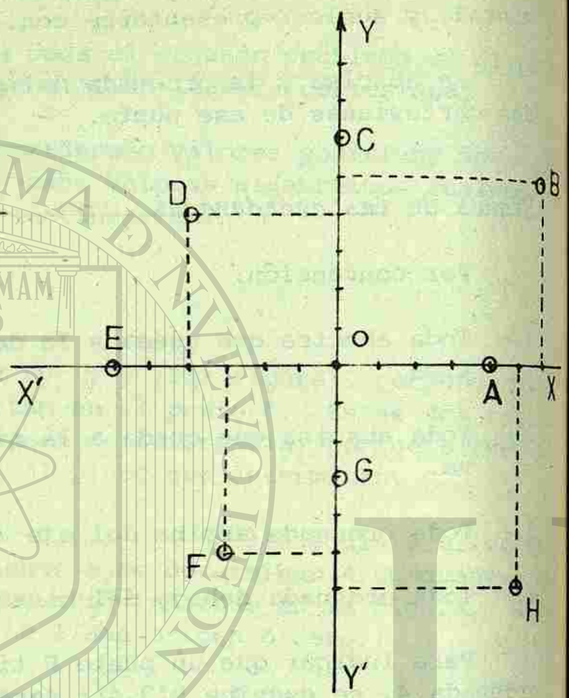
Para indicar que un punto P tiene como abscisa 3 y como ordenada 4, se escribe P(3,4); para un punto M de abscisa 5 y ordenada (-7), se escribe M(5,-7).

La coordenada horizontal es la que se escribe primero.

Representación de un punto.

Para representar un punto cualquiera, por ejemplo, -- P(-3,2), se llevan 3 unidades sobre x'x a partir de 0, a la izquierda, con lo cual se obtiene el punto M. En M se levanta una perpendicular (ver figura) y en ella, partiendo de M, se cuentan dos unidades hacia arriba, y se tiene representado el punto P.





La unidad es arbitraria y en la generalidad de los casos se toma la misma para las "x" y para las "y".

El uso de papel cuadriculado es muy recomendable para gráficas, pues con él se evita el trazo de perpendiculares. En la figura anterior se han presentado los siguientes puntos:

A(4, 0), B(6, 5), C(0, 6), D(-4, 4),
E(-6, 0), F(-3,-5), G(0,-3), H(5,-6),

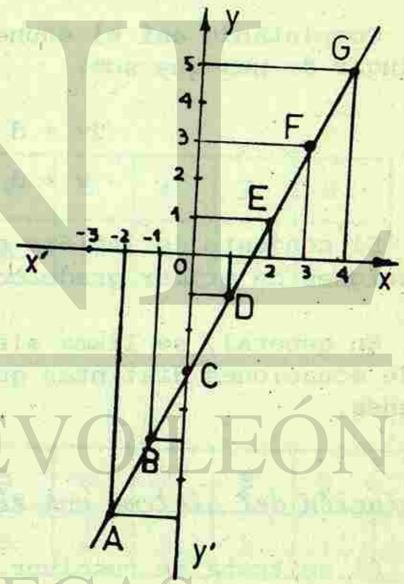
Representación de una ecuación.

En general una ecuación con dos incógnitas o variables, se puede representar gráficamente. Sea la ecuación, $y= 2x-3$. A cada valor que se atribuya a x (variable independiente), corresponde un valor para y (función).

Se comienza a tabular:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-7	-5	-3	-1	1	3	5
puntos	A	B	C	D	E	F	G

Llevando los valores de x como abscisas (ver figura), y los de "y" como ordenadas, según se ha explicado, cada par de valores quedará representado por un punto.



Uniendo ordenadamente los diferentes puntos obtenidos, resulta una recta, que es la representación gráfica o cartesiana de la ecuación, $y = 2x - 3$. Por tanto, toda ecuación de primer grado con dos incógnitas, de la forma $y = 2x - 3$, o generalizando $y= mx + b$, se llama ecuación lineal, porque su gráfica es una línea recta.

3-19 ECUACIONES SIMULTÁNEAS DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS.

Sistema de ecuaciones.

Si se quiere pagar la suma de $ 160 con monedas de $ 20 y monedas de $10, ¿cuántas monedas de cada clase se deberán entregar?

La resolución del problema da lugar a la ecuación, d= 16 - 2v, la cual admite muchas soluciones que satisfacen las condiciones del problema. Pero este problema, indeterminado, porque tiene muchas respuestas, deja de serlo si se introduce este nuevo dato: El número de monedas debe de ser 10.

Completando así el enunciado, se tienen dos ecuaciones en lugar de una que son:

$$2v + d = 16$$

$$v + d = 10$$

El conjunto de las dos ecuaciones forma un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

En general, se llama sistema de ecuaciones todo conjunto de ecuaciones distintas que tienen una o más soluciones comunes.

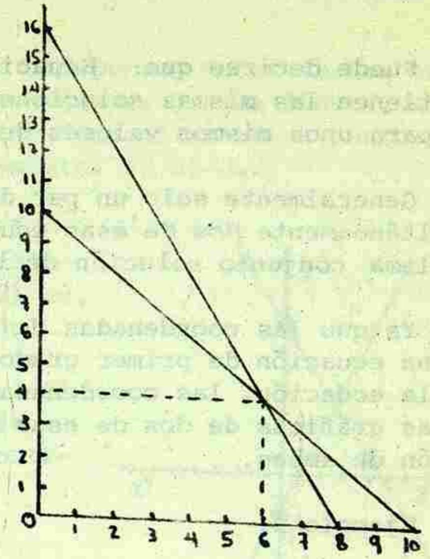
Resolución del sistema por el método gráfico.

Si se trata de resolver el sistema que se está considerando:

$$2v + d = 16 \qquad (1)$$

$$v + d = 10 \qquad (2)$$

se pueden representar gráficamente las rectas que corresponden a las dos ecuaciones. Su intersección que, como se ve en la figura se verifica en el punto v = 6, d = 4, es la solución del sistema, puesto que cualquiera de esas dos ecuaciones se satisfacen por estos valores.



Podría resolverse también por tabulación como se indica a continuación.

Para (1):

v	0	1	2	3	4	5	6	7	8
d	16	14	12	10	8	6	4	2	0

Para (2):

v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Los dos pares de valores, iguales en las dos tabulaciones, son las soluciones del sistema.

Las dos ecuaciones que se satisfacen para los mismos valores de v y de d, se llaman ecuaciones simultáneas.

Puede decirse que: Ecuaciones simultáneas son aquellas que tienen las mismas soluciones, es decir que, se satisfacen para unos mismos valores de las incógnitas.

Generalmente solo un par de valores pueden satisfacer simultáneamente dos de esas ecuaciones. Ese par de valores se llama conjunto solución de las dos ecuaciones.

Ya que las coordenadas de cualquier punto de la gráfica de una ecuación de primer grado con dos incógnitas, satisfacen la ecuación, las coordenadas del punto de intersección de las gráficas de dos de esas ecuaciones, constituyen la solución de ambas.

Ejemplo 3.

Resolver gráficamente las ecuaciones:

$$3x + 2y = 14 \qquad (1)$$
$$2x - y = 2 \qquad (2)$$

Solución:

Se resuelven primero (1) y (2) para "y", se obtiene:

$$(3) \quad y = -\frac{3}{2}x + 7$$

$$(4) \quad y = 2x - 2$$

Ahora, se asignan a "x" los valores, -2, 0, 4 en (3); y -3, 0, 3 en (4). Con ellos se obtienen las siguientes tablas con los correspondientes valores de "x" y "y"

x	-2	0	4
y	10	7	1

, de (3) y

x	-3	0	3
y	-8	-2	4

de (4)

Representando gráficamente los puntos determinados en estas tablas y construyendo las gráficas de las líneas, se obtiene la figura 1. Las gráficas se cortan en un punto cuyas coordenadas, son aproximadamente, (2.6, 3.2)

Por tanto, de acuerdo con la gráfica se puede decir que la solución de las ecuaciones (1) y (2) es, x= 2.6, y= 3.2. La exactitud del procedimiento empleado depende del valor de la escala considerada. Si en el miembro de la izquierda de (1) se sustituyen los valores obtenidos, se tiene:

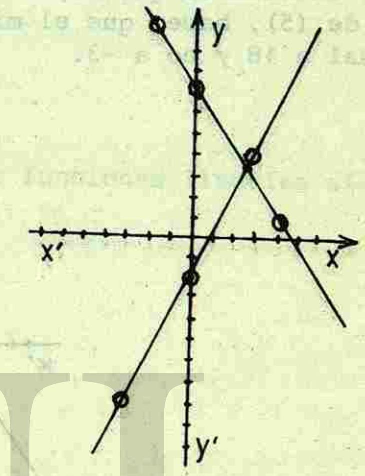


Fig. 1.

$$3(2.6) + 2(3.2) = 14.2$$

De igual manera, para los mismos valores de "x" y de "y" el miembro de la izquierda de (2), se transforma en 2(2.6)-3.2; ya que los miembros de la derecha de (1) y (2) son, respectivamente, 14 y 2, se observa que el par de valores x= 2.6, y y= 3.2 no es exactamente la solución de las dos ecuaciones pero que con una cifra decimal más, quizá se obtengan los valores correctos.

Tipos de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Puede suceder que las gráficas de dos ecuaciones de primer grado sean rectas paralelas. Por ejemplo: en la fig. 2, se muestran las gráficas de dos rectas paralelas que corresponden a las ecuaciones siguientes:

$$(5) \quad 3x - 2y = 6$$

$$(6) \quad 9x - 6y = -3$$

Por tanto, las ecuaciones no tienen solución. Algebráicamente se puede observar este hecho, si se considera que el miembro de la izquierda de (6), es exactamente 3 veces mayor que el miembro de la izquierda de (5). Por tanto cualquier par de valores que hagan igual a 6 el miembro de la izquierda de (5), hacen que el miembro de la izquierda de (6) sea igual a 18 y no a -3.

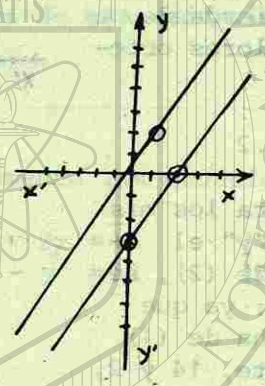


Fig. 2

Por otro lado, se pueden tener dos ecuaciones cuyas gráficas coinciden en todos sus puntos. Entonces, cualquier par de valores que satisfaga a la primera ecuación, satisface también a la segunda, y el par de ecuaciones tiene un número infinito de soluciones.

Si dos ecuaciones con dos incógnitas tienen una, y sólo una solución, se denominan ecuaciones consistentes. Si no tienen solución, se llaman soluciones inconsistentes, y si tienen un número infinito de soluciones, ecuaciones dependientes.

Aunque el método gráfico es un auxiliar para comprender los tres anteriores tipos de pares de ecuaciones de primer grado, no es, sin embargo, un método eficaz para obtener la solución, cuando ésta existe.

En primer lugar es excesivamente laborioso, en segundo, la exactitud del método depende de la habilidad del operador para construir las dos gráficas y para estimar las coordenadas de su punto de intersección. Los tres métodos algebráicos que se presentarán a continuación son más fáciles para obtener con absoluta exactitud la solución, cuando ésta exista.

AUTOEVALUACIÓN 1.

Construir las gráficas de las funciones lineales siguientes:

1.- $y= x + 1$

2.- $y=-x + 2$

3.- $y= 3x+ 4$

4.- $2x + 3y = 6$

Dados los siguientes pares de ecuaciones lineales, construye las rectas y determina las coordenadas del punto de intersección por el método gráfico.

5.- $y= -2x - 1$

$y= 3x + 9$

6.- $y= -3x + 10$

$y= 2x - 10$

7.- $y= x - 1$

$y= -x + 5$

Diga si el siguiente par de ecuaciones lineales son consistentes, inconsistentes o dependientes.

8.- $2x + 3y = 6$

$3x -10y = 15$

9.- $6x - 8y = -2$

$3x - 4y = 5$

10.- $y + 5x = 3$

$2y + 10x = 6$

3-20 ELIMINACIÓN DE UNA INCÓGNITA.

El procedimiento gráfico que se acaba de exponer, por lo general, no es de aplicación práctica.

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es preferible reducir el sistema propuesto a una sola ecuación que solo contenga una incógnita. A esta reducción se le llama eliminación de una incógnita.

La eliminación se funda en que una misma literal de un sistema tiene igual valor en cada ecuación. Así, en el sistema anterior, v y d tienen el mismo valor, porque en cada una representan, respectivamente, el número de monedas de \$ 20 y \$ 10.

Evidentemente que si del primer miembro de la primera se resta el primero de la segunda, y de 16 se resta 10, o sea, si se restan miembro a miembro las dos ecuaciones, resultan diferencias iguales, y solo se tiene: $v = 6$ con lo cual queda eliminada la incógnita d.

Eliminar una incógnita de un sistema de ecuaciones es reducir el sistema propuesto a otro que tenga una ecuación y una incógnita menos.

Métodos de eliminación.

Los principales métodos de eliminación son:

1.- Por adición o sustracción.

2.- Por igualación,

3.- Por sustitución.

Mediante la aplicación de alguno de estos tres métodos se resuelven algebraicamente los sistemas de ecuaciones simultáneas.

3-21 ELIMINACIÓN DE UNA VARIABLE POR ADICIÓN O SUSTRACCIÓN.

Para resolver dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, se elimina primero una de las variables. Esto es, de las dos ecuaciones dadas se obtiene una tercera, con una sola incógnita, cuya solución es uno de los valores buscados. Luego se sustituye este valor en cualquiera de las ecuaciones dadas y se resuelve ésta para la otra incógnita.

Frecuentemente el proceso de eliminación puede ser más extenso para una variable que para la otra. Por tanto se recomienda estudiar el problema antes de intentar resolverlo y con ello seleccionar el método que requiera menor número de operaciones.

Los pasos a seguir para la resolución de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas pueden resumirse como sigue:

a) Seleccionar la incógnita más fácil de eliminar.

b) Se encuentra el M.C.M. de los dos coeficientes de esta incógnita.

c) Se multiplican los dos miembros de cada ecuación por el cociente obtenido al dividir el anterior M.C.M. entre el coeficiente de la incógnita seleccionada en la ecuación.

d) Se suman o se restan los miembros correspondientes de las ecuaciones obtenidas en el paso anterior, según sean opuestos o iguales los signos de los términos en los que aparece la incógnita seleccionada.

e) Se resuelve para la incógnita que queda, la ecuación resultante.

f) Se substituye el valor obtenido en el paso anterior en cualquiera de las ecuaciones dadas y se resuelve ésta para la otra incógnita.

g) Se escribe el conjunto solución en la forma, { x=____ y=_________ } poniendo los valores obtenidos en los pasos e) y f).

h) Se comprueban las operaciones sustituyendo en la ecuación original que no se usó en el paso f), los valores en el paso g).

Ejemplo 4.

Resolver las ecuaciones:

$$(7) \quad 4x - 11y = -3$$
$$(8) \quad 6x + 7y = 19$$

Solución:

Los M.C.M. de los coeficientes de "x" y de "y" son 12 y 77, respectivamente. Por tanto, se pueden operar con números más pequeños si se elimina "x" en vez de "y".

Si se divide 12 entre 4, y 12 entre 6 se obtiene 3 y 2 respectivamente. Por tanto se multiplicarán los dos miembros de (7) por 3 y los de (8) por 2, y se obtiene:

$$(9) \quad 12x - 33y = -9$$
$$(10) \quad 12x + 14y = 38$$

Ya que los términos que contienen a "x" tienen el mismo signo, se resta (10) de (9), y se tiene:

$$(11) \quad -47y = -47$$
$$\underline{y = 1}$$

Sustituyendo en (7), y = 1, se tiene:

$$(12) \quad 4x - 11 = -3$$
$$4x = 11 - 3 = 8$$
$$\underline{x = 2}$$

Por consiguiente el conjunto solución es {(2,1)}

Puesto que para obtener el valor de x se usó la ecuación (7), se debe comprobar la solución mediante el uso de (8). Para x = 2, y = 1, el miembro de la izquierda de (8), es:

$$6(2) + 7(1) = 12 + 7 = 19$$

Siendo también 19 el miembro de la derecha de (8), la solución es correcta.

AUTOEVALUACIÓN 2.

Resolver eliminando por adición o sustracción, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales. (Hacer oralmente los cinco primeros) y comprobar las soluciones.

1.- $x + y = 4$
$x - y = 2$

2.- $x + y = 3$
$x - y = 1$

3.- $x + y = 6$
$x - y = 2$

4.- $x + 2y = 5$
$x + y = 4$

5.- $3x + 2y = 7$

$3x + y = 5$

6.- $x - y = 27$

$x + y = 33$

7.- $3x - y = 4$

$x + 3y = -2$

8.- $4x - 26 = y$

$3x + 5y - 31 = 0$

9.- $15u = 10 - 20v$

$25u = 30v + 80$

10.- $x + 1 = y/4$

$x = \frac{y + 1}{5}$

3-22 ELIMINACIÓN DE UNA VARIABLE POR SUSTITUCIÓN.

A continuación se enumerarán los pasos a seguir en el método de eliminación por sustitución, y luego se ilustrará su aplicación mediante dos ejemplos.

Con el fin de lograr mayor precisión en lo que va a exponerse, se supondrá que "y" es la variable que debe eliminarse. Sin embargo, las mismas instrucciones pueden seguirse para eliminar a "x", con solo intercambiar "x" y "y" en cada paso.

a) Se resuelve una de las ecuaciones para "y" en términos de "x".

b) Se sustituye el valor encontrado de "y" en la otra ecuación y se obtiene así una ecuación en la que aparece únicamente "x".

c) Se resuelve para "x" esta última ecuación.

d) Se sustituye el valor de "x" en la función obtenida en el paso a), y se calcula el valor de "y".

e) Se escribe el conjunto solución en la forma {(x=______, y=__________)} poniendo los valores obtenidos en los pasos c) y d).

f) Se comprueba la solución sustituyendo sus valores en la ecuación no usada en el paso a).

Ejemplo 5.

Resolver simultáneamente las ecuaciones:

$$(1) \quad 5x + 3y = 13$$

$$(2) \quad 3x - y = 5$$

Solución:

a) Se observa que si la ecuación (2) se resuelve para "y" no se obtienen fracciones. Efectuando la operación, se tiene:

$$(3) \quad y = 3x - 5$$

b) Se sustituye ahora, 3x - 5, en vez de "y" en la ecuación (1) y se tiene:

$$(4) \quad 5x + 3(3x-5) = 13$$

c) Se resuelve esta ecuación.

$$5x + 9x - 15 = 13$$

$$14x = 28$$

$$\underline{x = 2}$$

d) Se sustituye 2 en vez de "x" en la ecuación (3), y se obtiene:

$$y = 3(2) - 5$$

$$\underline{y = 1}$$

e) Por tanto, el conjunto solución es {(2,1)}.

f) Puesto que en el paso a) se usó la ecuación (2), se comprueba la solución obtenida sustituyendo por sus valores las letras del miembro de la izquierda de la ecuación (1).

De este modo se obtiene:

$$5(2) + 3(1) = 10 + 3 = 13$$

Ya que el miembro de la derecha de la ecuación (1) es también 13, la solución es correcta.

Ejemplo 6.

Resolver simultáneamente las ecuaciones:

$$(4) \quad 6x + 5y = 13$$

$$(5) \quad 7x - 4y = 25$$

Solución:

a) Puesto que al resolver como primer paso cualquiera de estas ecuaciones, la solución contiene fracciones, no existe ninguna diferencia en escoger una u otra. Por tanto, arbitrariamente se selecciona (4) y se resuelve para "x" obteniendo:

$$(6) \quad x = \frac{13 - 5y}{6}$$

b) Sustituyendo el miembro de la derecha de (6) en vez de "x" en (5), se tiene:

$$(7) \quad 7\left(\frac{13 - 5y}{6}\right) - 4y = 25$$

Eliminando las fracciones en (7) y multiplicando ambos miembros por 6, se tiene:

$$7(13-5y) - 24y = 150$$

$$91 - 35y - 24y = 150$$

$$-59y = 59$$

$$\underline{y = -1}$$

d) Sustituyendo -1 en vez de "y" en (6), se tiene:

$$x = \frac{13 - 5(-1)}{6} = 3$$

e) Por tanto el conjunto solución es, $\{(3,-1)\}$

f) La solución se comprueba sustituyendo por sus valores las letras del miembro de la izquierda de (5) y se obtiene:

$$7(3) - 4(-1) = 25$$

Por tanto, siendo 25 el miembro de la derecha de (5), la solución es correcta.

AUTOEVALUACIÓN 3.

1.- Si, y= 6, ¿cuál es el valor de x en: $2y + x = 16$?

2.- Si, x= 4, ¿cuál es el valor de y en, $x+3y = 16$?

3.- Si y= 7, ¿cuál es el valor de x en, $x + 2y = 19$?

4.- Si x= y, ¿cuál es el valor de y en, $x+2y = 6$?

5.- Si x= 2y, ¿cuál es el valor de y en $x + 2y = 8$?

Resolver los siguientes sistemas eliminando por el método de sustitución.

6.- $x + y = 23$
$x - y = 7$

7.- $2x + y = 3$
$3x - 7y = 30$

8.- $5x - 7y = -1$
$3x + 4y = 24$

9.- $x - y = 37$
$2x + 3y = 31x + 13y$

10.- $\frac{x + y}{5} = \frac{x - y}{3}$
$x - 4 = 2y$

3-23 ELIMINACIÓN DE UNA VARIABLE POR IGUALACIÓN.

Ejemplo 7.

Resolver el sistema:

$$2x + 3y = 23 \qquad (1)$$

$$5x - 2y = 10 \qquad (2)$$

Solución:

a) Se despeja el valor de x en (1) y en (2) y se tiene:

$$x = \frac{23 - 3y}{2} \qquad (3)$$

$$x = \frac{10 + 2y}{5} \qquad (4)$$

b) Se igualan las dos expresiones que representan el valor de x:

$$\frac{23 - 3y}{2} = \frac{10 + 2y}{5}$$

eliminando los denominadores y resolviendo se tiene:

$$115 - 15y = 20 + 4y$$

$$-19y = -95$$

$$\underline{y = 5}$$

c) Se sustituye en (3) o en (4) el valor hallado para y:

$$x = \frac{10 + 10}{5} = 4$$

Por lo tanto el conjunto solución es $\{(4,5)\}$

Ejemplo 8.

Resolver el sistema:

$$11x - 7y = 37 \qquad (5)$$

$$8x + 9y = 41 \qquad (6)$$

Solución:

Se va a eliminar y.

a) Se despeja el valor de y en (5) y en (6) y se tiene:

$$y = -\frac{37 - 11x}{7} \qquad (7)$$

$$y = \frac{41 - 8x}{9} \qquad (8)$$

b) Se igualan las dos expresiones que representan el valor de y:

$$-\frac{37 - 11x}{7} = \frac{41 - 8x}{9}$$

Procediendo como antes, se tiene:

$$-333 + 99x = 287 - 56x$$

$$155x = 620$$

$$\underline{x = 4}$$

c) Se sustituye en (7) o en (8) el valor hallado para x:

$$y = -\frac{37-44}{7} = -\frac{-7}{7} = 1$$

Por lo tanto, el conjunto solución es, $\{(4,1)\}$

De estos ejemplos se deduce que: para resolver un sistema de ecuaciones simultáneas, eliminando por el método de igualación:

a) Se despeja, en cada ecuación, la incógnita que se quiere eliminar.

b) Se igualan las expresiones que representan el valor de la incógnita eliminada.

c) Se resuelve la ecuación que resulta, con lo cual se obtiene el valor de la incógnita no eliminada.

d) Se sustituye el valor hallado en una de las expresiones que representa el valor de la otra incógnita, y se resuelve.

Se deja al estudiante la comprobación de las soluciones de los sistemas de ecuaciones de los 2 ejemplos anteriores.

AUTOEVALUACIÓN 4.

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones, eliminando por el método de igualación y comprobar las soluciones.

1.- $x + y = 12$
$x - y = 8$

2.- $5x - 40 = 2y$
$5y - 26 = 2x$

3.- $4x - 5y = 2$
$5x + 3y = 21$

4.- $6x + 2y = -3$
$5x - 3y = -6$

5.- $12x - 5y = 10$
$30x + 11y = -69$

6.- $3x + 7y = 2$
$7x + 8y = -2$

7.- $5x - 24y = -123$
$19x - 36y = -81$

8.- $x/y = 3/4$
$5x - 4y = -3$

9.- $x/3 + y/2 = 4/3$
$x/y = 1/2$

10.- $\dfrac{16 - 3y}{4} \quad x$

$\dfrac{19 - 8y}{7} = x$

AUTOEVALUACIÓN DE LA LECCIÓN 2.

1.- Encuentra las coordenadas del punto de intersección del siguiente par de ecuaciones lineales, usando el método gráfico:

$$3x + y = 7$$
$$2x - 3y = 12$$

0) $x = 2, y = 3$ 1) $x = 3, y = -2$
2) $x = 0, y = -1$ 3) $x = -1, y = 0$

A partir del siguiente par de ecuaciones lineales, y usando el método de eliminación por suma o resta, encuentra lo siguiente:

$$x + 2y = 5 \quad (1)$$
$$3x - y = 1 \quad (2)$$

2.- Resultado de multiplicar la ecuación (2) por 2 y sumársela a la ecuación (1).

0) $7y = y$ 1) $6x = 2$
2) $2y = 5$ 2) $7x = 7$

3.- Resultado de sustituir el valor de "x" en la ecuación (1).

0) $2y = 1$ 1) $2y = 4$
2) $2y = 5$ 3) $5y = 1$

4.- Encuentra el conjunto solución de las ecuaciones (1) y (2).

0) $x = 1, y = 2$ 1) $x= -1, y= 3$
2) $x = 7, y = 4$ 3) $x = 0, y = 1/2$

A partir del siguiente par de ecuaciones lineales, y usando el método de eliminación por sustitución, encuentra lo siguiente:

$$2x + 7y = 3 \quad (3)$$
$$x - 5y = -7 \quad (4)$$

5.- Resultado de despejar la "x" en la ecuación (4).

0) $7 - 5y$ 1) $5y - 7$
2) $-7 - 5y$ 3) $7y - 5$

6.- Resultado de sustituir el valor anterior de "x" en la ecuación (3) y simplificar.

0) $7y = 3$ 1) $10y = 14$
2) $7y = 5$ 3) $17y = 17$

7.- Encuentra el conjunto solución de las ecuaciones (3) y (4).

0) $x = 12, y = 17$ 1) $x = 1, y = -2$
2) $x = -2, y = 1$ 3) $x = 0, y = 0$

8.- Resuelve el siguiente par de ecuaciones lineales, por cualquiera de los métodos de eliminación.

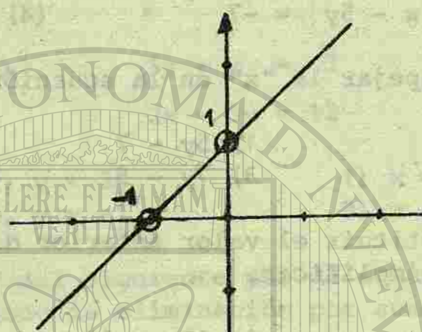
$$\frac{x + y}{2} + \frac{y}{3} = \frac{1}{6}$$
$$x - y = 3$$

0) $x = 0, y = 3$ 1) $x = 2, y = -1$
2) $x = 3, y = 2$ 3) $x = -1, y = 2$

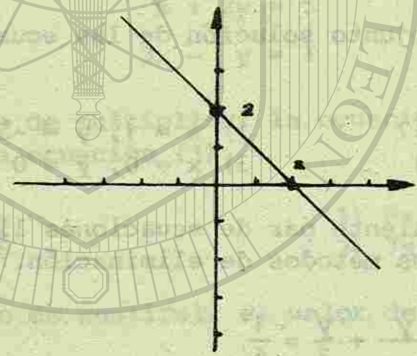
RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DE LA LECCIÓN 2.

AUTOEVALUACIÓN 1.

1.-

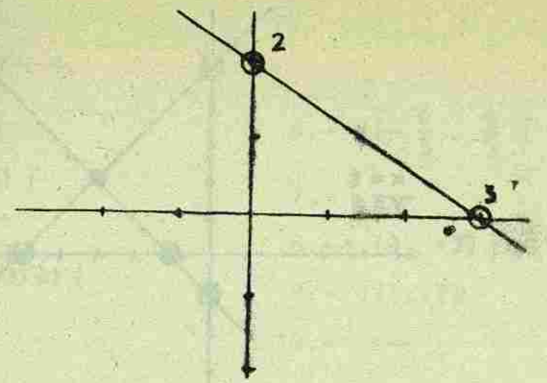


2.-

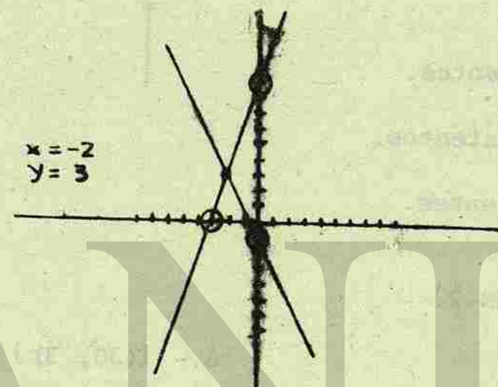


3.-

4.-

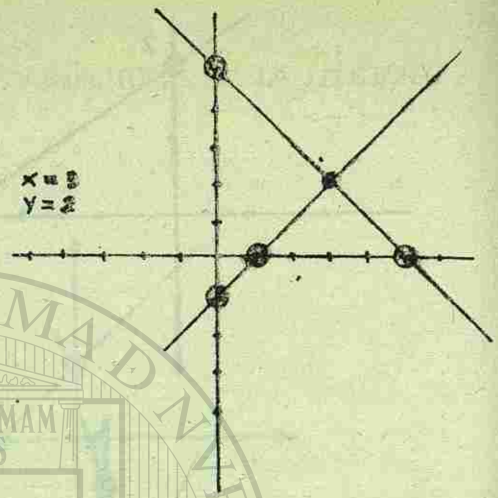


5.-



6.-

7.-



8.- Consistentes.

9.- Inconsistentes.

10.- Dependientes.

AUTOEVALUACIÓN 2.

1.- {(3, 1)}	6.- {(30, 3)}
2.- {(2, 1)}	7.- {(1, -1)}
3.- {(4, 2)}	8.- {(7, 2)}
4.- {(3, 1)}	9.- {(2, -1)}
5.- {(1, 2)}	10.- $\{(-\frac{1}{3}, -\frac{8}{3})\}$

AUTOEVALUACION 3.

1.- 4	6.- {(15, 8)}
2.- 4	7.- {(3, -3)}
3.- 5	8.- {(4, 3)}
4.- 2	9.- —
5.- 2	10.- {(8, 2)}

AUTOEVALUACIÓN 4.

1.- {(10, 2)}	6.- $\{(-\frac{6}{5}, \frac{4}{5})\}$
2.- {(12, 10)}	7.- —
3.- {(3, 2)}	8.- {(9, 12)}
4.- {(-3/4, 3/4)}	9.- {(1, 2)}
5.- —	10.- —

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON TRES INCOGNITAS.

LECCIÓN 3.

3-24 INTRODUCCIÓN.

Aproximadamente dos décadas después a la introducción de las computadoras electrónicas, estamos en el comienzo de la revolución tecnológica. Comenzamos a ver la herramienta poderosa que significan estas computadoras de alta velocidad y las máquinas que se utilizan para procesar los datos automáticamente.

Es asombrosa la gran variedad de campos en los cuales se aplican las computadoras, tanto en la ciencia, como en la contabilidad, en la ingeniería, en la medicina, por mencionar unos cuantos. Se usan para controlar el tráfico, para analizar las condiciones del subsuelo, para interpretar cardiogramas, para estudiar la compleja estructura de las moléculas. Las computadoras han hecho posible el control automático de los procesos en la industria del petróleo, acero y textil, entre otras. Sin las computadoras electrónicas, pocas o ninguna de las exploraciones recientes del espacio exterior hubieran sido posibles.

Recientemente, se usaron en el análisis de los esfuerzos en las estructuras de acero de rascacielos de cien pisos de altura. Fue necesario resolver un sistema de 1500 ecuaciones simultáneas, que las computadoras efectuaron en 45 minutos.

3-25 ECUACIONES LINEALES CON TRES INCOGNITAS.

Consideraremos ahora el problema de resolver un sistema de tres ecuaciones lineales en tres incógnitas. Los métodos algebráicos que fueron usados para resolver un sistema de ecuaciones en dos incógnitas servirán de una manera análoga en el presente caso de tres incógnitas.

Un sistema de tres ecuaciones lineales en tres incógnitas tiene una solución, o no tiene solución, o tiene una infinidad de soluciones.

Esta misma situación fue discutida en el caso de dos incógnitas. Pero consideraremos sistemas de tres incógnitas que tienen una y solo una solución.

3-26 METODO DE SUMA Y RESTA.

Para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas se procede de este modo:

1.- Se combinan dos de las ecuaciones dadas y se elimina una de las incógnitas (lo más sencillo es eliminarla por suma y resta) y con ello se obtiene una ecuación con dos incógnitas.

2.- Se combina la tercera ecuación con cualquiera de las otras dos ecuaciones dadas y se elimina entre ellas la misma incógnita que se eliminó antes, obteniéndose otra ecuación con dos incógnitas.

3.- Se resuelve el sistema formado por las dos ecuaciones con dos incógnitas que se ha obtenido, hallando de este modo dos de las incógnitas.

4.- Los valores de las incógnitas obtenidas se sustituyen en una de las ecuaciones dadas originales, con lo cual se halla la tercera incógnita.

5.- Comprobar el conjunto solución en el sistema original.

Ejemplo 1.

Resolver el sistema:

$$x + 4y - z = 6 \qquad (1)$$
$$2x + 5y - 7z = -9 \qquad (2)$$
$$3x - 2y + z = 2 \qquad (3)$$

Solución:

Combinamos las ecuaciones (1) y (2) y vamos a eliminar la x. Multiplicando la ecuación (1) por 2, se tiene:

$$\begin{array}{rl} & 2x + 8y - 2z = 12 \\ & -2x - 5y + 7z = 9 \\ \hline \text{restando:} & 3y + 5z = 21 \quad ; \qquad (4) \end{array}$$

combinando la tercera ecuación (3) con cualquiera de las otras dos ecuaciones dadas. Vamos a combinarla con (1) para eliminar la x. Multiplicando la ecuación (1) por 3 tenemos:

$$\begin{array}{rl} & 3x + 12y - 3z = 18 \\ & -3x + 2y - z = -2 \\ \hline \text{restando:} & 14y - 4z = 16 \qquad (5) \end{array}$$

dividiento entre 2: $7y - 2z = 8$

Ahora tomamos las dos ecuaciones con dos incógnitas que hemos obtenido (4) y (5), y formamos un sistema:

$$3y + 5z = 21 \qquad (4)$$
$$7y - 2z = 8 \qquad (5)$$

Resolvamos este sistema. Vamos a eliminar la z multiplicando (4) por 2 y (5) por 5:

$$6y + 10z = 42$$
$$\underline{35y - 10z = 40}$$
$$41y \quad = 82$$
$$\underline{y = 2}$$

Sustituyendo $y = 2$ en (5) se tiene:

$$7(2) - 2z = 8$$
$$14 - 2z = 8$$
$$-2z = -6$$
$$\underline{z = 3}$$

Sustituyendo $y=2$, $z=3$, en cualquiera de las tres ecuaciones dadas, por ejemplo en (1), se tiene:

$$x + 4(2) - 3 = 6 \qquad \underline{x = 1}$$
$$x + 8 - 3 = 6 \qquad R. \quad \underline{y = 2}$$
$$\underline{x = 1} \qquad \underline{z = 3}$$

Por lo tanto el conjunto solución es: $\{(1,2,3)\}$

Comprobación,

Los valores, $x=1$, $y=2$, $z=3$ tienen que satisfacer las tres ecuaciones dadas. Haga la sustitución y verá que las tres ecuaciones dadas se convierten en identidad.

Ejemplo 2.

Resolver el sistema:

$$2x - 5y = 13 \qquad (1)$$
$$4y + z = -8 \qquad (2)$$
$$x - y - z = -2 \qquad (3)$$

Solución.

En algunos casos, no hay reglas fijas para resolver el sistema y depende de la habilidad del alumno encontrar el modo más expedito de resolverlo. Este ejemplo puede resolverse así:

La ecuación (1) tiene x y y. Entonces tengo que buscar otra ecuación de dos incógnitas que tenga x y y para formar con (1) un sistema de dos ecuaciones que tengan ambas x y y.

Reuniendo (2) y (3):

$$4y + z = -8$$
$$\underline{x - y - z = -2}$$

sumando: $x + 3y = -10 \qquad (4)$

Ya tenemos la ecuación que buscábamos.

Ahora, formamos un sistema con (1) y (4):

$$2x - 5y = 13$$
$$x + 3y = -10$$

Multiplicando esta última ecuación por 2 y restando:

$$2x - 5y = 13$$
$$\underline{-2x - 6y = 20}$$
$$-11y = 33$$
$$y = -3$$

Sustituyendo $y = -3$ en (1):

$$2x - 5(-3) = 13$$
$$2x + 15 = 13$$
$$2x = -2$$
$$x = -1$$

Sustituyendo x = -1, y= -3 en (3):

$$-1 - (-3) - z = -2$$
$$-1 + 3 - z = -2$$
$$-z = -4$$
$$z = 4$$

R. $x = -1$, $y = -3$, $z = 4$

Por lo tanto el conjunto solución es $\{(-1, -3, 4)\}$

AUTOEVALUACIÓN 1

Resuelve los sitemas siguientes por suma y resta:

1.- $x + y + z = 6$; $x - y + 2z = 5$; $x - y - 3z = -10$

2.- $x + y + z = 12$; $2x - y + z = 7$; $x + 2y - z = 6$

3.- $x - y + z = 2$; $x + y + z = 4$; $2x + 2y - z = -4$

4.- $2x + y - 3z = -1$; $x - 3y - 2z = -12$; $3x - 2y - z = -5$

5.- $2x + 3y + z = 1$; $6x - 2y - z = -14$; $3x + y - z = 1$

6.- $5x - 2y + z = 23$; $2x + 5y - 2z = -12$; $x - 4y + 3z = 23$

7.- $4x + 2y + 3z = 8$; $3x + 4y + 2z = -1$; $2x - y + 5z = 3$

8.- $x + y = 1$; $y + z = -1$; $z + x = -6$

9.- $3x - 2y = 0$; $3y - 4z = 25$; $z + 5x = 6$

10.- $5x - 3z = 2$; $2z - y = -5$; $x + 2y - 4z = 8$

3-27 MÉTODO DE SUSTITUCIÓN.

Para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas por el método de sustitución:

1.- Se despeja una de las incógnitas en cualquiera de las ecuaciones.

2.- Se reemplaza la incógnita cuyo valor se ha encontrado en las otras dos ecuaciones.

3.- Se resuelve el sistema que resulta.

4.- Se sustituyen esos valores en cualquiera de las ecuaciones originales para calcular el valor de la otra incógnita.

5.- Se comprueban los resultados.

Ejemplo 3.

Resolver:

$$x - y + 2z = -3 \quad (1)$$
$$4x - y - z = 3 \quad (2)$$
$$3x + 2y + 3z = 4 \quad (3)$$

Solución:

Se despeja x en (1):

$$x = -3 + y - 2z$$

Se sustituye en (2) y (3)

Al sustituir el valor de x en (2) se tiene:

$$4\,(-3 + y - 2z) - y - z = 3$$
$$-12 + 4y - 8z - y - z = 3$$
$$3y - 9z = 15$$

dividiendo entre 3: $\quad y - 3z = 5 \qquad (4)$

Al sustituir el valor de x en (3), se tiene:

$$3(-3 + y - 2z) + 2y + 3z = 4$$
$$-9 + 3y - 6z + 2y + 3z = 4$$
$$5y - 3z = 13 \qquad (5)$$

Se resuelve:

$$y - 3z = 5 \qquad (4)$$

Restando (4) de (5)

$$\begin{array}{rcl} 5y - 3z & = & 13 \quad (5) \\ \hline 4y & = & 8 \\ \underline{y} & \underline{=} & \underline{2} \end{array}$$

Luego se reemplaza el valor de y en (4):

$$2 - 3z = 5$$
$$-3z = 3$$
$$\underline{z = -1}$$

Se sustituyen los valores (y, z) en (1) para obtener el valor de x:

$$x - 2 - 2 = -3$$
$$\underline{x = 1}$$

Comprobación.

En (2):

$$4(1) \quad -2 \quad -(-1) \quad = \quad 4 - 2 + 1 = 3$$

En (3):

$$3(1) \quad +2(2) \quad +3(-1) \quad = \quad 3 + 4 - 3 = 4$$

Por lo tanto el conjunto solución es: $\{(1,2,-1)\}$

AUTOEVALUACION 2.

Por el método de sustitución resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

1.- $3x + 4y - 16z = 0$
$5x - 8y + 10z = 0$
$2x + 6y + 7z = 52$

2.- $x - y - z = 10$
$3x + y + 2z = 0$
$4x + 2y - 3z = 8$

3.- $6x + 2y - 5z = 13$
$3x + 3y - 2z = 13$
$7x + 5y - 3z = 26$

4.- $2x - 3y + 4z = 20$
$4x + 2y - 3z = 11$
$3x + 4y + 2z = 53$

5.- $2x - y = 11$
$3x + 5z = 17$
$2x + 5y + 4z = -3$

6.- $7x + 3y - 2z = 16$
$2x + 5y + 3z = 39$
$5x - y + 5z = 31$

7.- $2x + 3y + 4z = 38$
$3x + 2y - 5z = -8$
$5x - 6y + 3z = 6$

8.- $x + 2y + 2z = 11$
$2x + y + z = 7$
$3x + 4y + z = 14$

9.- $x + 3y + 4z = 18$
$x + 2y + z = 11$
$2x + y + 2z = 10$

10.- $2x + 3y + 4z = 20$
$3x + 4y + 5z = 26$
$3x + 5y + 6z = 31$

3-28 MÉTODO DE IGUALACIÓN.

1.- Se despeja la misma incógnita en las tres ecuaciones.

2.- Se igualan la primera con la segunda y la primera o la segunda con la tercera.

3.- Se resuelve el sistema que resulta.

4.- Se sustituyen los valores obtenidos en cualquiera de las ecuaciones en que la incógnita restante está despejada.

5.- Se comprueban las respuestas.

Ejemplo 4.

Resolver:

$$x + y - z = -7 \qquad (1)$$

$$3x - 2y + 3z = 24 \qquad (2)$$

$$2x + 3y - 5z = -32 \qquad (3)$$

Solución:

Se despeja x en (1)

$$x = z - y - 7 \qquad (4)$$

Se despeja x en (2):

$$x = \frac{24 + 2y - 3z}{3} \qquad (5)$$

Se despeja x en (3):

$$x = \frac{5z - 3y - 32}{2} \qquad (6)$$

Se iguala x en (4) y (5).

$$z - y - 7 = \frac{24 + 2y - 3z}{3}$$

$$3z - 3y - 21 = 24 + 2y - 3z$$

$$5y - 6z + 45 = 0 \qquad (7)$$

Se iguala x en (4) y (6).

$$z - y - 7 = \frac{5z - 3y - 32}{2}$$

$$2z - 2y - 14 = 5z - 3y - 32$$

$$3z - y - 18 = 0 \qquad (8)$$

Se resuelve el sistema:

$$5y - 6z + 45 = 0 \qquad (7)$$

$$-y + 3z - 18 = 0 \qquad (8)$$

	(7)	$5y - 6z + 45 = 0$	
Restando (9) de (7)	(9)	$-2y + 6z - 36 = 0$	Ec. (8) por 2
		$3y + 9 = 0$	

$$3y = -9$$

$$\underline{y = -3}$$

Se sustituye el valor de "y" en la ecuación (8):

$$-(-3) + 3z - 18 = 0$$

$$3z = 15$$

$$\underline{z = 5}$$

Luego se reemplazan los valores de "y" y "z" en cualquiera de las ecuaciones en que la x esté despejada, por ejemplo en (4):

$$\begin{aligned} x &= 5 -(-3) - 7 \\ &= 5 + 3 - 7 \\ &= 1 \\ \underline{x} &\underline{= 1} \end{aligned}$$

Con los valores de x, y, z encontrados se comprueba en las ecuaciones restantes (5) y (6):

$$\text{de (5)} \quad x = \frac{24+2(-3)-(3)(5)}{3} = \frac{24-6-15}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\text{de (6)} \quad x = \frac{(5)(5)-3(-3)-32}{2} = \frac{25+9-32}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Por lo tanto, el conjunto solución es: $\{(1,-3,5)\}$

AUTOEVALUACIÓN 3.

Por el método de igualación resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

1.- $\begin{aligned} x + y - 2z &= 13 \\ x - 3y - z &= -3 \\ x - y + 4z &= -17 \end{aligned}$

4.- $\begin{aligned} 2x - y + z &= -9 \\ x - 2y + z &= 0 \\ x - y + 2z &= -11 \end{aligned}$

2.- $\begin{aligned} x + y + 3z &= 7/2 \\ x - 2y + 4z &= 7 \\ 2x - 11y - 24z &= 5 \end{aligned}$

5.- $\begin{aligned} x - y + z &= 9 \\ x - 2y + 3z &= 32 \\ x - 4y + 5z &= 62 \end{aligned}$

3.- $\begin{aligned} x + y + z &= -1 \\ 3x - y - 5z &= 13 \\ 5x + 3y + 2z &= 1 \end{aligned}$

6.- $\begin{aligned} 3x - y - z &= 7 \\ x - 3y - z &= 21 \\ x - y - 3z &= 27 \end{aligned}$

7.- $\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 5 \\ 3x - 22y + 6z &= 4 \\ 7x - 6y - 3z &= 15 \end{aligned}$

9.- $\begin{aligned} 2x - 3y - 4z &= -10 \\ 3x + 4y + 2z &= -5 \\ 4x + 2y + 3z &= -21 \end{aligned}$

8.- $\begin{aligned} 5x + y + 4z &= -5 \\ 3x \quad 5y + 6z &= -20 \\ x - 3y - 4z &= -21 \end{aligned}$

AUTOEVALUACION DE LA LECCIÓN 3.

A partir de las siguientes tres ecuaciones en tres incógnitas, encuentra lo siguiente:

$$\begin{aligned} (1) \quad & x + y + 2z = 3 \\ (2) \quad & x + 2y + 4z = 3 \\ (3) \quad & x - 3y - 5z = 5 \end{aligned}$$

1.- Resultado de restar ecuación (1) de la (2) para eliminar "x".

0) $y + 2z = 0$ 1) $2y + z = 0$
2) $y + 2z = 3$ 3) $y + z = 5$

2.- Resultado de restar la ecuación (2) de la (3) para eliminar "x".

0) $9y + 5z = 2$ 1) $5y + 9z = 2$
2) $-5y - 9z = 2$ 3) $y + z = 0$

3.- Resultado de eliminar la "y" por adición, de las dos ecuaciones encontradas en los problemas 1 y 2.

0) $z = 0$ 1) $x = 2$
2) $y = 1$ 3) $z = 2$

4.- Encuentra el conjunto solución de las tres ecuaciones.

0) $\{-3, 4, 2\}$ 1) $\{3, -4, 2\}$
2) $\{0, 1, 2\}$ 3) $\{1, 0, 2\}$

A partir de las siguientes tres ecuaciones en tres incógnitas, encuentra lo siguiente:

$$\begin{aligned} (4)\quad 3x + y + 2z &= 1 \\ (5)\quad 2x - y + 3z &= -6 \\ (6)\quad x + y + 2z &= -3 \end{aligned}$$

5.- Resultado de sumar la ecuación (4) a la (5) para eliminar "y".

0) $x + z = -1$ 1) $x + z = 1$
2) $x - z = 1$ 3) $x - z = -1$

6.- Resultado de sumar la ecuación (5) a la (6) para eliminar "y".

0) $3x - 5z = -9$ 1) $3x + 5z = -9$
2) $5x + 3z = -9$ 3) $x - z = 1$

7.- Resultado de eliminar "z" por sustracción de las dos ecuaciones obtenidas en los problemas 5 y 6.

0) $y = 2$ 1) $x = 2$
2) $z = 0$ 3) $x = 0$

8.- Encuentra el conjunto solución de las ecuaciones dadas (4), (5), (6).

0) $\{2, -3, 1\}$ 1) $\{2, -1, 3\}$
2) $\{2, 0, 2\}$ 3) $\{2, 1, -3\}$

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DE LA LECCIÓN 3.

AUTOEVALUACIÓN 1.

1.- $\{1, 2, 3.\}$
2.- $\{3, 4, 5.\}$
3.- $\{-1, 1, 4.\}$
4.- $\{1, 3, 2.\}$
5.- $\{-2, 3, -4\}$
6.- $\{3, -2, 4.\}$
7.- $\{5, -3, -2\}$
8.- $\{-2, 3, -4\}$
9.- $\{2, 3, -4\}$
10.- $\{-2, -3, -4\}$

AUTOEVALUACIÓN 2.

1.- $\{4, 5, 2.\}$
2.- $\{3, -5, -2\}$
3.- $\{2, 3, 1\}$
4.- $\{5, 6, 7\}$
5.- $\{4, -3, 1\}$
6.- $\{2, 4, 5\}$
7.- $\{3, 4, 5\}$
8.- $\{1, 2, 3\}$
9.- $\{2, 4, 1\}$
10.- $\{1, 2, 3\}$

AUTOEVALUACIÓN 3.

1.- $\{2, 3, -4\}$
2.- $\{3, -1, 1/2\}$
3.- $\{1, 0, -2\}$
4.- $\{-4, -5, -6\}$
5.- $\{-6, -7, 8\}$
6.- $\{-2, -5, -8\}$
7.- $\{1, -1/2, -5/3\}$
8.- $\{-3, 4, 3/2\}$
9.- $\{-5, 4, -3\}$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS VÈRBALES.

LECCIÓN 4.

3-29 INTRODUCCIÓN.

Una ecuación, es una expresión que contiene un signo de igualdad y por lo menos una letra. En una fórmula, se utilizan letras para representar términos conocidos, como L para longitud, V para volumen y D para diámetro, etc.

El propósito de aprender cómo resolver ecuaciones, es el de construir una base sobre la cual se puedan resolver problemas complejos.

El planteo de una ecuación es semejante al de una traducción. Plantear una ecuación, es expresar por medio de símbolos matemáticos una condición formulada en palabras, es traducir el lenguaje llano, a fórmulas matemáticas. Las dificultades que podemos tener en plantear la ecuación de un problema son idénticas a las que nos ofrece una traducción.

Para traducir una frase del español al inglés, dos cosas son necesarias: primero, comprender a fondo la frase española y segundo, estar familiarizado con las formas de expresión propias del inglés.

La situación es muy semejante, cuando se trata de expresar en símbolos matemáticos, una condición propuesta en palabras. Se requiere el comprender a fondo la condición, y estar familiarizados con las formas de expresión matemáticas.

Cuando se puede hacer literalmente, palabra por palabra, resulta bastante fácil traducir al inglés un texto en español, para las cuales ello no es posible. Si el texto contiene expresiones de este tipo, la traducción resulta difícil deberemos dedicar más atención al sentido general del texto, que a las palabras mismas, y antes de traducirlo, tendremos sin duda que cambiarlo.

Sucede exactamente igual en el planteo de una ecuación. En los casos sencillos, el enunciado verbal se divide casi automáticamente en diversas partes, cada una de las cuales, puede ser inmediatamente transcrita en términos matemáticos. En los casos más complicados, la condición comprende elementos que no pueden ser de inmediato traducidos en símbolos; deberemos entonces, dedicar menos atención al enunciado para concentrarnos más en el sentido. En tales casos, antes de poner fórmulas por escrito, deberemos transformar primero la condición, aunque teniendo presentes todos los recursos del lenguaje matemático.

3-30 TRATANDO DE ENTENDER LAS RELACIONES NUMÉRICAS.

El éxito en la resolución de problemas en álgebra, dependerá, entre otras cosas, de la habilidad para leer e interpretar las relaciones entre los números. Si no se comprende bien el significado de palabras claves, tales como "disminuido en", "números consecutivos", "recíproco", etc., tendremos dificultad para resolver problemas. Debemos estar capacitados también para relacionar, comparar y operar. Los siguientes ejemplos ayudarán a desarrollar estas habilidades.

Ejemplos.

1) ¿Cuánto queda si a 15 le quitamos un octavo de ocho?

$$x = 15 - (\tfrac{1}{8})(8)$$
$$= 15 - 1$$
$$= 14$$

2) ¿Qué número excede a 3 en 5 unidades?

$$x = 3 + 5$$
$$= 8$$

3) ¿Cuánto es un medio de una mitad?

$$x = (\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2})$$
$$= 1/4$$

4) ¿Cuántas monedas de cinco centavos son equivalentes a 4 monedas de 50 centavos?

x = monedas de cinco centavos

50 centavos = 10 monedas de cinco centavos

x = (4)(10) = 40 monedas de cinco centavos

5) Juan es dos años más joven que Federico que tendrá 18 años dentro de 4. ¿Cuántos años tiene Juan?

La edad actual de Federico = 18 - 4 = 14

La edad de Juan = Edad actual de Federico -2

= 14 - 2

= 12

6) Un tercio de p, más dos.

$$x = 1/3\ p + 2$$

7) La tercera parte de la suma de p y dos.

$$x = \frac{(p+2)}{3}$$
$$= \frac{1}{3}(p+2)$$

AUTOEVALUACIÓN 1.

Contesta las siguientes preguntas sin usar papel ni lápiz.

1.- ¿Cuál es la suma de veinte, la mitad de veinte y una quinta parte de veinte?

2.- ¿Cuánto queda si a 25 lo disminuimos en un cuarto de ocho?

3.- ¿Cuánto es un sexto del producto de cuatro y cinco?

4.- ¿Cuánto es un medio de la diferencia entre 15 y 7?

5.- ¿Cuál es el cociente al dividir la suma de 7 y 11 por 6?

6.- ¿Cuánto es tres cuartas partes de la diferencia entre 60 y 20?

7.- ¿Cuál es la suma de los siguientes tres números pares consecutivos mayores que 8?

8.- ¿Cuál es el resultado si al cociente de ocho dividido por cuatro, se le multiplica por el producto de 5 y 6?

9.- ¿Cuál es el cuadrado de la suma de 3 y 6?

10.- ¿Cuál es la suma de los cuadrados de 3 y 4?

Contesta lo siguiente:

11.- ¿Cuántas monedas de 10 centavos son equivalentes a 3 de 25 y 3 de 5?

12.- Si hay 4 1/3 de semanas en un mes, como promedio, ¿cuántas semanas hay en tres meses?

3-31 CAMBIO DE ORACIONES VERBALES A PROPOSICIONES ABIERTAS.

Cuando las proposiciones verbales expresan relaciones entre números se suelen llamar "enunciados de problemas". El conjunto solución de la proposición abierta consta del conjunto de soluciones del problema. Unos problemas son prácticos y se presentan en la vida diaria y otros pueden catalogarse como simples pasatiempos. Pero aún los pasatiempos constituyen una buena práctica de analizar las situaciones que presenta el problema y formular las proposiciones matemáticas abiertas correspondientes.

Practiquemos primero el cambio de oraciones verbales a proposiciones matemáticas abiertas, (planteo del problema).

Ejemplo 1.

Juan y Paco hicieron un total de 46 puntos en un juego de basket ball. Juan marcó 8 puntos más que Paco. ¿Cuántos puntos hizo cada jugador?

Solución:

Para formular la proposición matemática correspondiente razonamos así:

Sea x = al número de puntos logrados por Paco; puesto que Juan marcó 8 puntos más que Paco, el número de puntos hechos por Juan es x + 8.

La proposición verbal establece que:

$$\underbrace{\text{Número de puntos logrados por Paco:}} + \underbrace{\text{Número de puntos logrados por Juan}} = 46$$

$$x + (x+8) = 46$$

Probablemente puedas encontrar el conjunto solución de esta proposición abierta pero, por ahora, solamente cambiaremos proposiciones verbales a proposiciones abiertas, es decir, plantearemos el problema.

Ejemplo 2.

Dos trenes salen de un pueblo en direcciones opuestas con velocidades de 45 y 50 Km por hora. ¿Al cabo de cuánto tiempo estarán separados 285 Km?

Solución:

Antes de intentar escribir la proposición abierta, analicemos las relaciones que hay en el problema. Si un tren camina a 45 Km por hora, recorrió 45 x 1 = 45 Km en una hora. En dos horas, el tren habrá recorrido, 45 x 2 = 90 Km. En "h" horas, el tren caminará 45 "h" Km. El diagrama siguiente nos ayudará a visualizar el problema:

Trayectoria del primer tren	punto de partida	Trayectoria del segundo tren

Suma de las distancias = 285 Km

Sea "h", el número de horas que han estado caminando los trenes. Entonces, 45 "h" = distancia recorrida por el primer tren y 50 "h" = distancia recorrida por el segundo tren.

$$\underbrace{\text{Distancia recorrida por el primer tren}}_{45\text{ h}} + \underbrace{\text{Distancia recorrida por el segundo tren}}_{50\text{ h}} = \underbrace{285\text{ Km}}_{=\ 285\text{ Km}}$$

Ejemplo 3.

Separar 48 en dos partes tales que el doble de la menor sea 6 unidades más que el mayor.

Solución:

Sea x = la parte menor,

entonces, $48-x$ = la parte mayor.

Así, los dos números son x y $(48-x)$. Ahora, del dato del problema:

$$\underbrace{\text{El doble de la menor}}_{2x}\ \underbrace{\text{es}}_{=}\ \underbrace{\text{6 más que la mayor}}_{(48-x)+6}$$

Ejemplo 4.

Hallar tres números consecutivos impares tales que la suma del primero y del segundo sea igual al tercero más 31.

Solución:

Así, tenemos que si fuera 1 el primer número impar, si le sumamos 2 tendríamos el segundo número impar (3). De igual manera si le sumamos al segundo número impar 2, tendríamos el tercer número impar consecutivo, o sea:

$$\begin{aligned}(1+2)+2 &= 1+4\\ &= 5\end{aligned}$$

Suponiendo ahora que sea x el primer número impar, entonces:

$x+2$ = al siguiente número consecutivo impar.

$x+4$ = al tercer número consecutivo impar.

Una vez encontrados los tres números impares consecutivos, o sea, x, $x+2$, y $x+4$, los ponemos en la proposición matemática verbal de la siguiente manera:

$$\underbrace{\text{primer número}}_{x} + \underbrace{\text{segundo número}}_{(x+2)} = \underbrace{\text{tercer número más 31}}_{(x+4)\ +\ 31}$$

Ejemplo 5.

Un hombre tiene ahora el triple de la edad que tiene su hijo. Dentro de 12 años el padre tendrá el doble de la edad que tendrá su hijo. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

Solución:

Separemos el "enunciado del problema", de la siguiente manera:

1) "Un hombre tiene ahora el triple de la edad que tiene su hijo". Si x representa la edad actual del hijo, entonces:

la edad actual del padre será = a el triple de la edad de x

la edad actual del padre = 3x

2) "Dentro de 12 años el padre tendrá el doble de la edad que tendrá su hijo". Si x y 3x representan las edades actuales del hijo y del padre respectivamente, entonces dentro de 12 años las edades serán: x + 12 y 3x + 12. Pero, como también la edad del padre será el doble de la de su hijo, tenemos que:

$$\underbrace{\text{la edad del padre}}_{3x + 12} \quad \underbrace{\text{será}}_{=} \quad \underbrace{\text{el doble de la edad del hijo}}_{2 \quad (x + 12)}$$

$$3x + 12 = 2(x + 12)$$

Hasta ahora hemos visto proposiciones simples. Las proposiciones "3 + 5 = 8", "x - 2 = 5", son ejemplos de *proposiciones simples*. Sin embargo, sabemos que las proposiciones pueden ser a veces *proposiciones compuestas*. La proposición "jugaré beisbol en la tarde e iré al cine en la noche" es un ejemplo de proposición compuesta. De una manera semejante, se presentan en matemáticas proposiciones compuestas, por ejemplo, "x + y = 5 y x - y = 1" que suelen escribirse en la forma siguiente:

$$x + y = 5$$
$$x - y = 1$$

Las proposiciones compuestas enunciadas son verdaderas sólo si ambas partes de cada proposición son verdaderas. Hemos considerado proposiciones compuestas formadas por el uso de la conjunción "y".

Estas proposiciones compuestas son útiles para resolver problemas. En muchos casos la proposición abierta nos conduce a una solución más simple que una proposición abierta simple porque podemos trabajar con dos variables.

Ejemplo 6.

En una tienda una persona compró 5 camisas y 4 corbatas por $ 30.00. Otro cliente compró dos camisas y 6 corbatas por $ 23.00. ¿Cuál es el precio de cada camisa y cada corbata?

Solución:

Para plantear las ecuaciones, hagamos:

x = el precio de una camisa en $

y = el precio de una corbata en $

entonces, para encontrar las ecuaciones tenemos que un cliente compró 5 camisas a un precio "x", y 4 corbatas a un precio "y" que en total fueron $ 30.00. Entonces, tenemos:

$$5x + 4y = 30 \qquad (1)$$

De igual modo, tenemos que el otro cliente compró:

$$2x + 6y = 23 \qquad (2)$$

Luego, el planteamiento de este problema verbal es:

$$5x + 4y = 30 \qquad (1)$$
$$2x + 6y = 23 \qquad (2)$$

Ejemplo 7.

Un almacenista tiene dulces de $ 45.00 el kilo y otros de $ 70.00 el kilo. Quiere hacer una mezcla de 120 kilos que resulten a $ 55.00 el kilo, ¿cuántos kilos de cada clase debe rá poner?

Solución:

Sea x = el número de kilos de dulces de \$ 45.00

y = el número de kilos de dulces de \$ 70.00

Además, si suponemos lo anterior, tenemos que:

$$x + y = 120, \qquad (1)$$

ya que sumando ambas cantidades nos debe de dar los 120 kilos que nos piden. Para encontrar la segunda ecuacion, tenemos que el costo total de los 120 kilos es (120 x 55), o sea:

$$45x + 70y = (120)(55)$$

$$45x + 70y = 6,600 \qquad (2)$$

Luego, el planteamiento de este problema verbal es:

$$x + y = 120 \qquad (1)$$

$$45x + 70y = 6,600 \qquad (2)$$

AUTOEVALUACIÓN 2.

Escríbanse proposiciones abiertas para los problemas siguientes. Decir lo que significa cada variable usada en cada una. No se piden los conjuntos solución.

1.- Separar 53 en dos partes en tal forma que la mayor tenga 3 unidades más que la menor.

2.- Tres muchachos pesan respectivamente 120, 98 y 111 libras. ¿Cuál deberá ser el peso de un cuarto muchacho para que el peso promedio de los cuatro sea de 114 libras?

3.- Un equipo de beisbol hizo 17 carreras, entre juegos. En el primero hizo 5 carreras, en el segundo hizo el doble de las que logró en el tercero. ¿Cuántas carreras hizo en cada juego?

4.- El perímetro de un rectángulo es de 40 centímetros. El largo tiene 2 centímetros más que cinco veces el ancho. Encontrar el largo y el ancho del rectángulo.

5.- Al jugar basketball las canastas hechas por falta cuentan un punto cada una y una canasta de campo cuenta dos puntos. Un equipo registró 39 puntos en un juego, haciendo 6 canastas de campo más que las que hizo por faltas. ¿Cuántas canastas logró de cada clase?

6.- Juanita, María y Elena ganaron un total de \$ 2,000.00 durante el mes de diciembre. Elena ganó \$ 100.00 menos que María y Juanita \$ 300.00 más que el doble de lo que ganó María. ¿Cuánto obtuvo cada una?

7.- Un hombre pagó \$ 30.00 por 4 almuerzos y cinco comidas en un restaurante. Otra vez pagó \$ 33.00 por 2 almuerzos y 7 comidas. ¿Cuál es el costo de un almuerzo y cuál el de una comida en ese restaurante?

8.- Un comerciante desea obtener 100 litros de aceite para venderlos a \$ 19.00 el litro. Para ello, mezcla aceite de \$ 20.00 el litro con otro de \$ 16.00 el litro. ¿Cuántos litros de cada clase usó?

9.- La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 12. El dígito de las unidades excede al dígito de las decenas en 4. Hallar el número.

10.- Un químico tiene dos soluciones ácidas, una del 20 % y otra del 70 %. Hallar el número de litros que debe poner de cada una para obtener 50 litros de una solución al 60 %.

11.- Si le quitamos 4 al numerador de una fracción, el valor de la fracción es 1/3. Si agregamos 5 al denominador de la fracción original, su valor es igual a 1/2. Enconcontrar la fracción original.

3-32 SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PLANTEO MEDIANTE EL USO DE ECUACIONES EN UNA VARIABLE.

Un problema que se puede resolver mediante una ecuación, comprende varias cantidades de las cuales unas son conocidas y otras desconocidas. Igualmente contiene datos que permiten observar la igualdad entre dos combinaciones de esas cantidades. Si el problema se puede resolver mediante una ecuación de una variable, entonces las cantidades desconocidas deben de expresarse en términos de una sola letra.

El procedimiento para resolver un problema mediante el uso de una ecuación no siempre es fácil y para lograr cierta aptitud se requiere una práctica considerable. Para ello te sugerimos el siguiente esquema.

1.- Leer cuidadosamente el problema y estudiarlo hasta que quede perfectamente clara la situación que plantea.

2.- Identificar las cantidades comprendidas en el problema, tanto las conocidas como las desconocidas.

3.- Elegir una de las cantidades desconocidas y representarla mediante una letra, generalmente "x".
Después, expresar las otras cantidades desconocidas en términos de esta letra.

4.- Buscar en el problema los datos que indiquen qué cantidades o qué combinaciones de éstas son iguales.

5.- Formular la ecuación, igualando las cantidades o combinaciones apropiadas encontradas en el paso anterior.

6.- Resolver la ecuación obtenida y comprobar la solución.

A continuación se expondrán algunos ejemplos de los varios tipos de problemas que pueden resolverse mediante el uso de ecuaciones.

Problemas que implican movimiento a velocidad uniforme.

Generalmente los problemas de este tipo establecen una relación entre distancias recorridas, entre velocidades o entre tiempos empleados. La fórmula fundamental para estos problemas es:

$$d = vt$$

en donde "d" representa la distancia; "v" la velocidad; y "t" el tiempo. Esta fórmula se puede resolver para "v" o para "t" y obtener las dos fórmulas adicionales siguientes:

$$v = d/t$$
$$t = d/v.$$

Ejemplo 8.

Un grupo de deportistas efectúan un recorrido de 380 Km. en 7 horas durante una expedición de caza. Durante 4 horas viajan a lo largo de una carretera pavimentada y el resto del tiempo en un camino de herradura. Si la velocidad media en el camino de herradura es de 25 Km/hr menor que la velocidad media en la carretera, encuéntrese la velocidad media y la distancia recorrida en cada uno de aquellos tramos de camino.

Solución:

Las cantidades desconocidas en el problema son las dos velocidades y la distancia en cada tramo del camino. Las cantidades conocidas son la distancia total, 380 Km, el tiempo total, 7 horas y el tiempo empleado en la carretera, 4 horas y la cantidad en la cual la velocidad en la carretera es mayor que la velocidad en el camino de herradura, 25 Km/hr. Evidentemente, el tiempo empleado en el camino de herradura fue de:

7 horas - 4 horas = 3 horas y ladistancia total es igual a la suma de las distancias recorridas en cada tramo.

Si hacemos, x = velocidad en la carretera entonces, $x-25$ = velocidad en el camino de herradura, además, $4x$ = distancia recorrida en la carretera, $3(x-25)$ = distancia recorrida en el camino de herradura y, $4x + 3(x-25)$ = distancia total. Por tanto,

$$4x + 3(x-25) = 380$$

Esta es la ecuación deseada y se puede resolver como se indica a continuación:

$4x+3x-75 = 380$		(se han eliminado los paréntesis).
$4x+3x = 380+75$		(se han transpuesto los términos).
$7x = 455$		(se han efectuado sumas).
$x = 65$		(Km/hr en la carretera).
$x-25 = 40$		(Km/hr en el camino de herradura).
$4(65) = 260$		(Km recorridos en la carretera).
$3(40) = 120$		(Km recorridos en el camino de herradura).

Comprobación:

$$260 + 120 = 380.$$

Problemas que implican la realización de un trabajo.

Los problemas que comprenden la rapidez para hacer determinadas labores, se pueden resolver frecuentemente encontrando primero la fracción del trabajo realizado por cada individuo en la unidad de tiempo y encontrando después la relación entre las fracciones.

Cuando se emplea este método, la unidad, el número uno, representa el trabajo total por realizar.

Ejemplo 9.

Un agricultor puede arar un terreno empleando un tractor en 4 días y un ayudante suyo puede hacer el mismo trabajo con un tractor más pequeño en 6 días.

¿En cuántos días pueden arar el campo si trabajan conjuntamente?

Solución:

Si hacemos, x = número de día que se requieren para arar el campo cuando trabajan juntos;

entonces, $\frac{1}{x}$ = parte del campo arado en un día por los dos;

sin embargo, $\frac{1}{4}$ = parte del campo arado por el agricultor en un día.

y, $\frac{1}{6}$ = parte del campo arado por el ayudante en un día;

por tanto, $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{x}$

$$3x + 2x = 12$$

$$5x = 12$$

$$x = 2\frac{2}{5} \text{ días.}$$

Comprobación:

Si entre los dos aran el campo en 2 2/5 días, entonces hacen tanto como $\frac{1}{2\frac{2}{5}}$ = 5/12 en un día. Además, uno ara 1/6 del campo en un día y el otro 1/4, esto es:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{2+3}{12} = \frac{5}{12}$$

Ejemplo 10.

Si en el ejemplo anterior el ayudante trabajó un día solo con el tractor pequeño, y hasta el segundo día el agricultor empezó a ayudarle, ¿en cuántos días terminaron de arar el resto del campo?

Solución:

El ayudante aró 1/6 del campo en el primer día, y por tanto quedaron sin arar 5/6.

Sea, x = número de días requeridos para terminar el trabajo;

entonces, $\frac{x}{4}$ = parte del campo arado por el agricultor en x días.

y, $\frac{x}{6}$ = parte del campo arado por el ayudante;

por tanto, $\frac{x}{4} + \frac{x}{6} = \frac{5}{6}$

$$3x + 2x = 10$$

$$5x = 10$$

$$x = 2 \text{ días.}$$

Comprobación:

El agricultor aró en dos días 2/4, o sea 1/2 del campo y el ayudante 2/6, o sea 1/3 del mismo, esto es:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3 + 2}{6} = \frac{5}{6}$$

Problemas sobre mezclas.

Muchos problemas implican la combinación de ciertas sustancias de concentración conocida, generalmente expresada en porcentaje para formar una mezcla de concentración fija con respecto a una de las sustancias. Otros implican la mezcla de ciertos artículos de diversos precios. En tales problemas debe recordarse que la cantidad total de una componente en una mezcla, es igual a la suma de las cantidades que de esa componente hay en cada una de las sustancias combinadas o que el valor de una mezcla es la suma de los valores de las sustancias agrupadas.

Ejemplo 11.

¿Cuántos litros de un líquido que tiene 74 % de alcohol se debe mezclar con 5 litros de otro líquido que tiene 90 % de alcohol si se desea obtener una mezcla de 84 % de alcohol?

Solución:

Si hacemos, x = número de litros de la solución de 74 % de alcohol que deben emplearse;

entonces, $0.74x$ = número de litros de alcohol que aporta esa solución;

además, $0.90(5) = 4.5$ = número de litros de alcohol en la solución de 90 %;

por tanto, $0.74x + 4.5$ = número de litros de alcohol en la mezcla;

también, $x + 5$ = número total de litros en la mezcla;

entonces, ya que la mezcla tiene 84 % de alcohol, se tiene:

$0.84(x + 5)$ = número de litros de alcohol en la mezcla.

por tanto, $0.74x + 4.5 = 0.84(x + 5)$

$$0.74x + 4.5 = 0.84x + 4.2$$

$$0.74x - 0.84x = 4.2 - 4.5$$

$$-0.10x = -0.3$$

$$x = 3 \quad \text{(litros que deben agregarse).}$$

Comprobación:

$$(0.74)\,3 + 4.5 = 2.22 + 4.5 = 6.72$$

$$0.84(5+3) = (0.84)(8) = 6.72$$

Problemas diversos.

Además de los tres tipos anteriormente discutidos, existe una amplia variedad de problemas que se pueden resolver por medio de ecuaciones. El esquema fundamental es el mismo para todos, esto es, encontrar dos cantidades de las cuales una o las dos comprenden un valor no conocido, e igualarlas. Se mencionarán otros tres tipos y se delineará el principio general o fórmula que se emplea para su resolución.

a) Muchos problemas de física y de mecánica se refieren a palancas.

Una palanca es una barra rígida apoyada en un punto, colocado generalmente entre los dos extremos de la barra, y que se llama punto de apoyo. Si sobre la palanca se colocan dos pesos P_1 y P_2 a las distancia D_1 y D_2, respectivamente del punto de apoyo, y la palanca está en equilibrio, entonces $P_1D_1 = P_2D_2$; además, si una fuerza F situada a una distancia D del punto de apoyo, puede elevar un peso R situado a una distancia d del mismo punto de apoyo, entonces:

$$FD = Rd$$

b) Cuando se resuelvan problemas que tratan acerca de inversiones de dinero, generalmente se emplea la fórmula:

$$I = PRT$$

en donde P es el capital, o cantidad de dinero invertida; I es el interés, o cantidad devengada de la inversión; R, expresado en porcentaje, es la tasa de interés por unidad de tiempo total en que permanece el capital invertido.

c) Los problemas que comprenden los dígitos de un número dependen del principio empleado en nuestro sistema numérico, que asigna un valor al dígito de acuerdo con su colocación. Por ejemplo: si c es el dígito de las centenas en un número de tres cifras; d el dígito de las decenas y u el de las unidades; entonces el número es 100 c + 10 d + u. Si se intercambian los dígitos de las centenas y de las unidades el número es 100 u + 10d + c.

Ejemplo 12.

Tres números están relacionados de tal modo que el segundo es dos unidades mayor que el primer número y el tercero es cuatro unidades mayor que el primero. Encuentra el número si la suma de sus cuadrados es 56 unidades mayor que tres veces el cuadrado del número menor.

Solución:

Si "x" es el primer número, "y" el segundo y "z" el tercer número, entonces: $y = 2 + x$; $z = 4 + x$ y por lo tanto "x" será el número menor.

Además, $x^2 + y^2 + z^2 = 56 + 3(x)^2$

y, $y^2 = (2+x)^2 = 4 + 4x + x^2$

$$z^2 = (4+x)^2 = 16 + 8x + x^2$$

por tanto, $x^2 + (2 + x)^2 + (4 + x)^2 = 56 + 3x^2$

Efectuando operaciones y sumando términos semejantes, queda:

$$12x + 20 = 56 \qquad y = 2 + x \qquad z = 4 + x$$
$$12x = 36 \qquad y = 2 + 3 \qquad z = 4 + 3$$
$$x = 3 \qquad y = 5 \qquad z = 7$$

Comprobación:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 56 + 3x^2$$
$$(3)^2 + (5)^2 + (7)^2 = 56 + 3\,(3)^2$$
$$9 + 25 + 49 = 56 + 27$$
$$83 = 83$$

Ejemplo 13.

La altura de un triángulo es 3/4 la longitud de su base. Si la altura se incrementa en 3 pies y la base se disminuyera en 3 pies, el área quedaría inalterada. Encuentra la longitud de la base y la altura.

Solución:

Si, "b" es la longitud de la base y "h" es la altura, tenemos, $h = 3/4 \times b$.

Además, el área (A) de un triángulo es la mitad del producto de la base por la altura.

por tanto, $A = \frac{bh}{2}$

también, $A = \frac{(b-3)(h+3)}{2}$

igualando, $\frac{bh}{2} = \frac{(b-3)(h+3)}{2}$

por lo que, $\frac{bh}{2} = \frac{(b-3)(h+3)}{2}$

Efectuando operaciones, queda:

$$b - h - 3 = 0$$

y $h = b - 3$

Ahora tenemos, $h = b - 3$

$$h = \frac{3b}{4}$$

igualando, $b-3 = \frac{3b}{4}$ y $4b - 12 = 3b$

de donde, $b = 12$ pies y $h = (b-3) = 12-3 = 9$ pies.

Comprobación:

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{12 \times 9}{2} = 54$$

y a su vez, $A = \frac{(b-3)(h+3)}{2}$

$$A = \frac{(12-3)(9+3)}{2}$$
$$= \frac{9 \times 12}{2}$$
$$= 54$$

Ejemplo 14.

Un hombre puede hacer cierto trabajo en 21 horas, otro hombre puede hacer el trabajo en 28 horas y un muchacho puede hacer el trabajo en 48 horas. Encuentra cuánto tiempo se necesitará para hacer el trabajo si los tres trabajan juntos.

Solución:

x = tiempo que requieren los tres hombres para efectuar el trabajo.

$\frac{1}{x}$ = parte del trabajo realizado en 1 hora por los tres.

$\frac{1}{21}$ = parte del trabajo realizado en 1 hora por el primer hombre.

$\frac{1}{28}$ = parte del trabajo realizado por el segundo hombre en una hora.

$\frac{1}{48}$ = parte del trabajo realizado por el muchacho en una hora.

Por tanto, $\frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \frac{1}{48} = \frac{1}{x}$

Encontrando el mínimo común múltiplo (M.C.M.) de los denominadores y sumando las fracciones, queda:

$$\frac{1}{x} = \frac{16 + 12 + 7}{336} = \frac{35}{336}$$

de donde, $x = \frac{336}{35} = 9.6$ horas.

Ejemplo 15.

¿Cuántas onzas de plata pura deben ser agregadas a 18 onzas de una pureza del 60 %, para hacer una aleación que es plata pura en un 76 %?

Solución:

La ecuación debe establecerse observando que la cantidad de plata en las dos partes separadas es la cantidad de plata que hay en la mezcla. Representando con "x" al número de onzas de plata que han de agregarse, arreglamos la información de la siguiente manera:

x oz.	y	18 oz.	da	(18+x)
100 % puro / x oz. de plata		60 % puro / 10.8 oz. de plata		76 % puro / 0.76 (18+x) oz. de plata

Puesto que las 10.8 oz. originales de plata y las x onzas adicionales constituyen la totalidad de la plata en la mezcla, tenemos:

$$x + 10.8 = 0.76\ (18+x)$$
$$x - 0.76x = 13.68 - 10.8$$
$$0.24x = 2.88$$
$$x = \frac{2.88}{0.24}$$
$$= 12 \text{ onzas.}$$

21 = 3 28 = 7 48 = 6
4 = 4 8 = 8
7 : 7
1 1 1

Ejemplo 16.

Un hombre presta \$ 5,000.00; una parte al 3 % de interés anual y el resto al 5.5 %. Encuentra el monto de cada préstamo, si el interés total por año que recibe es de \$ 156.00.

Solución:

Si "x" es la parte del capital prestado al 3 % de interés anual y "y" el resto del capital prestado al 5.5 % de interés anual, tenemos:

$$x + y = 5{,}000$$

además, $(x)(0.03) + y\,(0.055) = 156$

$$(x)(0.03) + (5000-x)(0.055) = 156$$

$$0.03x - 0.055x = 156 - 275$$

$$0.025x = 119$$

$$x = \frac{119}{0.025}$$

$$= \$4760$$

$$y = 5000 - x$$

$$y = 5000 - 4760$$

$$y = \$\ 240.$$

AUTOEVALUACIÓN 3.

1.- La longitud de un rectángulo excede a su anchura por dos pies. Si cada dimensión fuese incrementada en 3 pies, el área se incrementaría en 51 pies^2. Encuentra las dimensiones originales.

2.- La persona A puede hacer cierto trabajo en 8 horas, la persona B en 10 horas y la persona C en 12 horas. ¿Cuánto tiempo tomará efectuar el trabajo si A y B se ponen a trabajar durante 1 hora y A y C terminan después?

3.- ¿Cuántas onzas de plata pura debemos agregar a 100 onzas de una pureza del 40 % para obtener una mezcla que tenga una pureza del 65 %?

4.- La longitud de un rectángulo excede a su anchura en 6 unidades. Si cada dimensión fuese incrementada en tres unidades, el área sería incrementada en 57 unidades cuadradas. Encuentra las dimensiones del rectángulo.

5.- La persona A puede pintar una casa en 10 días y la persona B puede pintar una casa en 12 días. ¿Cuánto tiempo tomaría pintar la casa trabajando los dos hombres conjuntamente?

6.- Una persona A puede hacer cierto trabajo en 4 horas, B puede hacer la tarea en 6 horas y C puede hacer la tarea en 8 horas. ¿Cuánto tiempo llevaría hacer la tarea si A y B trabajan 1 hora y después B y C terminan el trabajo?

7.- El numerador de una fracción es 4 unidades menor que el denominador. Si el numerador es duplicado y el denominador es disminuido en 2, la suma de la fracción original y la nueva es 3. Encuentra la fracción original.

8.- Un hombre presta \$ 4,000 a una razón de interés y \$ 5000 a una razón de interés mayor en 1 %. El préstamo de \$ 5000 obtiene \$80 más cada año que el préstamo de \$ 4000. Encuentre las razones de interés.

3·33 PROBLEMAS VERBALES CUYAS SOLUCIONES IMPLIQUEN SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

En el planteo de muchos problemas aparece más de una cantidad desconocida y con frecuencia la resolución de los mismos es más fácil si se introduce más de una incógnita. Sin embargo, para que el problema pueda ser resuelto se requiere que el número de ecuaciones empleadas sea igual al número de incógnitas.

Ejemplo 17.

Un propietario recibió $ 12,000.00 por pago de la renta de dos oficinas en el año de 1948. La renta mensual de una era $ 100.00 mayor que la otra. ¿Cuál fue la renta mensual que recibió de cada una si la más cara estuvo desalquilada dos meses?

Solución:

Si hacemos, x = renta mensual de la más cara.

y = renta mensual de la otra.

entonces, $$x - y = 100 \qquad (1)$$

Además, ya que la primera estuvo rentada por 10 meses y la segunda por 12 meses, se infiere que $10x + 12y$ es el total de la renta recibida.

Por tanto,

$$10x + 12y = 12000 \qquad (2)$$

Se tienen así las ecuaciones (1) y (2) con las incógnitas "x" y "y", que se pueden resolver simultáneamente eliminando a "y".

$$12x - 12y = 1200 \quad \text{Ec. (1) por 12} \qquad (3)$$

$$\begin{array}{rl} 10x + 12y = 12000 & (2) \\ \hline 22x \quad = 13200 & \text{Ec. (3) más Ec. (2)} \end{array}$$

Por tanto, $\underline{x = 600}$.

Sustituyendo "x" por 600 en (1), se tiene:

$$600 - y = 100$$

$$- y = -500$$

$$\underline{y = 500}$$

Por consiguiente, las rentas mensuales fueron $ 600.00 y $ 500.00 respectivamente.

Ejemplo 18.

Un comerciante mezcla tabaco de cierta calidad y precio de $ 28.00 por kilogramo con otro de precio $ 36.00 por kilogramo y obtiene 100 kilogramos de una mezcla que vende a $ 31.20 por kilogramo. ¿Cuánto usó de cada clase de tabaco?

Solución:

Si hacemos,

x = número de kilogramos usados del de $ 28.00

y = número de kilogramos usados del de $ 36.00

entonces, $$x + y = 100 \qquad (4)$$

Puesto que se obtuvieron 100 kilos de mezcla, además el valor del primero en pesos fue $ 28.00x y el del segundo $ 36.00y y el valor de la mezcla resultante, $31.20 (100).

Por consiguiente:

$$28x + 36y = 31.2(100) = 3,120 \qquad (5)$$

Por tanto (4) y (5) son las ecuaciones deseadas que se pueden resolver eliminando a "x".

$$28x + 28y = 2800 \quad \text{Ec. (4) por 28} \qquad (6)$$

$$\begin{array}{rl} 28x + 36y = 3120 & \\ \hline - \quad 8y = -320 & \text{Ec. (6) - Ec. (5)} \end{array}$$

de donde se obtiene:

$$y = \frac{-320}{-8} = \underline{40}$$

Sustituyendo 40 en vez de "y" en (4), se tiene:

$$x + 40 = 100$$

$$\underline{x = 60}$$

Por tanto, el comerciante empleó 60 kilogramos del precio $ 28.00 y 40 kilogramos del de precio $ 36.00.

Ejemplo 19.

Dos aereopuertos A y B están a 400 Km uno de otro y B está situado al este de A.

Un avión voló en dos horas de A a B y luego regresó a A en 2.5 horas. Si durante todo el viaje estuvo soplando viento del oeste a velocidad constante, encontrar la velocidad del avión en el aire en reposo y la velocidad del viento.

Solución:

Sea,

x = velocidad del avión en el aire en reposo.

y = velocidad del viento.

Luego, considerando que el viento soplaba del oeste:

x + y = velocidad del avión de A a B.

x - y = velocidad del avión durante el regreso.

Por consiguiente:

$\frac{400}{x+y}$ = tiempo empleado de A a B.

$\frac{400}{x-y}$ = tiempo empleado de B a A.

de donde:

$$\frac{400}{x+y} = 2 \qquad (7)$$

$$\frac{400}{x-y} = 5/2, \text{ porque } 2.5 = 5/2 \qquad (8)$$

Para eliminar las fracciones se multiplican por (x+y) los dos miembros de (7) y por 2 (x-y) los de (8).

Se tiene:

$$400 = 2x + 2y \qquad (9)$$

$$800 = 5x - 5y \qquad (10)$$

Estas ecuaciones se resuelven simultáneamente eliminando primero a "y".

(11)	$2000 = 10x + 10y$	Ec.(9) por 5
(12)	$\underline{1600 = 10x - 10y}$	Ec.(10) por 2
	$3600 = 20x$	Ec.(11) más Ec. (12).

por tanto, $\underline{x = 180}$.

Sustituyendo por 180 en (9) se tiene:

$$400 = 2(180) + 2y$$

$$400 = 360 + 2y$$

$$2y = 40$$

$$\underline{y = 20}$$

Por tanto, la velocidad del avión en el aire en reposo era de 180 Km/hr y la velocidad del viento era de 20 Km/hr.

Ejemplo 20.

Una caja registradora contiene \$ 50.00 en monedas de cinco, diez y veinticinco centavos; en total son 802 monedas, siendo 10 veces mayor el número de las de cinco centavos que el de las de diez centavos. Encontrar cuántas monedas hay de cada valor.

Solución:

Sea, v = número de monedas de veinticinco centavos

d = número de monedas de diez centavos

c = número de monedas de cinco centavos.

Ahora, se establecen las tres siguientes ecuaciones de primer grado con v, d y c.

Puesto que,

$$\$\ 50 = 5000 \text{ centavos}$$

(13) $25v + 10d + 5c = 5000$

total de monedas:

(14) $v + d + c = 802$

Ya que hay 10 veces más monedas de cinco centavos que de diez centavos, se tiene:

(15) $c = 10d$

Si se sustituye c por 10d en las ecuaciones (13) y (14), se obtienen dos ecuaciones de primer grado con "d" y "v". De (13), se tiene:

$$25v + 10d + 5(10d) = 5000$$

expresión que se reduce a:

(16) $25v + 60d = 5000$

Además, de (14) se tiene:

$$v + d + 10d = 802$$

(17) $v + 11d = 802$

Eliminando "v" de (16) y (17) como se muestra:

(16) $25v + 60d = 5000$

(18) $25v + 275d = 20050$ Ec.(17) por 25

$- 215d = -15050$ Ec.(16) menos Ec.(18)

$$\underline{d = 70}$$

Sustituyendo el valor de "d" en (15), se tiene:

$$c = 10(70)$$
$$= 700$$

Por último, sustituyendo d = 70 en (17)

$$v + 11(70) = 802$$

$$\underline{v = 32}$$

Consecuentemente, en la caja hay 32 monedas de veinticinco centavos, 70 de diez centavos y 700 de cinco centavos.

Ejemplo 21.

La diferencia de dos números es 14 y el duplo del menor de los números es 5 unidades menor que el mayor de los números. Encuentra los números.

Solución:

Si "x" es el mayor de los números y "y" el menor, entonces:

$$x - y = 14 \qquad (1)$$

ahora, $$2y = x - 5 \qquad (2)$$

Despejando "x" de (1), tenemos:

$$x = 14 + y$$

Sustituyendo este valor de x en (2), se tiene:

$$2y = 14 + y - 5$$

$$\underline{y = 9}$$

Luego, sustituyendo el valor de "y" en (1), se tiene:

$$x = 14 + 9 = 23$$

Ejemplo 22.

Un hombre tiene dos inversiones, una que le deja anualmente un **interés** de 3 % y otra de 4 %. El ingreso anual total **causado por** las inversiones es $ 170.00. Si se intercambiaran **las razones** de interés, el interés total anual sería **de $ 180.00.** Encuentra el monto de cada inversión.

Solución:

Si, x = monto de la inversión al 3 %

y = monto de la inversión al 4 %

por tanto,

$$x(0.03) + y\,(0.04) = 170 \qquad (3)$$

$$x(0.04) + y\,(0.03) = 180 \qquad (4)$$

Multiplicando por 100 cada una de las ecuaciones (3) y (4), queda:

$$3x + 4y = 17000 \qquad (5)$$

$$4x + 3y = 18000 \qquad (6)$$

Multiplicando la ecuación (5) por 4 y la ecuación (6) por 3, se tiene:

$$12x + 16y = 68000 \qquad (7)$$

$$12x + 9y = 54000 \qquad (8)$$

Restando la ecuación (8) de la (7):

$$7y = 14000$$

$$y = \frac{14000}{7}$$

$$\underline{y = 2000}$$

Sustituyendo este valor encontrado de "y" en (5) tenemos:

$$3x + 4(2000) = 17000$$

$$3x = 17000 - 8000$$

$$x = \frac{9000}{3}$$

$$\underline{x = 3000}$$

Por tanto, el monto de la inversión al 3 % es $ 3000.00 y el monto de la inversión al 4 % es de $ 2000.00.

Ejemplo 23.

Las personas A y B pueden pintar una casa si A trabaja 6 días y B trabaja 12 días, o pueden pintar la casa si A trabaja 9 días y B trabaja 8 días. ¿Cuánto tiempo tardaría cada trabajador en pintar la casa él solo?

Solución:

Si hacemos:

x = días requeridos por A pintando la casa solo

y = días requeridos por B pintando la casa solo

entonces,

1/x = parte del trabajo terminado por A en un día trabajando solo

1/y = parte del trabajo terminado por B en un día trabajando solo

por tanto,

$$\frac{1}{x}(6) + \frac{1}{y}(12) = \frac{1}{x}(9) + \frac{1}{y}(8) \qquad \text{(a)}$$

además,

$$x + y = 18 + 17 = 35 \qquad \text{(b)}$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (a) por el M.C.M. queda:

$$\frac{6y + 12x}{xy} = \frac{9y + 8x}{xy}$$

Simplificando:

$$4x = 3y \qquad \text{(c)}$$

despejando x de la ecuación (b), se tiene:

$$x = 35 - y \qquad \text{(d)}$$

Sustituyendo este valor de x en la ecuación (c), se tiene:

$$4(35 - y) = 3y$$
$$140 - 4y = 3y$$
$$140 = 7y$$
$$y = \frac{140}{7}$$
$$\underline{y = 20}$$

$$x = 35 - 20$$
$$\underline{x = 15}$$

Por tanto, la persona A se tarda 15 días pintando solo; la persona B se tarda 20 días pintando solo.

Ejemplo 24.

La suma de los recíprocos de dos números es 11. El triple del recíproco de uno de los números es 3 más que el doble del recíproco del otro número. Encuentra los números.

Solución:

Si "x" y "y" son los números, entonces:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 11 \qquad (1)$$

$$3\left(\frac{1}{x}\right) = 3 + 2\left(\frac{1}{y}\right) \qquad (2)$$

Despejando $1/x$ de la ecuación (1) se tiene:

$$\frac{1}{x} = 11 - \frac{1}{y} \qquad (3)$$

Sustituyendo este valor de $1/x$ en la ecuación (2), queda:

$$3(11 - \frac{1}{y}) = 3 + 2\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$33 - 3 = \frac{3}{y} + \frac{2}{y} = \frac{5}{y}$$

$$\frac{5}{y} = 30$$

$$y = 5/30$$

$$y = 1/6$$

Ahora, sustituyendo el valor encontrado de "y" en la ecuación (3),

$$\frac{1}{x} = 11 - \frac{1}{\frac{1}{6}}$$

$$\frac{1}{x} = 11 - 6$$

$$= 5$$

$$x = 1/5$$

Ejemplo 25.

Un hombre rema 12 millas contra la corriente en un río y regresa tardando en el viaje redondo 7 1/2 horas. Él puede remar 1 milla contra la corriente en el tiempo en que rema 4 millas a favor de la corriente. Encuentra la velocidad de su

lancha en aguas tranquilas y la rapidez de la corriente.

Solución:

Si hacemos:

V = velocidad de la lancha en aguas tranquilas.
v = rapidez de la corriente.
t = tiempo que se tarda en remar 12 millas contra la corriente.
T = tiempo que se tarda en remar 12 millas en favor de la corriente.

Como velocidad = distancia/tiempo, entonces:

$$V - v = 12/t \qquad (1)$$

$$V + v = 12/T \qquad (2)$$

$$t + T = 7.5 \qquad (3)$$

Despejando t de (3), se tiene:

$$t = 7.5 - T$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (1), queda:

$$V - v = \frac{12}{7.5 - T} \qquad (4)$$

$$V + v = \frac{12}{T} \qquad (5)$$

Por otra parte, si puede remar 1 milla en contra de la corriente en el mismo tiempo que rema 4 millas a favor, tenemos:

$$\frac{1}{V - v} = \frac{4}{V + v}$$

$$V + v = 4V - 4v$$

$$3V = 5v$$

$$V = 5v/3 \qquad (6)$$

Sustituyendo el valor de V de la ecuación (6) en las ecuaciones (4) y (5) queda:

$$\frac{5v}{3} - v = \frac{12}{7.5 - T}$$

$$\frac{5v}{3} + v = \frac{12}{T}$$

de donde,

$$\frac{2v}{3} = \frac{12}{7.5 - T}$$

$$\frac{8v}{3} = \frac{12}{T}$$

o sea,

$$36 = 2v\ (7.5-T)$$

$$36 = 8vT$$

igualando,

$$8vT = 15v - 2vT$$

$$y, \qquad T = \frac{15v}{10v} = \frac{3}{2} = \underline{1.5 \text{ horas}}$$

De la ecuación (3) se tiene:

$$t = 7.5 - 1.5$$
$$= \underline{6 \text{ horas}}$$

Ahora, sustituyendo los valores encontrados en t y T en las ecuaciones (1) y (2), se tiene:

$$V - v = 12/6 = 2 \qquad (7)$$

$$V + v = \frac{12}{1.5} = 8 \qquad (8)$$

sumando,(7) y (8): $2V = 10$

$$V = 10/2$$
$$= 5 \text{ millas/hora}$$

de (8), $v = 8 - 5$

$$= 3 \text{ millas/hora.}$$

AUTOEVALUACIÓN 4.

1.- Un comerciante tiene \$ 36 en monedas de 10 centavos y 25 centavos. ¿Cuántas monedas de cada tipo hay si el número total de monedas es 192?

2.- Un aeroplano viaja 360 millas a favor del viento en 1 hora 20 minutos y retorna contra el viento en dos horas y 15 minutos. Encuentre la rapidez del aeroplano en aire tranquilo y la rapidez del viento.

3.- Entre dos hermanos compran una bicicleta en \$ 300.00. Encuentre la cantidad que aportó cada uno, si uno de ellos pagó \$ 12.00 más que el otro.

4.- Un pescador fue hasta un lago y luego regresó por otro camino que era 15 Km más largo que el de ida. Si en total recorrió 265 Km., encuentre la distancia recorrida en cada camino.

5.- Después de haber pagado Jaime a Francisco \$5.00 aquél tenía la mitad de dinero que éste. Si entre los dos juntaban \$ 21.00, encuentra la cantidad de dinero que originalmente poseía cada uno.

6.- La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 11. Si los dígitos se invierten, el número se incrementa en 45. Encuentre el número.

7.- La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 8. Si el número se sustrae del que se obtiene al invertir los dígitos, el resultado es 18. Encuentre el número.

8.- Durante el año de 1950, un propietario recibió $18,100 por concepto de rentas de dos casas, aún cuando una de ellas estuvo desalquilada dos meses. Si la suma de las rentas por mes fue $ 1650, encuentre el valor de la renta de cada una.

3-34 PROBLEMAS EN PALABRAS QUE CONDUCEN A SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON TRES INCÓGNITAS.

Hay muchos tipos de problemas verbales que comprenden tres incógnitas y que pueden resolverse estableciendo un sistema de ecuaciones lineales a partir de los datos conocidos. El razonamiento mediante el cual obtenemos las ecuaciones es muy análogo a aquel que nos conduce a las ecuaciones de una incógnita.

Ejemplo 26.

A y B pueden hacer un cierto trabajo en 9 días; A y C pueden hacerlo en 8 días; y B y C pueden hacerlo en 12 días. Encontrar cuánto tiempo requiere cada una de esas personas para realizar el mismo trabajo.

Solución:

Sean "x", "y", "z", los días requeridos por A, B y C, respectivamente trabajando cada uno por su parte.

Tenemos, entonces, que: 1/x, 1/y, 1/z son la parte terminada del trabajo en un día por A, B y C trabajando solos,

respectivamente. Tenemos, por tanto, las siguientes igualdades:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{9} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{8} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{12} \qquad (3)$$

Estas ecuaciones, aunque no son lineales en "x", "y", "z", sí son lineales en 1/x, 1/y, 1/z.

Despejando 1/x de (1) y de (2), se tiene:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{9} - \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{8} - \frac{1}{z}$$

Igualando:

$$\frac{1}{9} - \frac{1}{y} = \frac{1}{8} - \frac{1}{z}$$

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{y} = \frac{1}{8} - \frac{1}{9} = \frac{1}{72} \qquad (4)$$

Sumando la ecuación (4) a la ecuación (3), se tiene:

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{y} = \frac{1}{72} \qquad (4)$$

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \qquad (3)$$

$$\frac{2}{z} = \frac{1}{12} + \frac{1}{72}$$

$$= \frac{6 + 1}{72}$$

$$= \frac{7}{72}$$

$$7z = 144$$

$$z = 144/7$$

$$= \underline{20 \;\; 4/7 \text{ días.}}$$

Sustituyendo el valor anterior de "z" en la ecuación (4) **queda:**

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{z} - \frac{1}{72}$$

$$= \frac{7}{144} - \frac{1}{72}$$

$$= \frac{7 - 2}{144}$$

$$= \frac{5}{144}$$

$$y = \frac{144}{5}$$

$$= \underline{28 \;\; 4/5 \text{ días.}}$$

Ahora, sustituyendo el valor encontrado de "y" en la ecuación (1), se tiene:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{9} - \frac{5}{144}$$

$$= \frac{16 - 5}{144}$$

$$= \frac{11}{144}$$

$$x = \frac{144}{11}$$

$$= \underline{13 \;\; 1/11 \text{ días.}}$$

Ejemplo 27.

La suma de tres ángulos de un triángulo es 180°. La suma de dos de los ángulos es igual al tercer ángulo y su diferencia es igual a 2/3 del tercer ángulo. Encuentra los ángulos.

Solución:

Sean A, B, C los ángulos del triángulo, entonces:

$$A + B + C = 180 \qquad (1)$$

$$A + B = C \qquad (2)$$

$$A - B = \frac{2C}{3} \qquad (3)$$

Sustituyendo C = A + B en la ecuación (1), se tiene:

$$C + C = 180°$$

$$2C = 180°$$

$$C = 90°$$

Ahora, sumando la ecuación (2) a la ecuación (3) se tiene:

$$2A = \frac{5C}{3}$$

$$A = \frac{5C}{6} = \frac{5}{6}\ (90°)$$

$$\underline{A = 75°}$$

Por último,

$$75° + B = 90°$$

$$B = 90° - 75°$$

$$\underline{B = 15°}$$

Ejemplo 28.

Para disponer del cambio suficiente en un día de negocios, un comerciante adquiere \$ 75 en moneda de medio dólar, un cuarto de dólar, diez y cinco centavos. Adquiere en total 360 monedas y el número de monedas de medio dólar es el mismo que el número de monedas de un cuarto de dólar; y el número de monedas de diez centavos es igual que el número de monedas de cinco centavos. Encuentra el número de monedas de cada especie.

Solución:

Sea "x", "y", "z", "w" el número de monedas de cada especie, entonces:

$$x + y + z + w = 360 \qquad (1)$$

y, $$x(0.5) + y(0.25) + z(0.10) + w(0.05) = 75 \qquad (2)$$

Además:

$$x = y; \quad z = w$$

Sustituyendo en la ecuación (1), se tiene:

$$2x + 2z = 360$$

$$x + z = 180 \qquad (3)$$

Sustituyendo en la ecuación (2), se tiene:

$$x(0.5) + x(0.25) + z(0.10) + z(0.05) = 75$$

$$x(0.5 + 0.25) + z(0.10 + 0.05) = 75$$

$$0.75x + 0.15z = 75 \qquad (4)$$

Dividiendo la ecuación (4) entre 0.75 queda:

$$x + \frac{z}{5} = 100 \qquad (5)$$

Restando la ecuación (5) de la ecuación (3), se tiene:

$$x + z = 180 \qquad (3)$$

$$\underline{x + \frac{z}{5} = 100} \qquad (5)$$

$$z - \frac{z}{5} = 80$$

$$\frac{4z}{5} = 80$$

$$z = \frac{400}{4}$$

$$z = 100$$

Sustituyendo en la ecuación (3) queda:

$$x = 180 - 100$$

$$x = 80$$

por tanto,

$$x = 80, \quad y = 80, \quad z = 100, \quad w = 100.$$

Ejemplo 29.

A, B y C, trabajando conjuntamente realizan una tarea en 6 horas. A y B pueden realizarla en 9 horas y B y C pueden realizarla en 12 horas. ¿Cuánto tiempo tardará en realizar la misma tarea cada uno de los hombres trabajando solo?

Solución:

Sean "x", "y", "z" las horas requeridas por A, B y C, respectivamente, para realizar la tarea, cada uno trabajando solo.

Entonces, 1/x, 1/y, 1/z será la parte terminada del trabajo en una hora porA, B y C trabajando solos, respectivamente.

Tenemos, por tanto, las siguientes igualdades:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{6} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{9} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{12} \qquad (3)$$

Sustituyendo la ecuación (2) en la ecuación (1), queda:

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{z} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{6} - \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{9-6}{54}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{3}{54} = \frac{1}{18}$$

$$\underline{z = 18 \text{ horas}}$$

45-3-15
30.3
27/40

Sustituyendo el valor encontrado de "z" en la ecuación (3), se tiene:

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{18} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{12} - \frac{1}{18}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{3-2}{36}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{36}$$

$$\underline{y = 36 \text{ horas}}$$

Sustituyendo "y" en la ecuación (2), queda:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{36} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{9} - \frac{1}{36}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{4-1}{36}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{3}{36}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{12}$$

$$\underline{x = 12 \text{ horas}}$$

Ejemplo 30.

La suma del segundo y tercer dígitos de un número de tres **dígitos es** igual al primer dígito. La suma del primer dígito **y el segundo** es 2 más que el tercer dígito. Si el segundo y **tercer** dígitos fueran intercambiados, el nuevo número **debería** ser 54 más que el número original. Encuentra el número.

Sugerencia:

Los problemas que comprenden los dígitos de un número **dependen del principio** empleado en nuestro sistema numérico, **que asigna un valor** al dígito, de acuerdo con su colocación. **Por ejemplo,** si "c" es el dígito de las centenas en un número de tres cifras; "d" es el dígito de las decenas; y "u" el de las **unidades,** enconces, el número es 100c + 10d + u. Si se **intercambian** los dígitos de las centenas y de las unidades, el **número** será 100u + 10d + c.

Solución:

Por tanto, en el ejemplo, si hacemos:

x = dígito de las centenas
y = dígito de las decenas
z = dígito de las unidades

entonces, $100x + 10y + z$ es el número.

Por tanto,

$100x$ es el primer dígito,
$10y$ es el segundo dígito,
z es el tercer dígito.

Además, $10y + z = 100x$

y, $100x + 10y = 2 + z$

de donde,
$$10y + z - 100x = 0$$
$$\underline{10y - z + 100x = 2}$$

de donde,
$$10y + z - 100x = 0 \qquad (1)$$
$$\underline{10y - z + 100x = 2} \qquad (2)$$

sumando:
$$20y = 2$$
$$y = 1/10 .$$

por tanto,
$$10y = 10\left(\frac{1}{10}\right)$$
$$= 1 \text{ (segundo dígito)}.$$

Por otra parte, si el segundo y tercer dígitos del número original se intercambian, el nuevo número deberá ser:

$$100x + 10z + y$$

el cual tendrá como tercer dígito, $y = 1$.

Entonces, el nuevo número será =

$$100x + 10z + y$$

además, $100x + 10z + y = 54 + 100x + 10y + z \qquad (3)$

de donde,
$$9z - 9y = 54$$
$$z - y = 6$$
$$z = 6 + y$$
$$= 6 + 1$$
$$= 7$$
$$\underline{z = 7}$$

De la ecuación (1);

$$100x = 10y + z$$
$$100x = 1 + 7$$
$$x = 8$$

AUTOEVALUACIÓN 5.

1.- Un joven compró un "bat", una pelota y un guante de beisbol en \$ 80.00. El costo del guante fue \$10.00 mayor que el costo de la pelota y el "bat" juntos, y el precio de la pelota fue \$ 40.00 menor que el del "bat" y el guante juntos. ¿Cuánto costó cada uno?

2.- Un equipo de futbol está formado con 45 jugadores de las escuelas de Preparatoria, de Ingeniería y de Contabilidad. La suma del número de jugadores de Ingeniería y de Contabilidad es cinco unidades mayor que el de los de Preparatoria y la suma de los de Preparatoria e Ingeniería es el doble de los de Contabilidad. Encuentre cuántos miembros de cada escuela hay en el equipo.

3.- Una colecta produjo \$ 32.00 en monedas de diez, veinticinco y cincuenta centavos. ¿Cuántas monedas de cada clase había si en total eran 150 y la suma de monedas de diez y de veinticinco centavos importó \$ 22.00?

4.- La suma de las edades de un padre, de su hijo y de su hija es 65 años. Si diez años más tarde el padre tiene el doble de la edad del hijo y hace cinco años la edad de éste era el doble de la de su hermana. Encuentre las edades de cada uno.

5.- Un granjero camina a caballo hasta su rancho a razón de 9.6 Km/hr, luego toma su automóvil y se dirige a la estación del ferrocarril a 64 Km/hr, y asciende al tren que lo lleva a 80 Km/hr hasta la ciudad más próxima. La distancia total recorrida fue 611.2 Km y el tiempo empleado 9 1/2 horas. Si permaneció 5 horas más en el tren que en elrecorrido a caballo, encuentre las distancias de cada tramo.

4.- Perímetro = 2 largo + 2 ancho = 40

Largo = 2 + 5x

Ancho = x

x = ancho en cms

Luego, la ecuación es:

$40 = 2(2 + 5x) + 2x$

5.- x = # canastas por falta

\# canastas de campo = 6 + x

Total de puntos = 39

Ecuación: $x + 2(6+x) = 39$

6.- y = lo que ganó María

Entonces,

Elena ganó: $y - 100$

Juanita ganó: $300 + 2y$

Luego, la ecuación es:

$y + (y - 100) + (300 + 2y) = 2,000$

7.- x = costo del almuerzo

y = costo de la comida

Ecuaciones:

$4x + 5y = 30$

$2x + 7y = 33$

8.- x = cantidad de litros de aceite de \$ 20.00 el litro

y = cantidad de litros de aceite de \$ 16.00 el litro.

x lt.	+	y lt.	=	100 lt.
\$20.00/lt.		\$16.00/lt.		\$ 19.00/lt

$20x + 16y = 19(100)$ (1)

$x + y = 100$ (2)

8

9.- x = número de las decenas
y = número de las unidades

$x + y = 12$ (1)
$y = x + 4$ (2)

10.- x = # de litros de sol. al 20 %
y = # de litros de sol. al 70 %

x lt.	+	y lt.	=	50 lt.
20 %		70 %		60 %

$.2x + .7x = .6(50)$ (1)
$x + y = 50$ (2)

11.- Fracción original = x/y

$$\frac{x-4}{y} = \frac{1}{3} \qquad (1)$$

$$\frac{x}{y+5} = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

AUTOEVALUACIÓN 3.

1.- 6 y 8 pies.
2.- 4 18/25 horas
3.- 71 3/7 horas
4.- 5 y 11
5.- 5 5/11 día
6.- 3 horas
7.- - 3/1
8.- 3 % y 4 %

AUTOEVALUACIÓN DE LA LECCIÓN 4.

Resolver los problemas siguientes, indicando para cada uno de ellos lo que significa:

1.- Un maestro carpintero y su ayudante trabajaron en una obra por seis días y ganaron \$192. El maestro carpintero tiene un salario de \$8. más por día que el de su -- ayudante. ¿Cuánto gana cada uno de ellos?

2.- Un hombre deja \$12,000. para ser repartidos entre su mujer, su hija y su hijo. Su mujer recibe el doble de lo que recibe cada uno de sus hijos. ¿Cuánto recibe cada - uno?

3.- El gerente de un teatro sabe que vendió 850 boletos para cierta función. Si los boletos de luneta se vendieron a \$3.00 cada uno y los de galería a \$2.00 cada uno, y en total se recaudaron \$2,220. ¿Cuántos boletos de cada clase vendió?

4.- Un número es 36 unidades menor que el que resulta cuando los dígitos se invierten. El dígito de las unidades excede al doble del dígito de las decenas en uno. Encontrar el número.

5.- Una alcancía tiene 60 monedas entre monedas de 10 centavos y de 25 centavos. Si el monto total de las monedas es de \$12.30 ¿Cuántas hay de 10 centavos y cuántas de 25?

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DE LA LECCIÓN 4.

AUTOEVALUACIÓN 1.

1.-	34	7.-	36
2.-	23	8.-	60
3.-	3.33	9.-	81
4.-	4	10.-	25
5.-	3	11.-	9
6.-	30	12.-	13

AUTOEVALUACIÓN 2.

1.- $(x+3) + x = 53$
x = parte menor
$(x+3)$ = parte mayor

2.- $$\frac{120 + 98 + 111 + x}{4} = 114$$

$$\frac{329 + x}{4} = 114$$

x = peso del cuarto muchacho

3.- Total de carreras = 17

1er. juego = 5 carreras
2o. juego = $2x$ carreras
3er. juego = x carreras

x = carreras en el 3er. juego

Luego, la ecuación es:

$5 + 2x + x = 17$

AUTOEVALUACIÓN 4.

1.- 80 de 10 centavos
112 de 25 centavos

2.- 215 y 55 mph

3.- \$ 144; \$ 156

4.- 125 y 140 Km

5.- Jaime 12
Francisco 9

6.- 38

7.- 35

8.- \$ 800 y \$ 850

AUTOEVALUACIÓN 5.

1.- bat \$ 15.00
pelota \$ 20.00
guante \$ 45.00

2.- Ingeniería, 10
Contabilidad, 15
Preparatoria, 20

3.- diez cts. 70
veinticinco cts. 60
cincuenta cts. 20

4.- padre, 40
hijo, 15
hija, 10

5.- a caballo, 19.2 Km
en auto, 32 Km
en tren, 560 Km

CAPITULO 4.

DESIGUALDADES E INECUACIONES LINEALES.

LECCIÓN 1.

4-1 INTRODUCCIÓN.

Aún cuando las relaciones matemáticas más importantes son las expresadas por ecuaciones, existen otras relaciones, de un tipo indefinido, en las que la correspondencia entre un conjunto de variables y otro conjunto no está dada por una función, sino por una relación de grado. Las que son tema de ésta lección se denominan *"desigualdades"*, pero son muy distintas de la desigualdad expresada por el signo *"no es igual a"* ($\neq$). Cuando se escribe $x \neq y$, lo único que se está expresando es que "x" no es igual a "y". Lo anterior dice poco acerca de las variables. A menudo se desea expresar el hecho de que una variable es mayor o menor que otra variable o un número específico, o el de que la variable está contenida en un cierto conjunto de valores. El uso apropiado de los símbolos y términos que expresan este tipo de relaciones extenderá nuestro vocabulario matemático.

El tema de las *desigualdades* es de gran importancia, según veremos en muchas partes del álgebra y también observaremos ciertas analogías entre *igualdades y desigualdades.*

Al concepto de mayor y menor entre dos números corresponde el de ordenación. La relación de orden queda restringida a los números reales y se puede interpretar geométricamente en un sistema coordenado unidimensional. En otras palabras, todo nuestro estudio con desigualdades se limitará a los números reales. No tiene sentido decir que un número

4-2 LOS AXIOMAS DE ORDEN.

Hemos introducido un conjunto de elementos indefinidos R, llamados *números reales*, que poseen las propiedades concretadas en los seis *axiomas de campo*. Los números reales que satisfacen a los axiomas de campo, se dice que forman un *campo*. Atribuimos ahora propiedades adicionales al conjunto R requiriendo que este conjunto satisfaga a los *axiomas de orden*. Los símbolos de *orden* son y se describen como sigue:

$<$ significa "es menor que"

$>$ significa "es mayor que"

Un *campo* que satisface los *axiomas de orden* es llamado un *campo ordenado*.

Axioma 1. *El axioma de tricotomía.*

Si a y b ε R, entonces una y solo una de las siguientes relaciones es válida.

$a < b$ $a = b$ $a > b$

Axioma 2. *El axioma de transitividad.*

Si a, b y c ε R, tal que $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.

Axioma 3. *El axioma de adición.*

Si a, b y c ε R, tales que $a > b$, entonces $a+c > b+c$.

Axioma 4. *El axioma de multiplicación.*

Si a, b y c ε R, tales que $a > b$ y $c > o$, entonces $ac > bc$

No es difícil establecer las relaciones de orden en el sistema de los números reales. En efecto, si consideramos dos enteros tales como -3 y 5, podemos decir a la vista, cual es mayor, pero cuando tenemos números racionales tales como 13/23 y 9/17, no es fácil decidir de inmediato cual es mayor. En esta lección daremos un método para tomar tal decisión. La investigación del orden de dos números racionales particulares, tales como 9/17 y 13/23 nos ayudará a hallar un método general. Convertiremos estas dos fracciones a un común denominador y entonces estableceremos el orden comparando sus numeradores. Usaremos el elemento de identidad para la multiplicación como ayuda.

$$\frac{13}{23} = \frac{13}{23} \cdot \frac{17}{17} = \frac{13.17}{23.17} = \frac{221}{17.23}$$

$$\frac{9}{17} = \frac{9}{17} \cdot \frac{23}{23} = \frac{9.23}{17.23} = \frac{207}{17.23}$$

Puesto que $13.17 > 9.23$, o sea, $221 > 207$, vemos que $13/23 > 9/17$.

4-3 DEFINICIONES.

Se dice que una cantidad "a" es mayor que otra cantidad "b" cuando la diferencia (a-b) es *positiva*. Así, 4 es mayor que (-2) porque la diferencia 4-(-2) = 6 es *positiva*; (-1) es mayor que (-3) porque (-1)-(-3) = 2 es una cantidad *positiva*.

Se dice que una cantidad "a" es menor que otra cantidad "b" cuando la diferencia (a-b) es *negativa*. Así (-1) es menor que 1 porque la diferencia -1 -1 = -2 es *negativa*; (-4) es menor que (-3) porque la diferencia (-4)-(-3) = -1 es *negativa*.

De acuerdo con lo anterior, cero es mayor que cualquier cantidad negativa; así, 0 es mayor que (-1) porque 0-(-1) es positiva. *Desigualdad* es una expresión que indica que una cantidad es mayor o menor que otra. Los signos de desigualdad son >, que se lee mayor que, y < que se lee menor que. Así, 5 > 3 se lee 5 mayor que 3; -4 < -2 se lee -4 menor que -2.

Lo mismo que en las *igualdades*, en toda *desigualdad*, los términos que están a la izquierda del signo mayor o menor forman el *primer miembro* de la desigualdad , y los términos a la derecha forman el *segundo miembro*. Así en a+b > c-d el primer miembro es a+b y el segundo c-d .

Los *términos* de una desigualdad son las cantidades que están separadas de otras por los signos + o -, también la cantidad que está sola en un miembro. En la desigualdad anterior los *términos* son a, b, c y -d.

Dos desigualdades son del mismo signo o subsisten en el mismo sentido cuando sus primeros miembros son mayores o menores ambos que los segundos. Así, a > b y c > d son desigualdades del *mismo sentido*.

Dos desigualdades son de *signo contrario* o no subsisten en el mismo sentido cuando sus primeros miembros no son ambos mayores o menores que los segundos miembros. Así, 5 > 3 y 1 < 2 son desigualdades de sentido contrario.

De la definición de desigualdad, lo mismo que de la escala de los números algebráicos, se deducen las siguientes consecuencias.

1) *Todo número positivo es mayor que cero.*

   Así, 7 > 0; porque 7-0 = 7 (positivo)

2) *Todo número negativo es menor que cero.*

   Así, -10 < 0; porque -10-0 = -10 (negativo)

3) *Si dos números son negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto.*

   Así, (-20) > (-30); porque (-20)-(-30) = 10 (positivo)

El estudiante debe observar que, para ambos símbolos de desigualdad, la cantidad mayor queda siempre en el lado hacia el cual se abre el símbolo, mientras que el vértice apunta hacia la cantidad menor. También vamos a introducir otros dos símbolos útiles: a $\geq$ b, que se lee "a es mayor o igual que b" y c $\leq$ d que se lee "c es menor o igual que d". En particular, la desigualdad a $\geq$ o es un modo conveniente de afirmar que "a" representa a todo número no negativo.

Así como hay igualdades absolutas, que son las identidades, e igualdades condicionales que son las ecuaciones; así también hay dos clases de desigualdades: *las absolutas* y *las condicionales*.

Una desigualdad absoluta o incondicional es aquella que tiene el mismo sentido para todos los valores de las variables para los que están definidos sus miembros. Son ejemplos de desigualdades absolutas, $5 > -7$ y $x^2 + 1 > 0$.

Una desigualdad condicional o inecuación es aquella que tiene el mismo sentido solo para ciertos valores de las variables, tomados entre los valores para los que sus miembros están definidos. Son ejemplos de desigualdades condicionales o inecuaciones: $x - 2 < 3$, válida solo si $x < 5$;
$x^2 > 4$, válida solo si $x > 2$ ó $x < -2$

4-4 PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES.

1) *Si a los dos miembros de una desigualdad se suma o resta una misma cantidad, el signo de la desigualdad no varía.*

Así, dada la desigualdad $a > b$ podemos escribir: $a+c > b+c$ y $a-c > b-c$.

Consecuencia:

Un término cualquiera de una desigualdad se puede pasar de un miembro al otro cambiándole el signo.

Así, en la desigualdad $a > b+c$ podemos pasar "c" al primer miembro con signo - y quedará $a-c > b$, porque equivale a restar "c" a los dos miembros.

En la desigualdad $a-b > c$ podemos pasar "b" con signo + al segundo miembro y quedará $a > b+c$, porque equivale a sumar "b" a los dos miembros.

2) *Si los dos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por una misma cantidad positiva, el signo de la desigualdad no varía.*

Así, dada la desigualdad $a > b$ y siendo "c" una cantidad positiva, podemos escribir: $ac > bc$ y $a/c > b/c$.

Consecuencia:

Se pueden suprimir denominadores en una desigualdad, sin que varíe el signo de la desigualdad, porque ello equivale a multiplicar todos los términos de la desigualdad, o sea sus

dos miembros, por el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores.

3) *Si los dos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por una misma cantidad negativa, el signo de la desigualdad varía.*

Así, en la desigualdad $a>b$ multiplicamos ambos miembros por $-c$, tendremos: $-ac <-bc$ y dividiéndolos por $-c$, o sea multiplicando por $-1/c$, tendremos: $-a/c <-b/c$.

Consecuencia:

Si se cambia el signo a todos los términos, o sea a los dos miembros de una desigualdad, el signo de la desigualdad varía porque equivale a multiplicar los dos miembros de la desigualdad por -1.

Así, en la desigualdad $a-b> -c$ cambiamos el signo a todos los términos y tendremos: $b-a< c$.

4) *Si cambia el orden de los miembros, la desigualdad cambia de signo.*

Así, si $a> b$ es evidente que $b< a$.

5) *Si se invierten los dos miembros, la desigualdad cambia de signo.*

Así, siendo $a>b$ se tiene que $1/a< 1/b$.

6) *Si los miembros de una desigualdad son positivos y se elevan a una misma potencia positiva, el signo de la desigualdad no cambia.*

Así, $5>3$; elevando al cuadrado $(5)^2>(3)^2$ o sea, $25 >9$.

7) *Si los dos miembros o uno de ellos es negativo y se eleva a una potencia impar positiva, el signo de la desigualdad no cambia.*

Así, $-3 > -5$. Elevando al cubo: $(-3)^3 > (-5)^3$ o sea, $-27 > -125$.
$2 > -2$. Elevando al cubo: $(2)^3 > (-2)^3$ o sea, $8 > -8$.

8) *Si los dos miembros son negativos y se elevan a una misma potencia par positiva, el signo de la desigualdad cambia.*

Así, $-3 > -5$. Elevando al cuadrado: $(-3)^2 = 9$ y $(-5)^2 = 25$ y queda $9 < 25$.

9) *Si un miembro es positivo y otro negativo y ambos se elevan a una misma potencia par positiva, el signo de la desigualdad puede cambiar.*

Así, $3 > -5$. Elevando al cuadrado $(3)^2 = 9$ y $(-5)^2 = 25$ y queda $9 < 25$; *cambia* $8 > -2$, elevando al cuadrado $(8)^2 = 64$ y $(-2)^2 = 4$ y queda $64 > 4$; *no cambia.*

10) *Si los dos miembros de una desigualdad son positivos y se les extrae una misma raíz positiva, el signo de la desigualdad no cambia.*

Así, si $a > b$ y n es positivo, tendremos: $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

11) *Si dos o más desigualdades del mismo signo se suman o multiplican miembro a miembro, resulta una desigualdad del mismo signo (miembros positivos).*

Así, si $a > b$ y $c > d$, tendremos: $a+c > b+d$ y $ac > bd$.

12) *Si dos desigualdades del mismo signo se restan o dividen miembro a miembro, el resultado no es necesariamente una desigualdad del mismo signo, pudiendo ser una igualdad.*

Así, $10 > 8$ y $5 > 2$. Restando miembro a miembro: $10-5 = 5$ y $8-2 = 6$; luego queda, $5 < 6$; cambia el signo.

Si dividimos miembro a miembro las desigualdades $10 > 8$ y $5 > 4$, tenemos $10/5 = 2$ y $8/4 = 2$; luego queda $2 = 2$; igualdad.

AUTOEVALUACIÓN 1.

1.- Si $a \in R$, diga por qué la desigualdad $a > a$ es imposible.

2.- Si a, b, c, y $d \in R$, con $b > 0$ y $d > 0$, demuestre que $a/b > c/d$ si y sólo si $ad > bc$.

3.- Si $a \neq 0$, demuestre que $a^2 > 0$.

4.- Si $a > b$ y $c < 0$, muestre que $a/c < b/c$.

5.- ¿Cuál de las siguientes desigualdades es del mismo sentido que $3 < 4$?

0) $2 < x$ 1) $2 > 1$ 2) $2 > x$
3) $1 > 0$

6.- ¿Cuál de las siguientes desigualdades se deduce de $a+b < b^2$?

0) $a < b$ 1) $a > b$ 2) $a < b^2$
3) Ninguna.

7.- Si $ac < bc$ entonces $a < b$ si y solo si:

0) $c > 0$ 1) $c = -1$ 2) $c < 0$
3) $c = 0$

8.- ¿Cuál de las siguientes es una desigualdad absoluta suponiendo $x \in R$?

0) $x^3 + 1 > 0$ 1) $2x^2+2x+3 > 0$ 2) $x - 2 < 3$
3) $x^2(x+1) > 0$

9.- ¿Cuál de las siguientes es una desigualdad condicional suponiendo $x \in R$?

0) $|x - 3 > 2$ 1) $x^2+2 > 2x$ 2) $|3 > -1$
3) $x^2 + 2 > 0$

4-5 INECUACIONES LINEALES Y GRÁFICAS NUMÉRICAS.

Una *inecuación* es una desigualdad en la que hay una o más cantidades desconocidas (incógnitas) y que solo se verifica para determinados valores de las incógnitas. Las *inecuaciones* se llaman también *desigualdades condicionales*.

Así, la desigualdad $\{x \in R|\ 2x - 3 > x + 5\}$ es una inecuación porque tiene la incógnita x y solo se verifica para cualquier valor de x mayor que 8.

En efecto; para $x = 8$ se convertirá en igualdad y para $x < 8$ se convertirá en una desigualdad de signo contrario.

Resolver una *inecuación* es hallar los valores de las incógnitas que satisfacen la inecuación. La resolución de las inecuaciones se funda en las propiedades de las desigualdades, expuestas anteriormente y en las *consecuencias* que de las mismas se derivan.

Ejemplo 1.

Resolver la inecuación $\{x \in R|\ 2x - 3 > x + 5\}$

Pasando x al primer miembro y(-3) al segundo; $2x-x>5+3$; reduciendo $\{x \in R\ x > 8\}$. 8 es el límite inferior de x, es decir que la desigualdad dada solo se verifica para los valores de x mayores que 8 y el conjunto solución de la inecuación es "todos los números dirigidos mayores que 8.

La gráfica correspondiente queda así:

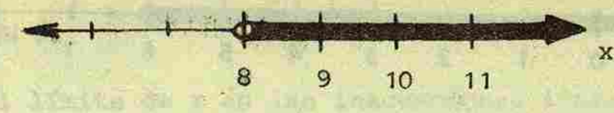


Fig. 1.

observamos que el 8 no está incluído en el conjunto y que la flecha llena representa continuidad hasta el infinito del conjunto de los números reales.

Ejemplo 2.

Hallar el límite de x en la inecuación:

$$\{x \in R|\ 7 - \frac{x}{2} \geq \frac{5x}{3} - 6\}$$

Suprimiendo denominadores:

$$42 - 3x \geq 10x - 36$$

Trasponiendo, $-3x - 10x \geq -36 - 42$

$$-13x \geq -78$$

Cambiando el signo a los dos miembros, lo cual hace cambiar el signo de la desigualdad, se tiene:

$$13x \leq 78$$

Dividiendo por 13:

$$x \leq 78/13$$

o sea, $\{x \in R|\ x \leq 6\}$

6 es el límite superior de x, es decir, que la desigualdad dada solo se verifica para los valores de x menores o iguales que 6.

La gráfica del conjunto solución correspondiente queda así:

Fig. 2.

Observamos que el 6 está incluído en el conjunto y que la flecha llena representa continuidad hasta menos infinito en el conjunto de los números reales.

Ejemplo 3.

Hallar el límite de x en la inecuación:

$$\{x \in R \mid (x+3)(x-1) < (x-1)^2 + 3x\}$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$x^2 + 2x - 3 < x^2 - 2x + 1 + 3x$$

suprimiento x^2 en ambos miembros y trasponiendo:

$$2x + 2x - 3x < 1 + 3 \qquad \{x \in R \mid x < 4\}$$

4 es el límite superior de x.

La gráfica del conjunto solución queda:

Fig. 3.

AUTOEVALUACION 2.

Hallar el límite de x en las inecuaciones lineales siguientes y la gráfica del conjunto solución en el sistema unidimensional.

1.- $\{x \in R \mid x - 5 < 2x - 6\}$

2.- $\{x \in R \mid 5x - 12 > 3x - 4\}$

3.- $\{x \in R \mid x - 6 > 21 - 8x\}$

4.- $\{x \in R \mid 3x - 14 < 7x - 2\}$

5.- $\{x \in R \mid 2x - 5/3 > x/3 + 10\}$

6.- $\{x \in R \mid 3x - 4 + x/4 \leq 5x/2 + 2\}$

7.- $\{x \in R \mid (x-1)^2 - 7 \geq (x-2)^2\}$

8.- $\{x \in R \mid (x+2)(x-1) + 26 \leq (x+4)(x+5)\}$

A-6 DESCRIPCION DE SUBCONJUNTOS DE UN PLANO MEDIANTE DESIGUALDADES.

La gráfica de cualquier ecuación de primer grado en dos variables es una línea recta e inversamente, cualquier línea recta en un plano coordenado es la gráfica de alguna ecuación de primer grado en dos variables. En esta sección exáminaremos algunas *desigualdades de primer grado* en dos *variables* y determinaremos sus gráficas. A continuación se presentan tres desigualdades de primer grado en dos variables.

$$\{(x,y) \in R \mid y > x\}$$

$$\{(x,y) \in R \mid 2x + y < 0\}$$

$$\{(x,y) \in R \mid 1/2 \; x < y\}$$

Ejemplo 4.

Grafica el conjunto solución de $\{(x,y) \in R \mid y > x\}$.

Para determinar si cualquier par ordenado dado (x,y) satisface la desigualdad $y > x$, reemplazamos "x" por la primera componente del par ordenado y "y" por la segunda componente; si la proposición resultante es verdadera, entonces el par ordenado es una solución de la desigualdad.

Así, cualquier par ordenado (x,y) cuya segunda componente sea mayor que su primera componente será una solución de $y > x$. ¿Pertenece el par ordenado $(2,3)$ al conjunto solución de $y > x$? ¿El $(2,-3)$?

Ahora construiremos la gráfica del conjunto solución de $\{(x,y) \in R \mid y > x\}$. Vea la fig. 4. Observe que cualquier punto sobre la recta corresponde a una solución de la ecuación $y = x$. ¿Cuáles de los puntos desde P_1 hasta P_{12} corresponden a soluciones de $y > x$?

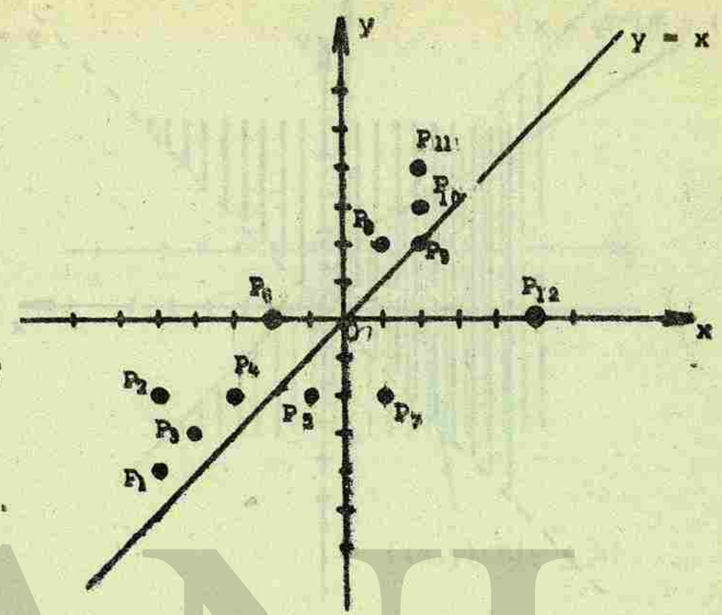


Fig. 4.

Note que la recta en la figura 4, como cualquier recta en un plano coordenado separa los puntos del plano que no están sobre la recta en dos conjuntos disjuntos de puntos: Los dos conjuntos de puntos a cada lado de la recta, cada uno de los cuales se llama un *semiplano abierto*.

La unión de la recta con uno de los semiplanos abiertos que determina, se llama un *semiplano cerrado*. Así, podemos describir la gráfica de, $\{(x,y) \in R \mid y > x\}$ como el semiplano "arriba" de la recta que es la gráfica de $y = x$. La gráfica de, $\{(x,y) \in R \mid y > x\}$ se muestra en la figura 5. El objeto de la recta interrumpida es indicar que los puntos que limitan el semiplano no son parte de la gráfica o del conjunto solución de la desigualdad.

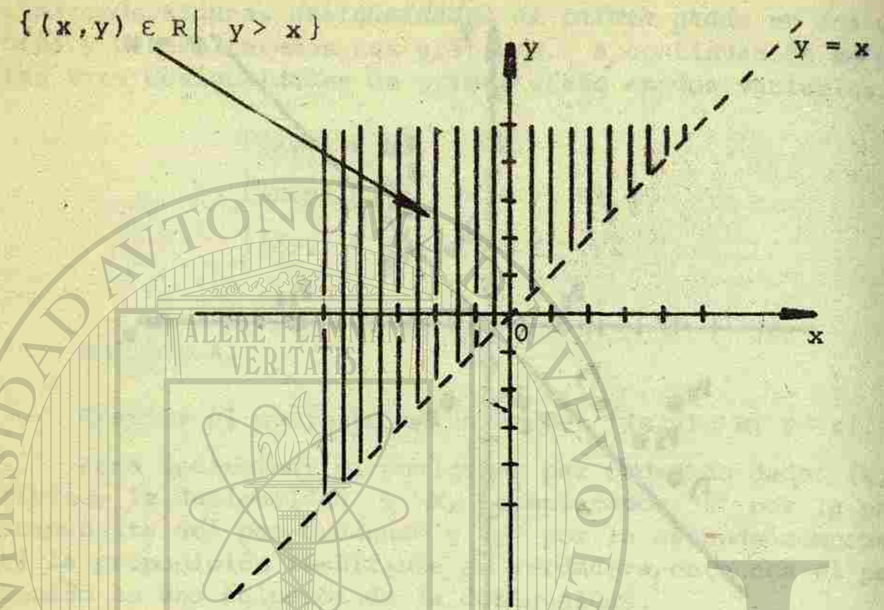


Fig. 5.

Sabiendo que la gráfica de $\{(x,y) \in R \mid y > x\}$ es el semiplano "arriba" de la línea interrumpida, describa la gráfica de $\{(x,y) \in R \mid y < x\}$

Ejemplo 5.

Grafica el conjunto solución de $\{(x,y) \in R \mid y \leq x\}$. Ya que el conjunto solución para $y \leq x$ es la unión de los conjuntos solución para $y=x$ y para $y < x$, vemos que la gráfica de $\{(x,y) \in R \mid y \leq x\}$ se muestra en la figura 6.

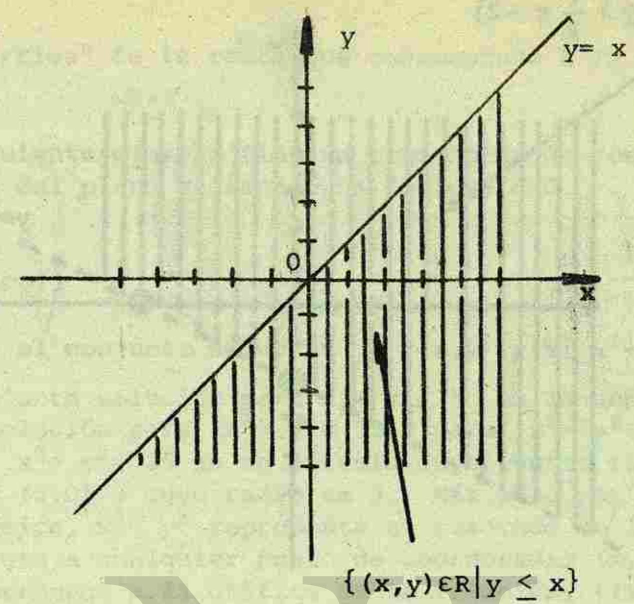


Fig. 6.

Note que la gráfica de $y \leq x$ es un *semiplano cerrado.* La recta llena límite indica que la recta pertenece al conjunto.

Ejemplo 6.

Grafica el conjunto solución de: $\{(x,y) \in R \mid y > \frac{1}{2} x - 2\}$ Un par ordenado (a,b) es un elemento del conjunto solución de $y > 1/2\ x - 2$ si y solo sí $b > 1/2\ a - 2$. Por tanto, (a,b) no es una solución si,

$$b = \frac{1}{2} a - 2 \quad ó \quad b < \frac{1}{2} a - 2$$

¿Cuáles de los pares ordenados (4,5), (6,1), (-2,4), (-2,-4) son soluciones de $\{(x,y) \in R \mid y > 1/2\ x - 2\}$? La gráfica de $y > 1/2\ x - 2$ es un semiplano. ¿Está la gráfica del semiplano "arriba" o "abajo" de la recta que es la gráfica de $y = 1/2\ x - 2$? Vea la figura 7.

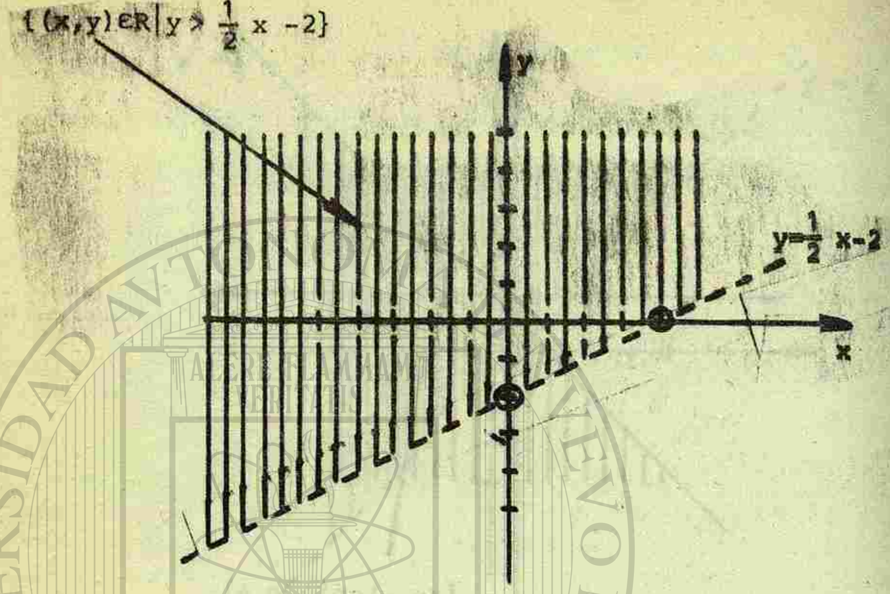


Fig. 7.

Como usted habrá supuesto probablemente, la gráfica de cualquier proposición abierta de la forma, $\{(x,y)\ \varepsilon\ R|\ Ax+By > C\}$, en que A y B son ambas diferentes de cero, es un semi-plano cuyo límite es la recta que corresponde a la gráfica de la ecuación $Ax + By = C$.

Así, para obtener la gráfica de cualquier caso de $\{(x,y)\ \varepsilon R|\ Ax + By > C\}$, primero encontramos la recta que corresponde a la gráfica de $Ax + By = C$. El único problema restante es elegir el semiplano correcto. Esto puede hacerse escribiendo la desigualdad $Ax + By > C$ en una forma equivalente, llamada la forma "y" de la desigualdad, donde "y" se deja sola en un miembro de la desigualdad.

Por ejemplo, suponga que deseamos obtener la gráfica de la relación $\{(x,y)\varepsilon\ R|\ 2x + y \geq 1\}$. La forma "y" de esta desigualdad es $y > -2x + 1$.

Ahora se ve fácilmente que la gráfica deseada es el semiplano de "arriba" de la recta que corresponde a la gráfica de $y = -2x + 1$.

El siguiente ejemplo ilustra otra forma de describir un subconjunto del plano mediante una desigualdad.

Ejemplo 7.

Hallar el conjunto solución de $\{(x,y)\ \varepsilon\ R|\ x^2 + y^2 \leq 25\}$

El conjunto solución para $x^2 + y^2 \leq 25$ es la unión de los conjuntos solución para $x^2 + y^2 = 25$ y para $x^2 + y^2 < 25$. La gráfica de $x^2 + y^2 = 25$ es un círculo cuyo centro tiene por coordenadas (0,0) y cuyo radio es 5. Más aún, por la relación pitagórica, $x^2 + y^2$ representa el cuadrado de la distancia del origen a cualquier punto de coordenadas (x,y); así, un punto pertenece a la gráfica de la relación, $\{(x,y)\varepsilon\ R|\ x^2 + y^2 < 25\}$ si y solo sí queda dentro de la gráfica del círculo $x^2 + y^2 = 25$. Concluímos que la gráfica del conjunto solución de $\{(x,y)\ \varepsilon\ R|\ x^2 + y^2 \leq 25$ está dada por el área sombreada de la fig. 8, incluyendo el límite.

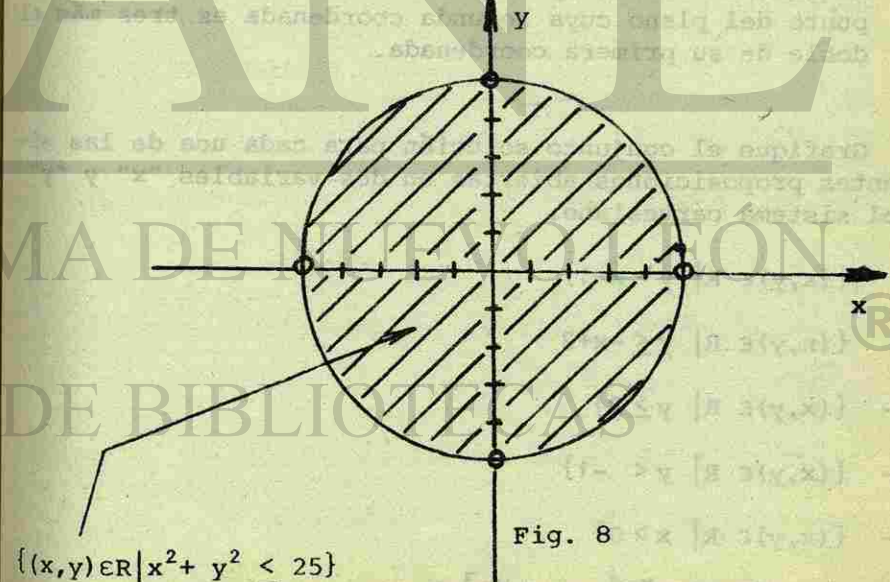


Fig. 8

AUTOEVALUACIÓN 3.

Diga si las siguientes proposiciones son falsas o verdaderas.

1.- La gráfica del conjunto solución $\{(x,y) \in R | y > x-3\}$ es un semiplano cerrado.

2.- La desigualdad anterior define una relación.

3.- La desigualdad $\{(x,y) \in R | y<x+2\}$ define una función.

4.- La forma "y" de $2x - y < 1$ es $y > 2x - 1$.

5.- La intersección de las gráficas $\{(x,y) \in R | y > x\}$ y de $\{(x,y) \in R | y < x\}$ es el conjunto vacío.

6.- La gráfica $\{(x,y) \in R | y > 3x-2\}$ es el semiplano de "abajo" de la recta correspondiente a la gráfica de $y = 3x - 2$.

7.- La gráfica de $\{(x,y) \in R | y > 2x + 3\}$ consiste en cada punto del plano cuya segunda coordenada es tres más el doble de su primera coordenada.

Grafique el conjunto solución para cada una de las siguientes proposiciones abiertas en dos variables "x" y "y" en el sistema cartesiano.

8.- $\{(x,y) \in R | y > x+1\}$

9.- $\{(x,y) \in R | y \leq -x+2\}$

10.- $\{(x,y) \in R | y \geq 2\}$

11.- $\{(x,y) \in R | y < -1\}$

12.- $\{(x,y) \in R | x > 0\}$

13.- $\{(x,y) \in R | \frac{x-4}{4} > \frac{y-3}{2}\}$

14.- $\{(x,y) \in R | x^2 + y^2 \leq 16\}$

15.- $\{(x,y) \in R | 2x + 2y < 9\}$

AUTOEVALUACIÓN DE LA LECCIÓN. 1.

Resuelva las siguientes desigualdades:

1.- $\{x \in R \mid 4x > 12\}$

0) $\{x\in R \mid x > 4\}$ 1) $\{x\in R \mid x < 3\}$
2) $\{x\in R \mid x > 3\}$ 3) $\{x\in R \mid x < 4\}$
4) $\{x\in R \mid x = 3\}$

2.- $\{x\in R \mid 2x - 4 < 6\}$

0) $\{x\in R \mid x < 5\}$ 1) $\{x\in R \mid x < 3\}$
2) $\{x\in R \mid x < 2\}$ 3) $\{x\in R \mid x < 6\}$
4) $\{x\in R \mid x = 3\}$

3.- $\{x\in R \mid 5x - 1 \geq 3x + 7\}$

0) $\{x\in R \mid x \geq 2\}$ 1) $\{x\in R \mid x \geq 3\}$
2) $\{x\in R \mid x \geq 1\}$ 3) $\{x\in R \mid x \geq 5\}$
4) $\{x\in R \mid x \geq 4\}$

4.- $\{x\in R \mid 6x + 3 < x - 9\}$

0) $\{x\in R \mid x < - 5/12\}$ 1) $\{x\in R \mid x < - 12/5\}$
2) $\{x\in R \mid x < 5/12\}$ 3) $\{x\in R \mid x < 5\}$
4) $\{x\in R \mid x < 3\}$

5.- $\{x\in R \mid 5x - 7 \leq 3x + 2\}$

0) $\{x\in R \mid x \leq 9/2\}$ 1) $\{x\in R \mid x \leq 2/9\}$
2) $\{x\in R \mid x \leq -2/9\}$ 3) $\{x\in R \mid x \leq - 9/2\}$
4) $\{x\in R \mid x < 2\}$

6.- Si $b\in R$, demuestre que $b < 0$ si y solo sí $-b > 0$.

7.- Demuestre que $b > 0$ si y solo sí $-b < 0$.

8.- Demuestre que $a > b$ si y solo sí $a-b > 0$.

9.- Si $a > b$ y $c > 0$ muestre que $a/c > b/c$.

Diga si las siguientes proposiciones son falsas o verdaderas.

10.- La gráfica del conjunto solución de $\{(x,y)\in R \mid y \leq x+2\}$ es un semiplano.

11.- La forma "y" de $x+y < 3$ es $y < 3-x$.

12.- La gráfica del conjunto solución de $\{(x,y)\in R \mid y \geq 1/2\, x-5\}$ es la intersección de las gráficas de los conjuntos solución de $\{(x,y)\in R \mid y = 1/2\, x -5\}$ y de $\{(x,y)\in R \mid y > 1/2\, x - 5\}$

13.- La unión de las gráficas de $\{(x,y)\in R \mid y > x\}$ y de $\{(x,y)\in R \mid y < x\}$ es todo el plano

14.- La gráfica de $\{(x,y)\in R \mid Ax + By < C\}$ puede obtenerse graficando $\{(x,y) \in R \mid Ax + By = C\}$, una recta que determina dos semiplanos y luego decidiendo cuál de los dos es el semiplano correcto.

15.- $\{(x,y) \in R \mid -y > 2x+2\} = \{(x,y)\in R \mid y < -2x-2\}$

16.- $\{(x,y) \in R \mid y > 5\} = \{(x,y)\in R \mid 1/y > 1/5\}$

Grafique en un sistema cartesiano las relaciones siguientes:

17.- $\{(x,y) \in R \mid -y > 2x + 2\}$

18.- $\{(x,y) \in R \mid 3x + 2y < 2\}$

19.- $\{(x,y) \in R \mid 3x - 2y < 2\}$

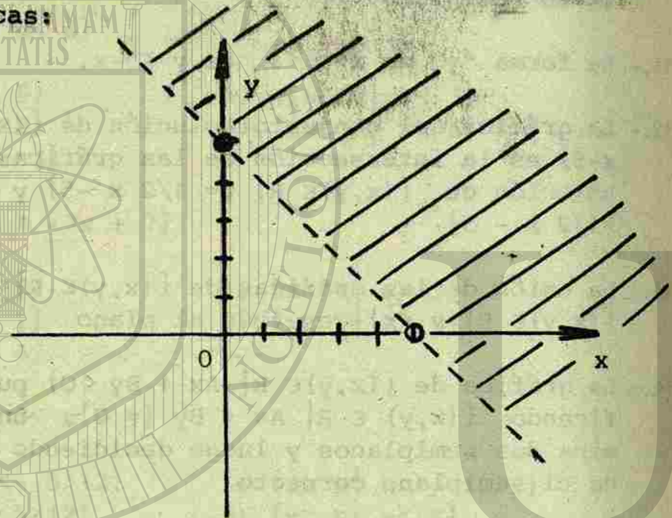
20.- $\{(x,y) \in R \mid x^2 + y^2 \geq 16\}$

21.- $\{(x,y) \in R \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$

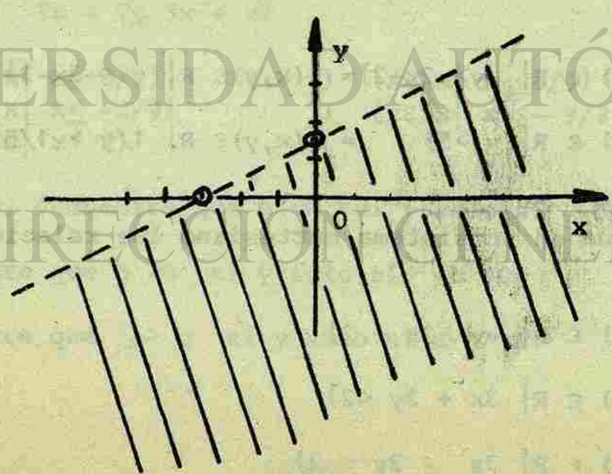
22.- $\{(x,y) \in R \mid x^2 + y^2 \geq 0\}$

Encuentre la relación correspondiente a partir de las siguientes gráficas:

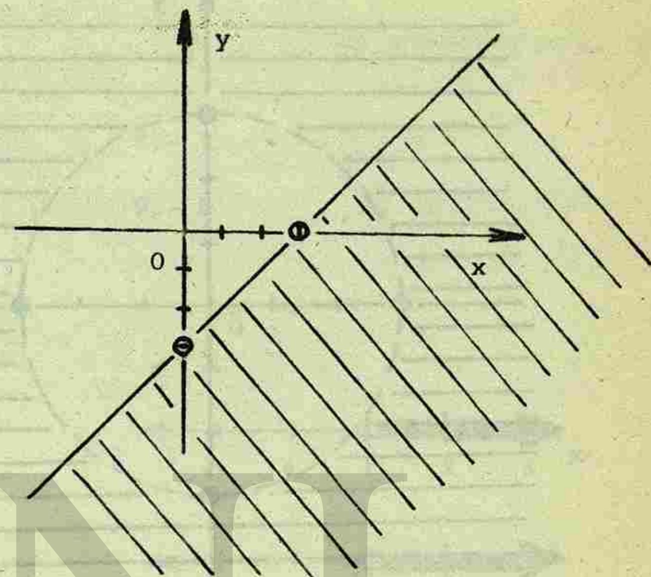
23.-



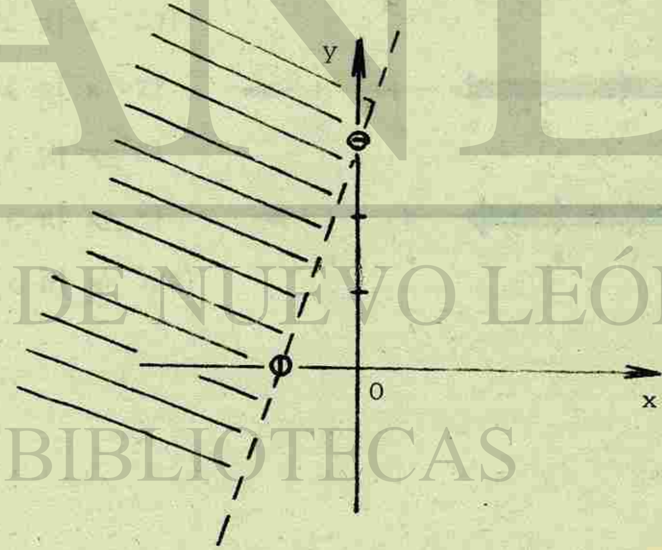
24.-



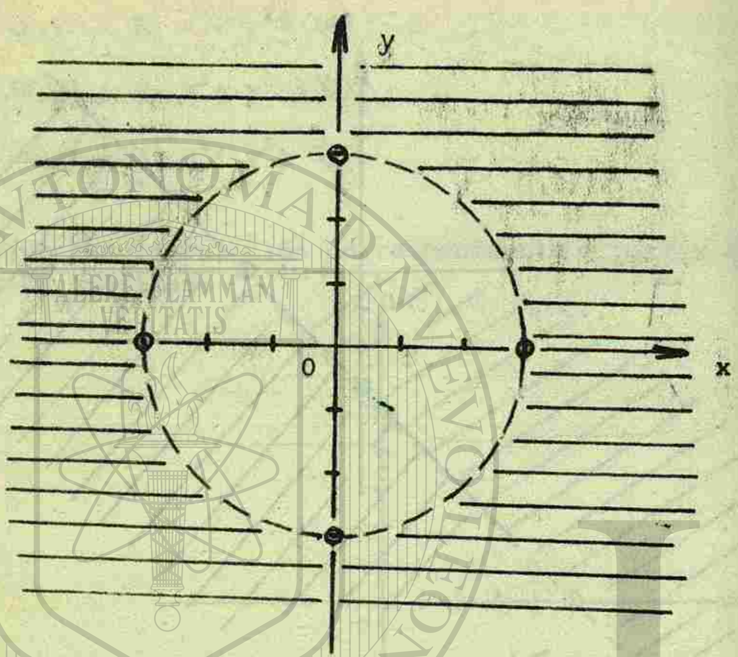
25.-



26.-



27.-



RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DE LA LECCIÓN 1.

AUTOEVALUACIÓN 1.

5.- 0

6.- 3

7.- 0

8.- 1

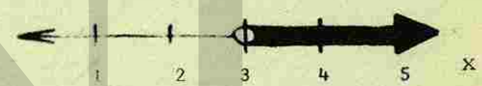
9.- 0

AUTOEVALUACIÓN 2.

1.- $\{x \in R \mid x > 1\}$

2.- $\{x \in R \mid x > 4\}$

3.- $\{x \in R \mid x > 3\}$

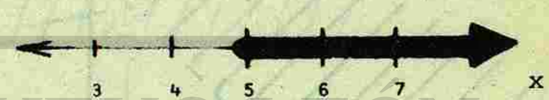


4.- $\{x \in R \mid x > -3\}$

5.- $\{x \in R \mid x > 7\}$

6.- $\{x \in R \mid x \leq 8\}$

7.- $\{x \in R \mid x \geq 5\}$



8.- $\{x \in R \mid x \geq 1/2\}$

AUTOEVALUACIÓN 3.

1.- F

2.- V

3.- F.

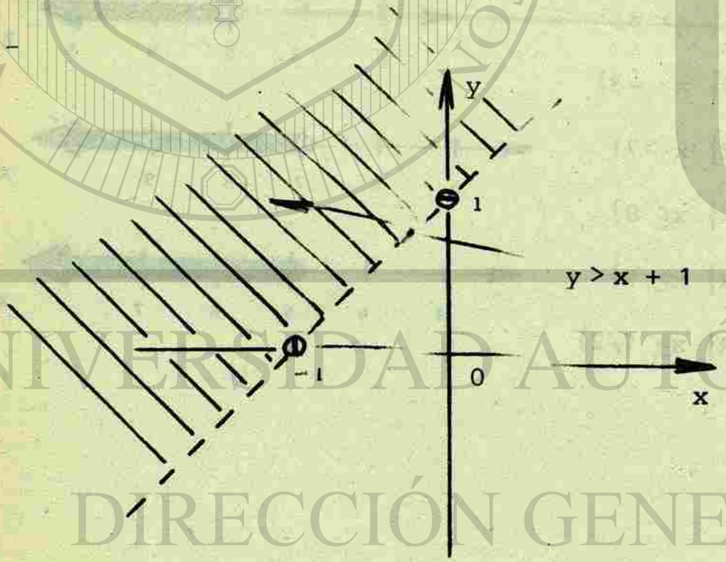
4.- V

5.- V

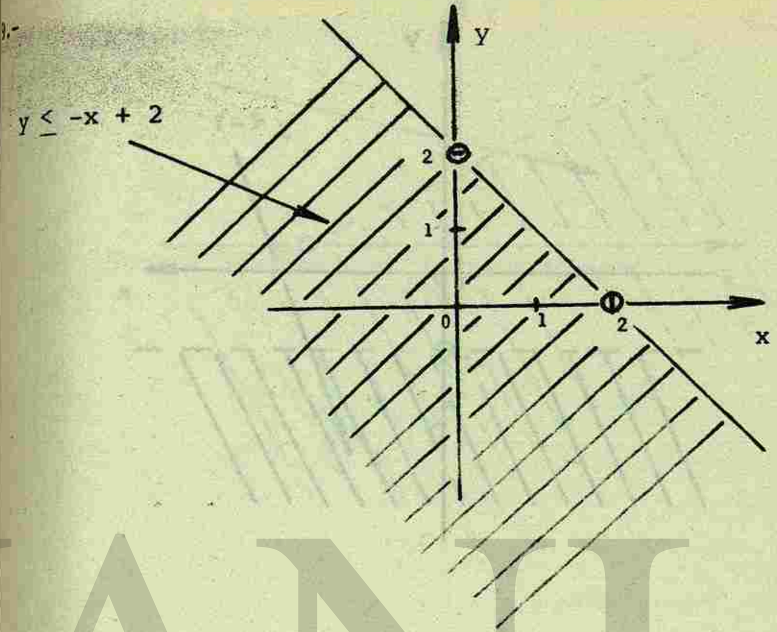
6.- F

7.- F

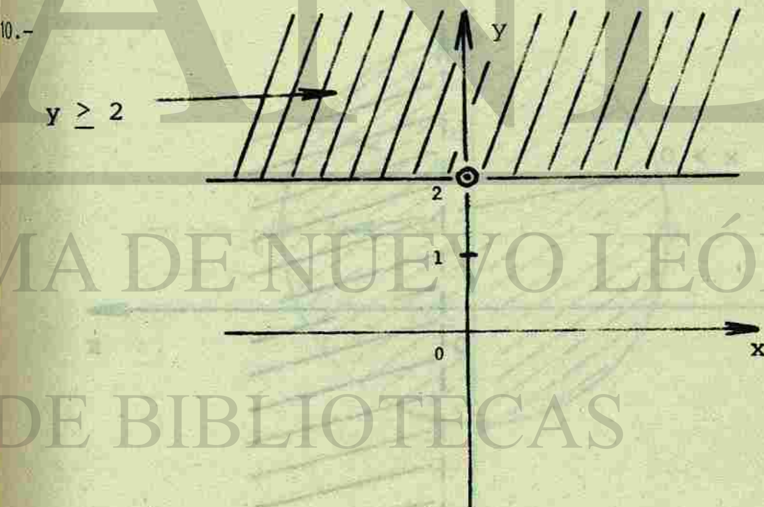
8.-



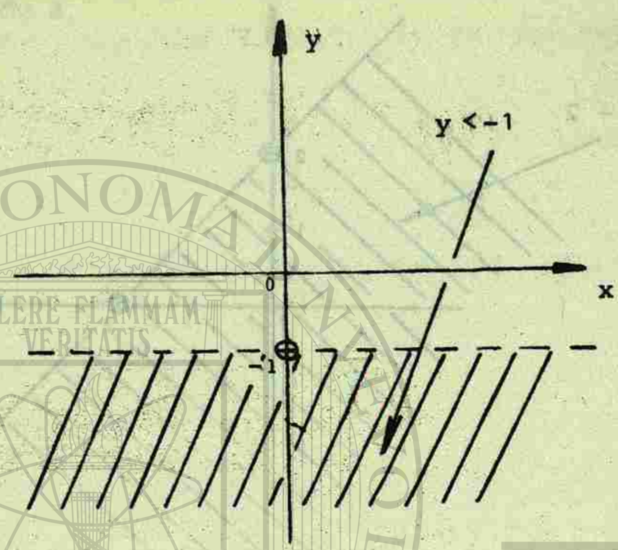
9.-



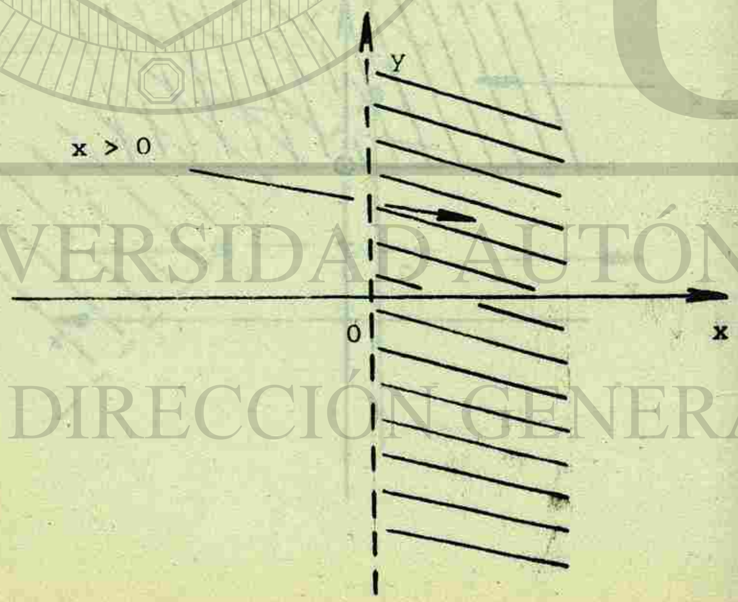
10.-



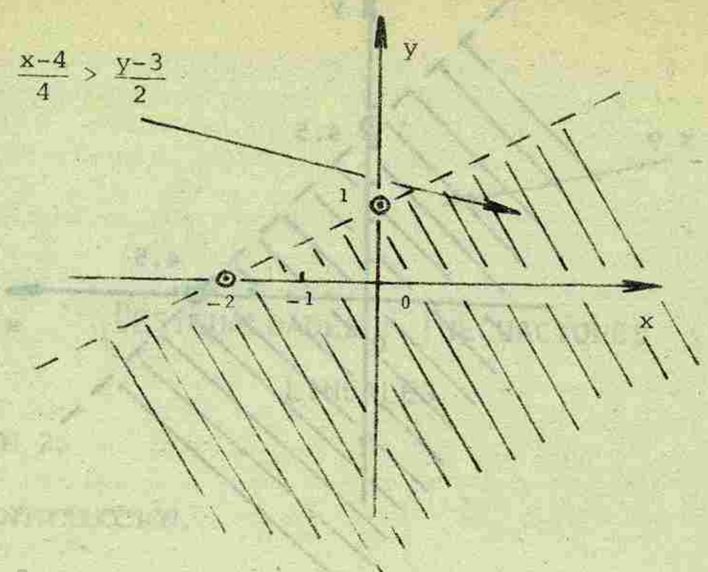
11.-


y
y < -1
0
x
-1

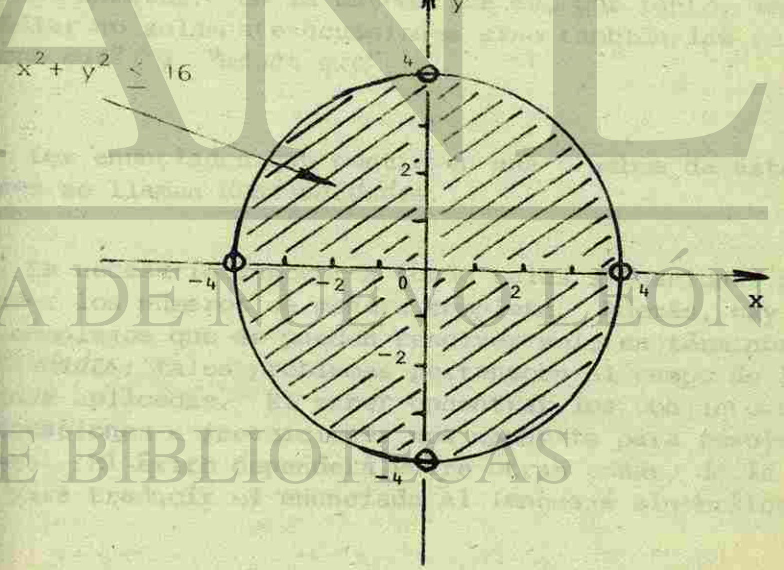
12.-


y
x > 0
0
x

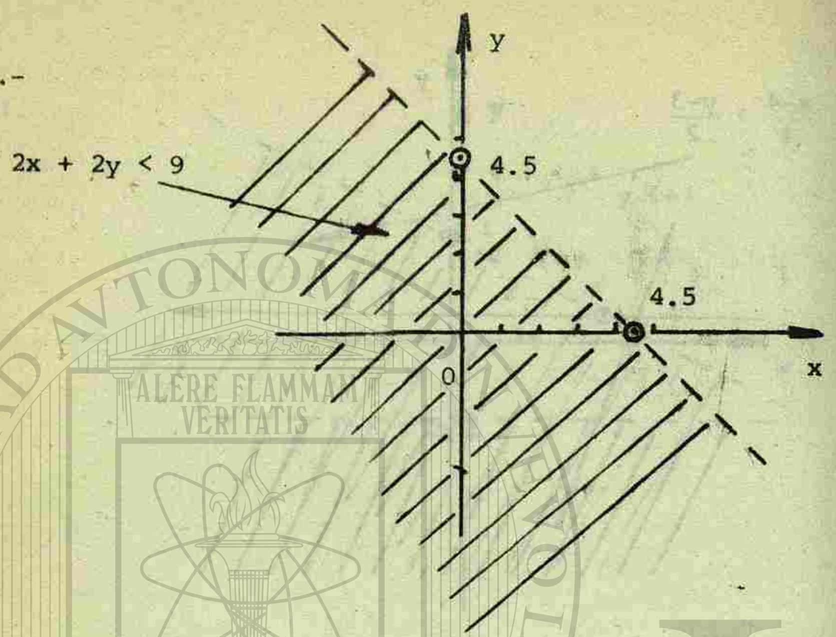
13.-


$\frac{x-4}{4} > \frac{y-3}{2}$
y
1
-2
-1
0
x

14.-


$x^2 + y^2 \leq 16$
y
4
2
-4
-2
0
2
4
x
-2
-4

15.-



DESIGUALDADES E INECUACIONES LINEALES.

LECCIÓN 2.

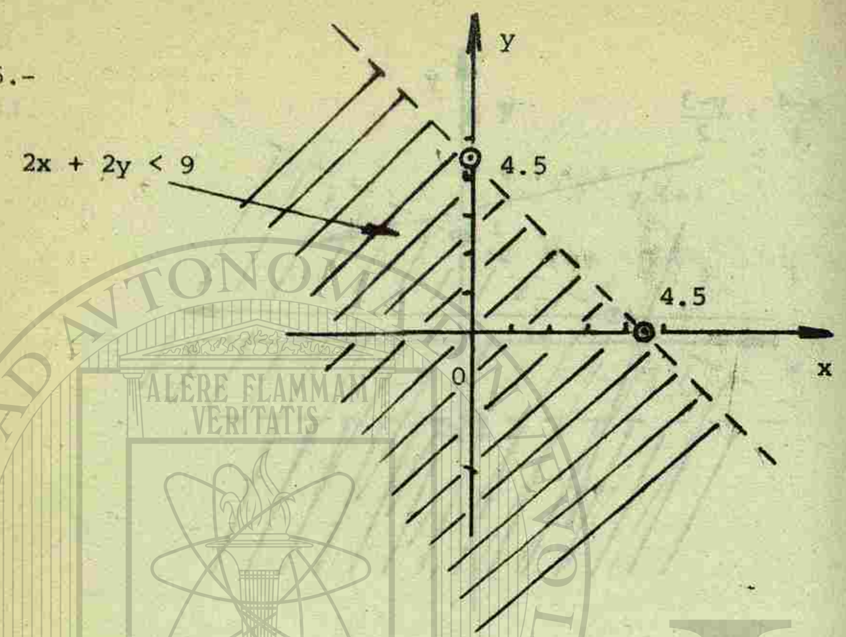
4-7 INTRODUCCIÓN.

La solución a un problema práctico no siempre es un solo número. A menudo hallamos que la solución puede ser cualquier número menor que cierto número o cualquier número entre dos números. En la matemática es, por tanto, importante estudiar no solamente ecuaciones sino también las relaciones *"menor que"* y *"mayor que"*

Los enunciados que contienen una o ambas de estas relaciones se llaman *desigualdades*.

Es necesario conocer a fondo tales situaciones para comprender los números de manera completa. Además, hay problemas complejos que se pueden resolver solo en términos de *desigualdades*; tales problemas pertenecen al campo de las matemáticas aplicadas. El saber encontrar los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones nos capacita para resolver problemas. El éxito dependerá entre otras cosas, de la habilidad para traducir el enunciado al lenguaje algebráico.

15.-



DESIGUALDADES E INECUACIONES LINEALES.

LECCIÓN 2.

4-7 INTRODUCCIÓN.

La solución a un problema práctico no siempre es un solo número. A menudo hallamos que la solución puede ser cualquier número menor que cierto número o cualquier número entre dos números. En la matemática es, por tanto, importante estudiar no solamente ecuaciones sino también las relaciones *"menor que"* y *"mayor que"*

Los enunciados que contienen una o ambas de estas relaciones se llaman *desigualdades*.

Es necesario conocer a fondo tales situaciones para comprender los números de manera completa. Además, hay problemas complejos que se pueden resolver solo en términos de *desigualdades*; tales problemas pertenecen al campo de las matemáticas aplicadas. El saber encontrar los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones nos capacita para resolver problemas. El éxito dependerá entre otras cosas, de la habilidad para traducir el enunciado al lenguaje algebráico.

En esta lección consideraremos primero *inecuaciones* con una sola variable "x". Entonces el problema consiste en determinar el dominio de valores de la variable "x" para los cuales es válida la desigualdad. Este dominio recibe el nombre de *solución* de la *inecuación*. Si la variable "x" entra solamente en forma de primera potencia, la inecuación se llama de primer grado o lineal. La resolución de una inecuación lineal es muy sencilla y análoga a la resolución de una ecuación lineal con una incógnita.

A menudo al resolver un problema no nos interesa hallar una cantidad exacta sino más bien el mínimo o el máximo de la cantidad necesaria. Determinamos las respuestas a esos problemas resolviendo *inecuaciones* más bien que ecuaciones. El concepto de desigualdad se aplica solo a los números reales.

4-8 SISTEMAS DE DESIGUALDADES LINEALES EN UNA VARIABLE.

En esta sección resolveremos algunos sistemas sencillos de desigualdades. El conjunto solución de un sistema de desigualdades en una variable consiste en todos los números que satisfacen a ambas desigualdades.

Para saber que se entiende por el conjunto solución de un sistema de dos desigualdades, hacemos la siguiente definición:

DEFINICION.

El conjunto solución de un sistema de dos desigualdades es la intersección de los conjuntos solución de las respectivas desigualdades.

Ilustraremos las formas de determinar los conjuntos solución de sistemas de desigualdades mediante ejemplos.

Ejemplo 1.

Resolver el sistema de desigualdades en una variable:

$$2x - 7 < 5 - x$$

$$11 - 5x < 1$$

Buscamos el conjunto de valores para x que hacen a cada desigualdad válida. La primera desigualdad es válida para todos los valores de $x < 4$ y la segunda para todos los valores de $x > 2$. Por tanto, la solución del sistema está dada por la intersección de estos dos conjuntos que puede expresarse mediante:

$\{x \in R \mid x < 4 \;\; y \;\; x > 2\}$ que es lo mismo que,

$\{x \in R \mid x < 4\} \cap \{x \in R \mid x > 2\}$ o sea,

$\{x \in R \mid 2 < x < 4\}$

La gráfica del conjunto solución en una recta numérica dirigida es la siguiente:

Fig. 1.

observe que los límites de la gráfica que corresponden a los números 2 y 4 no están incluídos en el conjunto.

Ejemplo 2.

Resolver la desiguladad: $|2x - 3| < 7$

Recordando la definición de valor absoluto de un número. El valor absoluto de un número real "a" denotado por $|a|$, es el número real tal que, $|a| = a$, cuando "a" es positivo o cero, $(a \geq 0)$ y $|a| = -a$, cuando "a" es negativo, $(a < 0)$. Entonces vemos que la desigualdad dada es equivalente al sistema,

$$2x - 3 < 7$$
$$2x - 3 > -7$$

Por conveniencia en encontrar el conjunto solución, expresamos primero el sistema en la forma extendida equivalente:

$$-7 < (2x-3) < 7$$

ahora sumamos 3: $\quad -4 < 2x < 10$

dividimos por 2: $\quad -2 < x < 5$

Por tanto, la solución de la desigualdad dada consiste en el conjunto de números entre -2 y 5, sin incluir los límites, o sea, $\{x \in R |\ -2 < x < 5\}$

Sobre la recta numérica el conjunto solución queda: fig.2

$\{x \in R |\ -2 < x < 5\}$

equivale a: $\quad \{x \in R |\ x < 5\}$ y $\{x \in R |\ x > -2\}$

o sea: $\quad \{x \in R |\ x < 5\} \cap \{x \in R |\ x > -2\}$

Fig. 2.

Ejemplo 3.

Dada la siguiente gráfica, exprésala como una proposición abierta en notación descriptiva:

Fig. 3.

Se observa que los puntos extremos de la gráfica pertenecen al conjunto y también todos los números menores que 1 y mayores que -3, o sea $x \leq 1$ y $x \geq -3$ por lo que la gráfica representa la intersección de las proposiciones abiertas anteriores. En notación descriptiva queda:

$$\{x \in R |\ -3 \leq x \leq 1\}$$

Ejemplo 4.

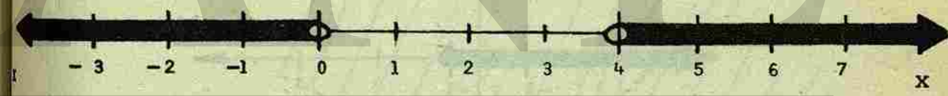


Fig. 4.

Expresa la gráfica de la figura 4 como una proposición abierta en notación descriptiva.

Se observa que los números 0 y 4 no pertenecen al conjunto pero sí los mayores que 4 o los menores que 0. Por tanto, $x > 4$ ó $x < 0$. Esto es lo mismo que la unión,

$$\{x \in R |\ x > 4\} \cup \{x \in R |\ x < 0\}$$

o sea, $\quad \{x \in R |\ x > 4$ ó $x < 0\}$

AUTOEVALUACIÓN 1.

Resuelva cada sistema de desigualdades algebráicamente y exprese la respuesta en notación descriptiva . Además grafique la solución sobre una recta numérica dirigida.

1.- $2x + 2 < x + 5$
$3x + 6 > 2 - x$

2.- $10x + 6 > 2x - 2$
$4x - 7 < 3 - x$

3.- $5x - 6 < x + 2$
$4x - 7 > 11 - 2x$

4.- $|x - 3| < 2$

5.- $|2x - 9| < 5$

6.- $|3 - 5x| \leq 12$

Dadas las siguientes gráficas, represéntalas en notación descriptiva.

7.-

8.-

9.-

10.-

4-9 SISTEMAS DE DESIGUALDADES LINEALES EN DOS VARIABLES.

La forma más sencilla de tener acceso a las soluciones de sistemas de desigualdades lineales en dos variables es por graficación. Ilustraremos las formas de determinar los conjuntos solución de sistemas de desigualdades mediante ejemplos.

Ejemplo 5.

Grafique el conjunto solución de $\{(x,y) \in R \mid x + 2y > 3\}$

Primero, graficamos $x + 2y = 3$ (usamos trazos interrumpidos para esta gráfica); la recta $x + 2y = 3$ separa los puntos del plano que no están sobre la recta en dos semiplanos. Uno de esos semiplanos es la gráfica de:

$$\{(x,y) \in R \mid x + 2y > 3\}$$

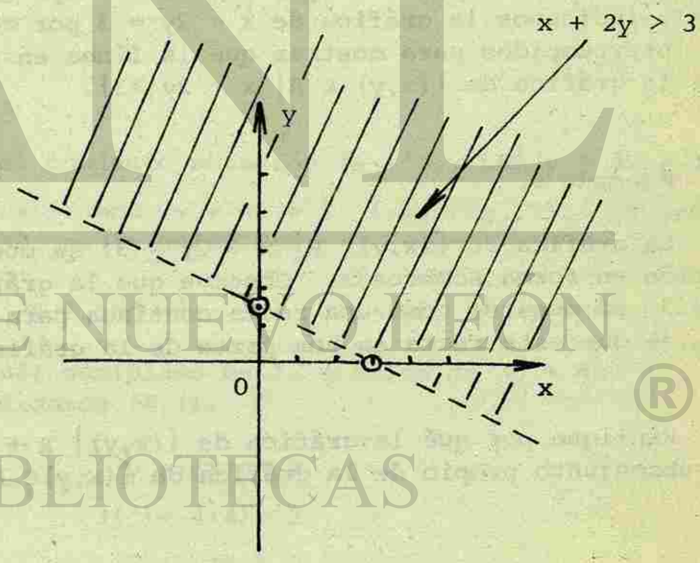


Fig. 5.

En la lección anterior aprendimos que el semiplano correcto puede obtenerse encontrando la forma "y" de la desigualdad. Otro procedimiento para encontrar el semiplano correcto consiste en probar un punto en cualquier semiplano. Por ejemplo, probemos un punto que pertenece al semiplano superior, digamos (4,3);

$$x + 2y > 3$$
$$(4) + 2(3) > 3$$
$$4 + 6 > 3$$
$$10 > 3 \quad \text{(verdadero)}$$

Así, (4,3) pertenece a $\{(x,y) \varepsilon R | x + 2y > 3\}$. Escoja un punto en el semiplano inferior. ¿Sus coordenadas satisfacen la desigualdad?

Concluímos que el semiplano superior, una porción del cual está sombreada, es la gráfica de $x + 2y > 3$. Como es lo usual, indicamos la gráfica de $x + 2y = 3$ por medio de trazos interrumpidos para mostrar que la línea en sí no pertenece a la gráfica de $\{(x,y) \varepsilon R | x + 2y > 3\}$.

Ejemplo 6.

La gráfica de $\{(x,y) \varepsilon R | x + 2y \leq 3\}$ se muestra a continuación en forma sombreada. Observe que la gráfica de $x + 2y = 3$ se muestra como una recta contínua para resaltar el hecho de que esta recta es una parte de la gráfica de $x + 2y \leq 3$.

Explique por qué la gráfica de $\{(x,y) | x + 2y = 3\}$ es un subconjunto propio de la gráfica de $\{(x,y) \varepsilon R | x + 2y \leq 3\}$

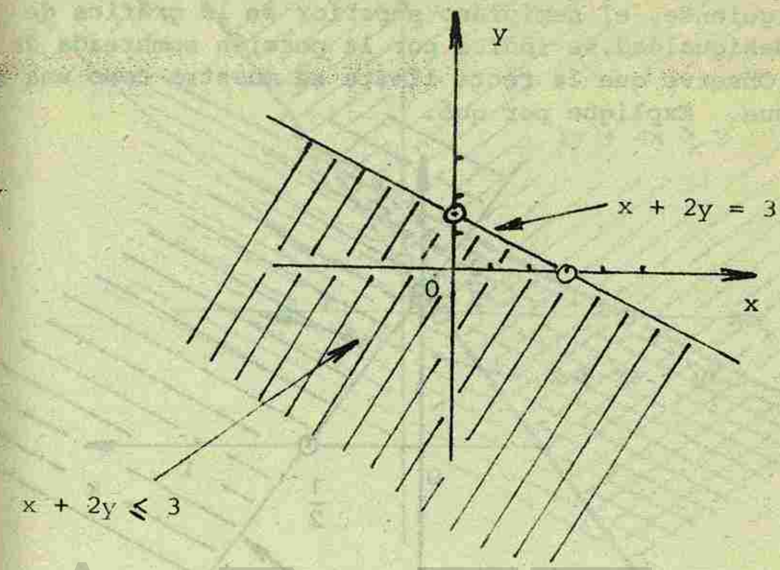


Fig. 6.

Ejemplo 7.

Grafique el conjunto solución de $\{(x,y) \varepsilon R | 3y + 4x \geq 2\}$

Primero graficamos $3y + 4x = 2$ (ver fig. 7). La gráfica de $3y + 4x \geq 2$ es la unión de:

$\{(x,y) \varepsilon R | 3y + 4x > 2\}$ ó $\{(x,y) \varepsilon R | 3y + 4x = 2\}$

para decidir cuál semiplano es la gráfica de $3y + 4x > 2$, probamos un par, digamos (4,1):

$$3y + 4x > 2$$
$$3(1) + 4(4) > 2$$
$$3 + 16 > 2$$
$$19 > 2 \quad \text{(cierto)}$$

Por consiguiente, el semiplano superior es la gráfica de nuestra desigualdad, se indica por la porción sombreada de arriba. Observe que la recta límite se muestra como una recta continua. Explique por qué.

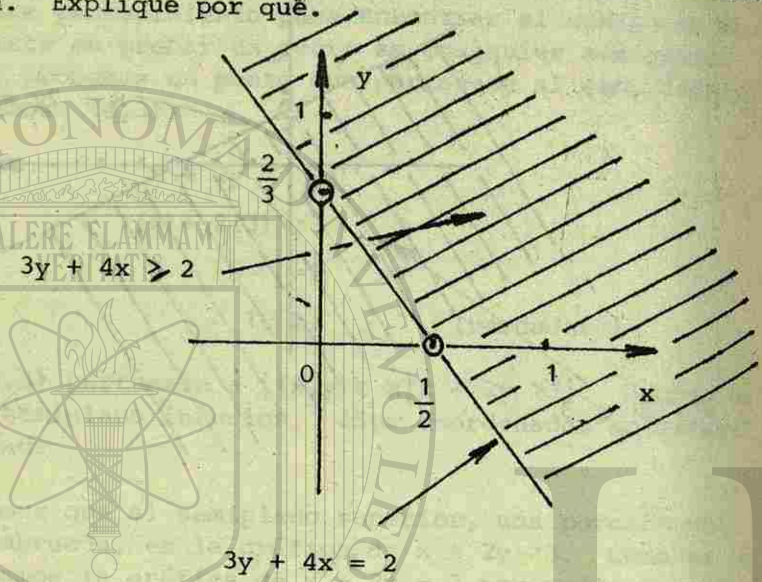


Fig. 7.

Ahora consideraremos la gráfica de un sistema de dos desigualdades lineales en dos variables.

Ejemplo 8.

Grafique el conjunto solución del sistema:

$$x + 2y \leq 3$$
$$3y + 4x \geq 2$$

La porción que está doblemente sobreada (cuadrícula) es la gráfica del conjunto solución del sistema. Diga qué partes de las rectas límites pertenecen a la gráfica. Explique por qué son una parte de la gráfica.

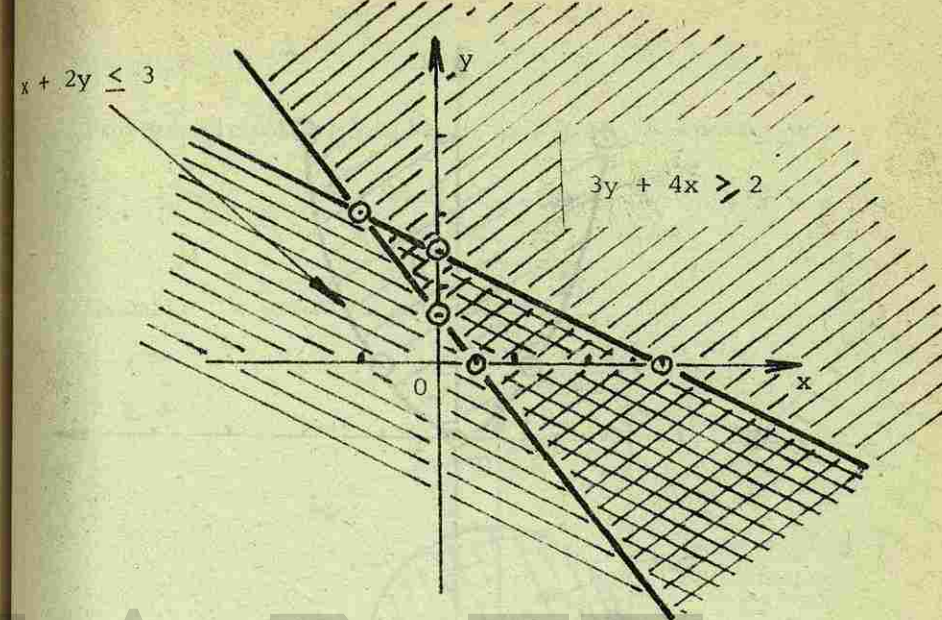


Fig. 8.

El conjunto solución del sistema puede describirse como $\{(x,y) \in R \mid x + 2y \leq 3 \;\text{ y }\; 3y + 4x \geq 2\}$, que es lo mismo que: $\{(x,y) \in R \mid x + 2y \leq 3\} \cap \{(x,y) \in R \mid 3y + 4x \geq 2\}$

Ejemplo 9.

Mediante graficación, hallar el conjunto solución del sistema:

$$y \geq x^2$$
$$x + y \leq -4$$

Primero graficamos $y = x^2$ que es una parábola con vértice en el origen y abriendo sus ramas hacia arriba. La gráfica de $\{(x,y) \mid y \geq x^2\}$ es la unión de la parábola con su área interior representada por la porción sombreada.

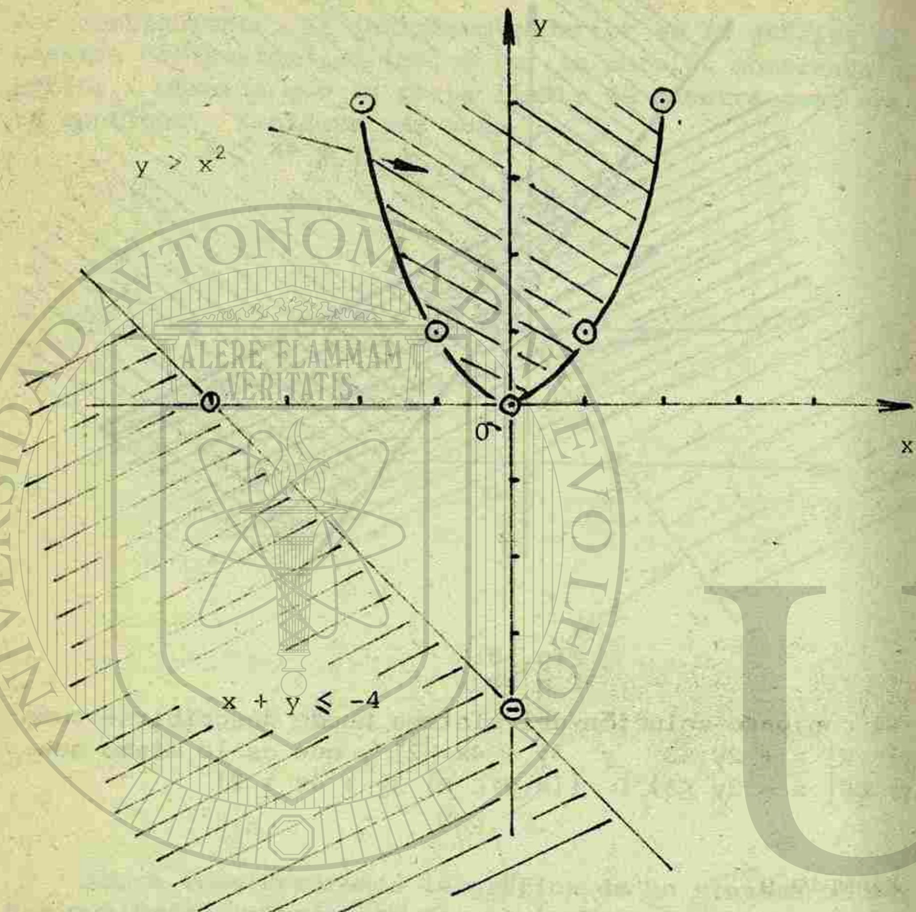


Fig. 9.

La gráfica de $\{(x,y) \in R | x + y \leq -4\}$ es la línea recta ó la parte sombreada abajo de ella. A partir de la gráfica del sistema, es evidente que el conjunto solución del mismo es el conjunto vacío. Tenemos:

$$\{(x,y) \in R | y \geq x^2\} \cap \{(x,y) \in R | x + y \leq -4\} = \phi$$

Ejemplo 10.

Por graficación, halle el conjunto solución de:

$$x^2 + y^2 \leq 9$$
$$x \leq 3$$

Examine la gráfica siguiente:

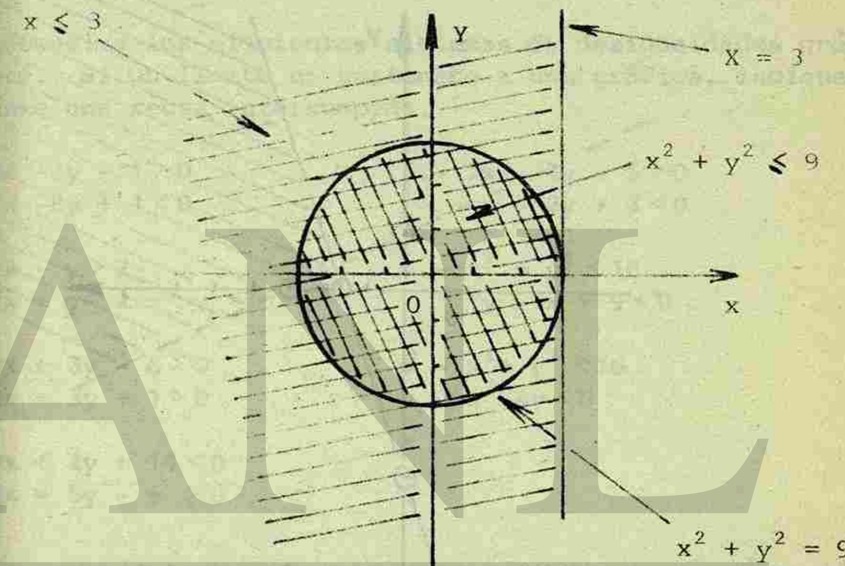


Fig. 10.

Explique por qué es cierto lo siguiente:

$$\{(x,y) \in R | x^2+y^2 \leq 9\} \cap \{(x,y) \in R | x \leq 3\} = \{(x,y) \in R | x^2+y^2 \leq 9\}$$

Aquí la gráfica del conjunto solución es la unión de la circunferencia con el interior del círculo.

Ejemplo 11.

Vea la fig. 8. Escriba en forma de proposición abierta y en notación descriptiva , la porción de área angular sin sombrear limitada por las rectas $x + 2y = 3$ y $3y + 4x = 2$.

Es fácil ver que es: $\{(x,y) \varepsilon R | x+2y \geq 3$ y $3y+4x \leq 2\}$

Ejemplo 12.

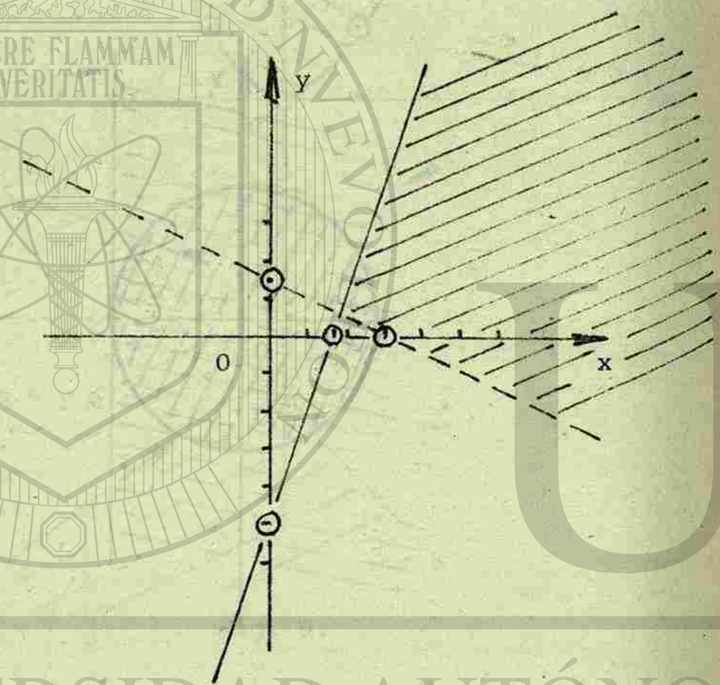


Fig. 11

En la fig. 11, la recta trazada con línea llena está dada por la proposición abierta, $\{(x,y) \varepsilon R | y-3x = -5\}$ y la línea de trazos por, $\{(x,y) \varepsilon R | x+2y = 3\}$

Encuentra la correspondiente al conjunto solución mostrado.

Como el área indicada queda arriba de la recta punteada y abajo de la recta llena, entonces se tiene:

$\{(x,y) \varepsilon R | x+2y > 3$ y $y-3x \leq -5\}$

Compruebe su respuesta examinando un punto en el área concerniente.

AUTOEVALUACIÓN 2.

Resuelve los siguientes sistemas de desigualdades gráficamente. Si un límite no pertenece a una gráfica, indíquelo mediante una recta interrumpida.

1.- $2x - y - 1 > 0$
$x - 8y + 1 < 0$

2.- $2x - y > 2$
$2x + y > 2$

3.- $4x + 3y - 6 > 0$
$4x + 3y + 1 > 0$

4.- $3x + 4y + 14 < 0$
$2x - 5y - 6 > 0$

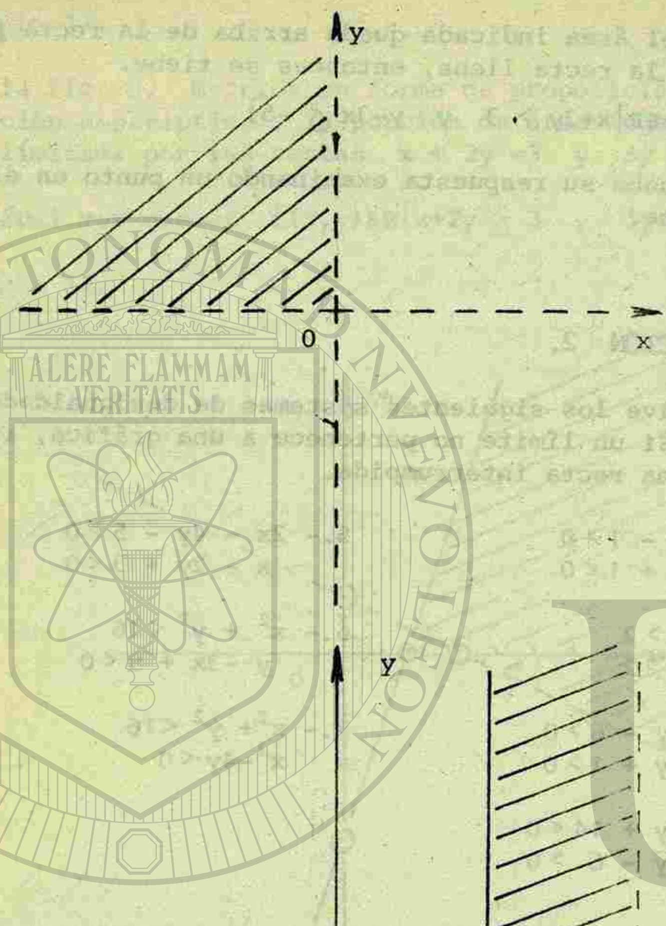
5.- $2x - 4y - 5 > 0$
$x - 2y + 3 < 0$

6.- $x^2 + y^2 < 16$
$y - 3x + 9 < 0$

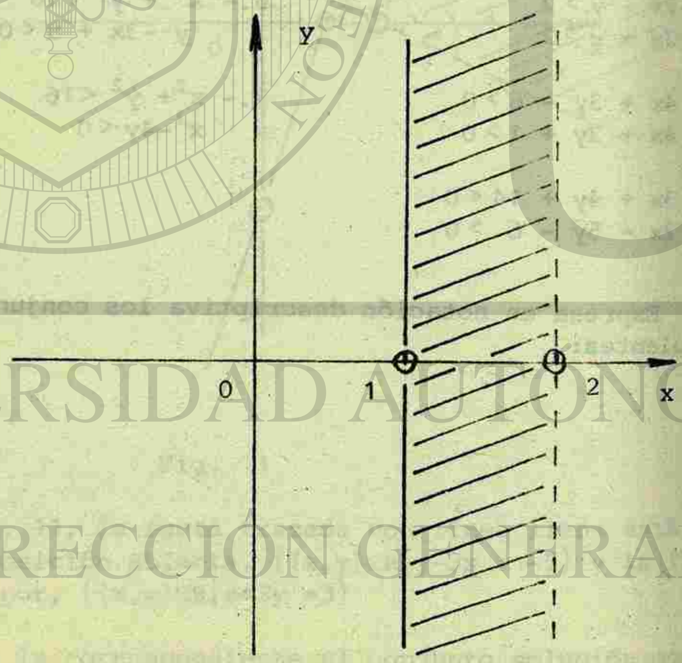
7.- $x^2 + y^2 < 16$
$x^2 - 4y < 0$

Expresa en notación descriptiva los conjuntos solución siguientes:

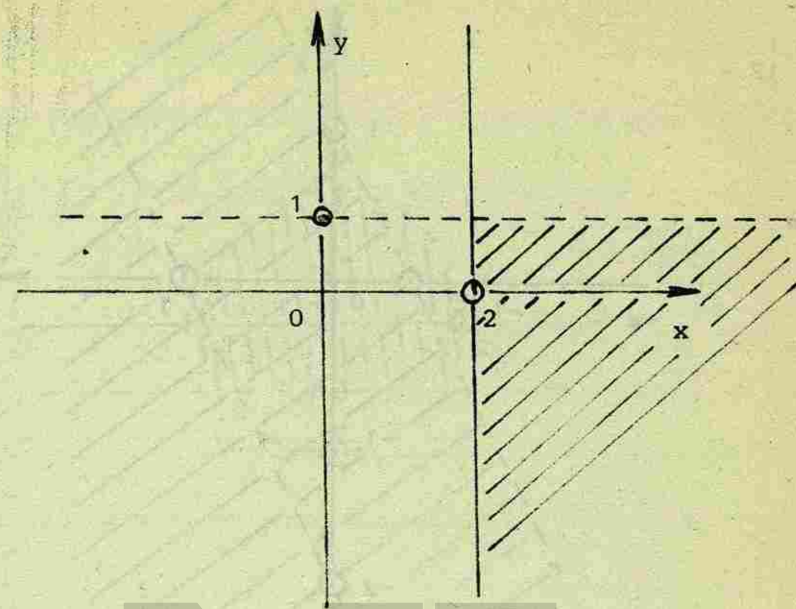
8.-



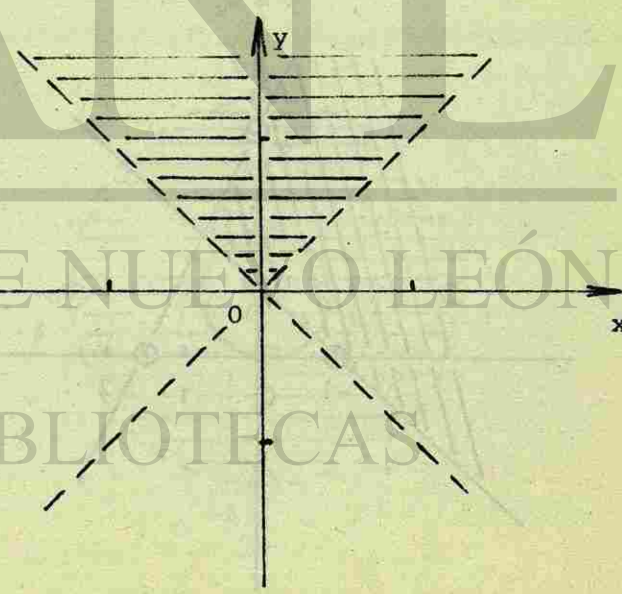
9.-



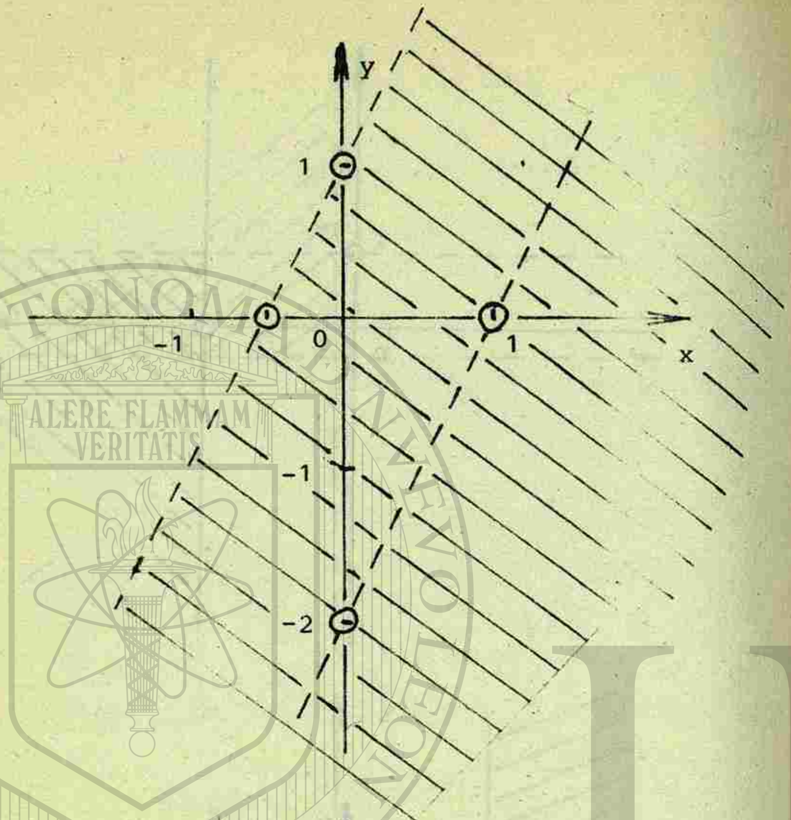
10.-



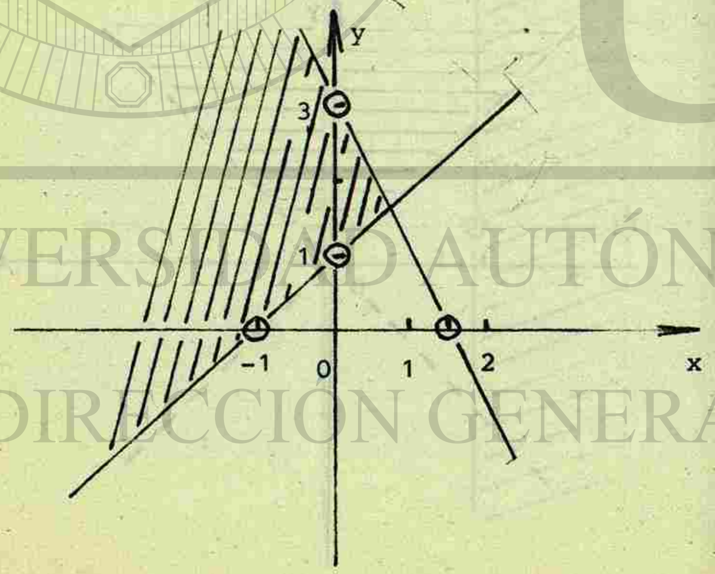
11.-



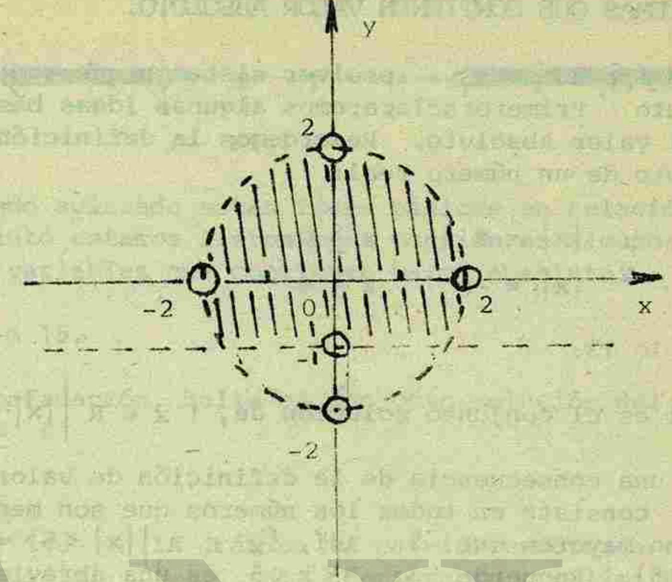
12.-



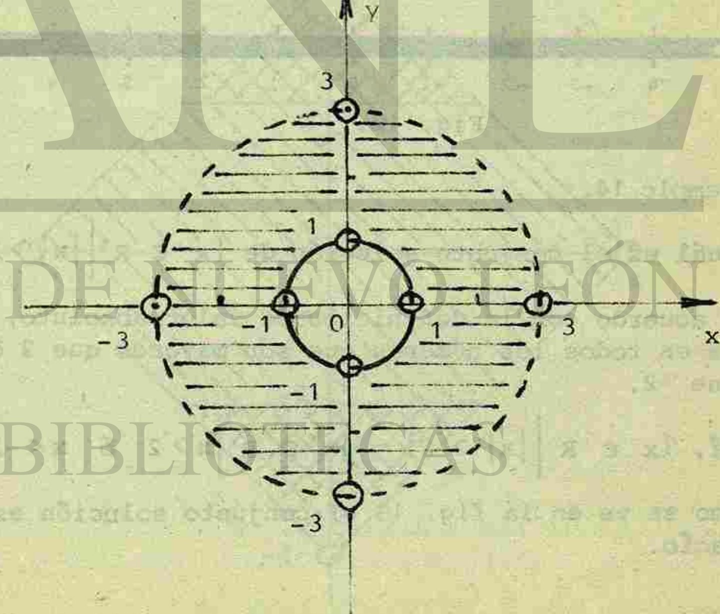
13.-



14.-



15.-



4-10 SISTEMAS QUE CONTIENEN VALOR ABSOLUTO.

Ahora aprenderemos a resolver sistemas que contienen valor absoluto. Primero aclararemos algunas ideas básicas acerca del valor absoluto. Recordemos la definición del valor absoluto de un número real:

$$|x| = x \qquad x \geq 0$$
y
$$|x| = -x \qquad x < 0$$

Ejemplo 13:

¿Cuál es el conjunto solución de, $\{x \in R \mid |x| < 5\}$?

Como una consecuencia de la definición de valor absoluto $|x| < 5$ consiste en todos los números que son menores que 5 y que son mayores que -5. Así, $\{x \in R \mid |x| < 5\} = \{x \in R \mid -5 < x < 5\}$. Recuerde que $-5 < x < 5$ es una abreviatura para $-5 < x$ y $x < 5$.

Sobre la recta numérica, la gráfica de $\{x \in R \mid |x| < 5\}$ es:

Fig. 12

Ejemplo 14.

¿Cuál es el conjunto solución de $\{x \in R \mid |x| > 2\}$.

De acuerdo con la definición de valor absoluto, $|x| > 2$ consiste en todos los números que son mayores que 2 ó son menores que -2.

Así, $\{x \in R \mid |x| > 2\} = \{x \in R \mid x > 2 \text{ ó } x < -2\}$

Como se ve en la fig. 13 el conjunto solución es el conjunto vacío.

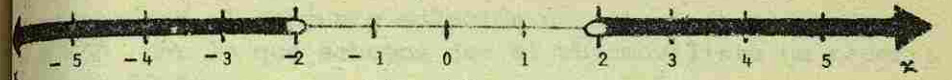


Fig. 13

Habiendo aclarado estas ideas básicas en relación con valor absoluto estamos listos para considerar algunos sistemas en dos variables que contienen valor absoluto.

Ejemplo 15.

Por graficación, halle el conjunto solución del sistema:

$$|x| + |y| \leq 4$$
$$|y| \geq 2$$

Identifique en la gráfica la porción sombreada que es la gráfica de $|x| + |y| \leq 4$. ¿Pertenecen sus límites al conjunto?

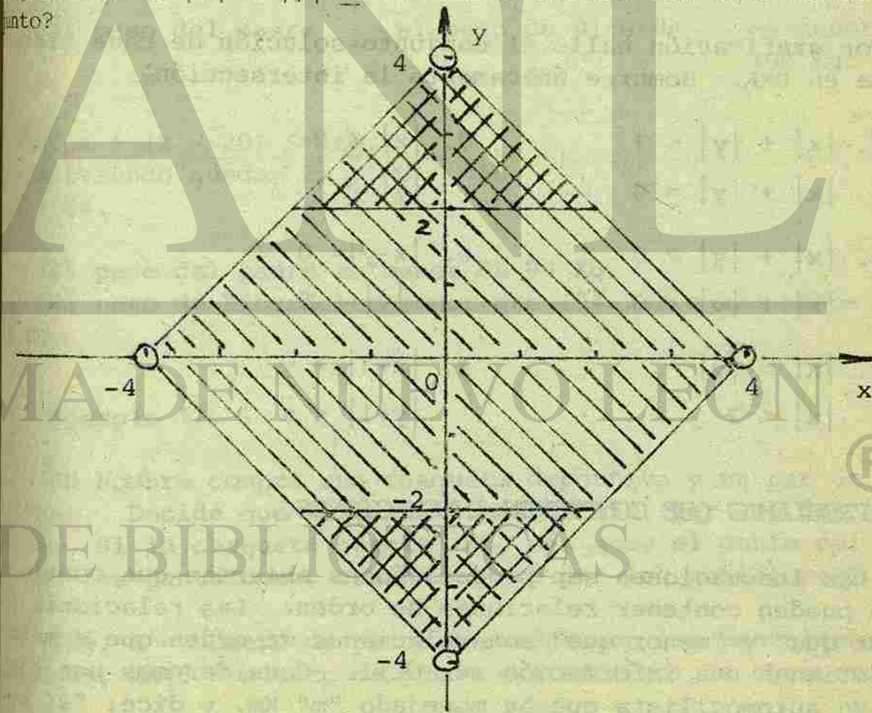


Fig. 14

Identifique la gráfica de $|y| \geq 2$. ¿Pertenecen sus límites a la gráfica?

AUTOEVALUACIÓN 3.

1.- Grafique el conjunto solución de cada uno de los siguientes sistemas sobre una recta numérica separada. Si el conjunto solución es el conjunto vacío, escriba Ø.

a. $|x| < 3$

b. $|x| \leq 0$

c. $|x| > 1$

2.- Para cada conjunto no vacío de los problemas anteriores dé una descripción diferente para ello usando la intersección o la unión de dos conjuntos.

3.- Por graficación halle el conjunto solución de cada sistema en RxR. Sombree únicamente la intersección.

a. $|x| + |y| \leq 1$ d. $|x| \leq 2$
$|x| + |y| = 0$ $|y| > 1$

b. $|x| + |y| > 0$ e. $|x-y| = 0$
$|x| + |y| < 0$ $|y| \leqslant 2$

c. $|x| = |y|$ f. $|x+3| > y$
$|x| < 2$ $|y+1| < x$

4-11 PROBLEMAS QUE CONTIENEN INECUACIONES.

Las inecuaciones son proposiciones abiertas que contienen o pueden contener relaciones de orden. Las relaciones "mayor que" y "menor que" son relaciones de orden que a menudo contienen una información muy útil. Consideremos por ejemplo, un automovilista que ha manejado "m" Km. y dice, "si manejo otros 30 Km, habré hecho más de 80 Km." ¿Cuánto ha manejado ya?. Esta proposición puede traducirse así: $m + 30 > 80$. Si encontramos el conjunto solución de esta inecuación tenemos $m > 50$ por lo que sabemos que el automovilista ha recorrido más de 50 Km.

Supongamos que el automovilista hubiese dicho: "Si manejo 30 Km. más, cuando menos habré recorrido 80 Km." La proposición abierta para esta proposición verbal es, $m + 30 \geq 80$. Consideremos unos cuantos ejemplos:

Ejemplo 16.

Ricardo pesa 20 Kg. menos que su padre. La suma de sus pesos es menor que 168 Kg. ¿Cuánto pesa Ricardo?

Sea, x = peso del padre.
entonces, x-20 = peso de Ricardo.

El peso del padre	+	el peso de Ricardo	es menor que 168 Kg.
x		(x - 20)	

o sea, $x + (x - 20) < 168$.
y resolviendo queda, $2x - 20 < 168$
y, $x < 94$.

El peso del padre es menor de 94 Kg.
El peso de Ricardo es menor que (94-20) o sea menos que 74 Kg.

Ejemplo 17.

Un hombre compra una chaqueta deportiva y un par de pantalones. Decide que no gastará más de \$50. por los dos artículos. Si la chaqueta cuesta \$5. más que, el doble del precio de los pantalones, ¿cuánto gastó por los pantalones?

Sea, x = número de pesos gastados por los pantalones.
entonces, 2x+5 = número de pesos gastados por la chaqueta.

El costo de los pantalones + el costo de la chaqueta no es más de $50.

o sea: $x + (2x + 5) \leq 50$.

resolviendo: $3x + 5 \leq 50$; $x \leq 15$.

Por tanto los pantalones costaron #15. o menos.

Ejemplo 18.

Un comerciante vende unas camisas a $5. y otras camisas a $4. Si vende 12 camisas de $4. más que de las de $5., ¿Cuántas vendió de cada clase si recibió en total un mínimo de $300.?

Sea, x = número de camisas de $5. que vendió.
entonces, $x+12$ = número de camisas vendidas de $4.

Recibido por las de $5. + Recibido por las de $4.

$5x$ $\qquad$ $4(x + 12)$

cuando menos llega a $300.

o sea, $5x + 4(x+12) \geq 300$.

resolviendo: $5x + 4x + 48 \geq 300$; $9x \geq 252$ y, $x \geq 28$.

Por tanto, $x + 12 \geq 28 + 12$.
$x + 12 \geq 40$

El comerciante debe vender cuando menos 28 camisas de $5. y cuando menos 40 camisas de $4.

AUTOEVALUACIÓN 4.

1.- Carolina es tres años mayor que Juanita. La suma de sus edades no llega a 35 años. ¿Cuántos años tiene Juanita?

2.- Un estudiante recibió calificaciones de 86, 75 y 80 en tres pruebas, ¿cuál deberá ser su calificación en una cuarta prueba para que su promedio en las cuatro pruebas sea como mínimo 82?

3.- Los grupos de primero y segundo año de una escuela secundaria convinieron en contribuir cuando menos con $500. para un fondo atlético de la escuela. Si los grupos de 2°. año prometieron contribuir con $40. más que los grupos de primero, ¿cuál es la cantidad mínima que deben poner los grupos de primero?

4.- Una alcancía tiene 15 monedas de a 10 centavos más que monedas de 5 centavos. Si el total de los valores de las monedas es más de $5.55 ¿cuántas monedas de 5 centavos tiene la alcancía?

5.- A un hombre que está pasado de peso le dice su médico que debe perder cuando menos 30 libras en 8 semanas. Si pier de 9 libras durante las primeras dos semanas, ¿cuántas deberá perder por semana en las siguientes seis semanas.?

6.- Un hombre ya retirado de su trabajo encuentra que necesitará más de $500. por año de utilidad de sus inversiones. Invirtió $8000. al 4%. ¿Cuánto necesitará invertir al 5% para llenar sus necesidades?

AUTOEVALUACIÓN DE LA LECCIÓN 2.

Resuelva los siguientes sistemas algebráicamente:

1.- $8 - 3x < 5x - 10$
$2x - 15 < 5$

0) $\{x\varepsilon R | x < 10\}$ 1) $\{x\varepsilon R | x > 9/4\}$ 2) $\{x\varepsilon R | x > 10\}$
3) $\{x\varepsilon R | 9/4 < x < 10\}$ 4) $\{x\varepsilon R | x < 9/4\}$

2.- $7x + 50 > 10 - 3x$
$7x + 4 < 2x - 6$

0) $\{x\varepsilon R | x < -4\}$ 1) $\{x\varepsilon R | x > -2\}$ 2) $\{x\varepsilon R | -4 < x < -2\}$
3) $\{x\varepsilon R | x > -4\}$ 4) $\{x\varepsilon R | x < -2\}$

3.- $|3x - 4| \leq 5$

0) $\{x \in R \mid x \leq -1/3\}$ 1) $\{x \in R \mid x \geq 3\}$ 2) $\{x \in R \mid x \leq 3\}$

3) $\{x \in R \mid -1/3 \leq x \leq 3\}$ 4) Ninguna.

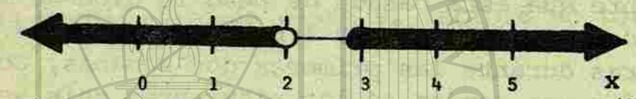
Exprese las siguientes gráficas en notación descriptiva.

4.-

0) $\{x \in R \mid 2 < x < 3\}$ 1) $\{x \in R \mid x > 3\}$ 2) $\{x \in R \mid x \leq 3 \text{ ó } x \geq 2\}$

1) $\{x \in R \mid 2 \leq x \leq 3\}$ 4) $\{x \in R \mid x < 2\}$

5.-

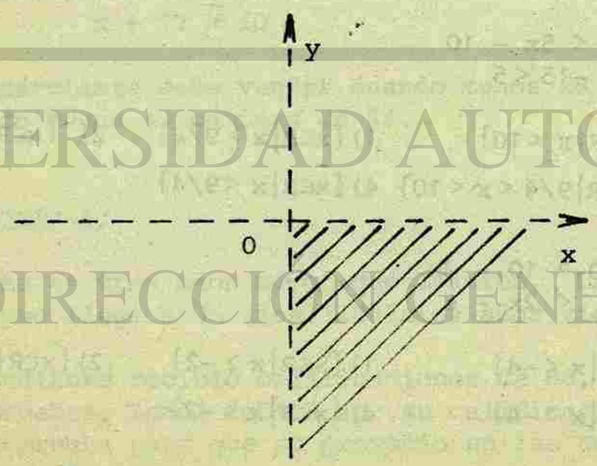


0) $\{x \in R \mid 2 < x \leq 3\}$ 1) $\{x \in R \mid 2 \leq x < 3\}$ 2) $\emptyset$

3) $\{x \in R \mid x \geq 3 \text{ y } x < 2\}$ 4) $\{x \in R \mid x \geq 3 \text{ ó } x < 2\}$

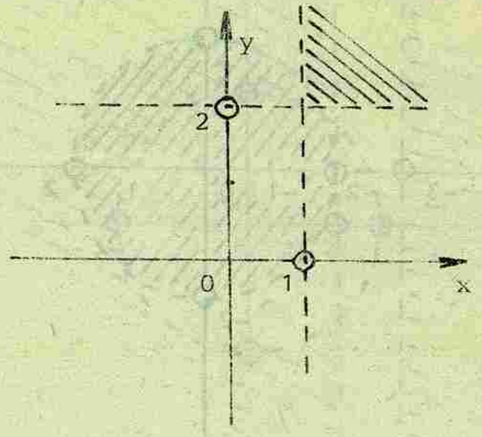
Dadas las siguientes gráficas encuentra el conjunto solución del sistema de desigualdades en forma descriptiva.

6.-



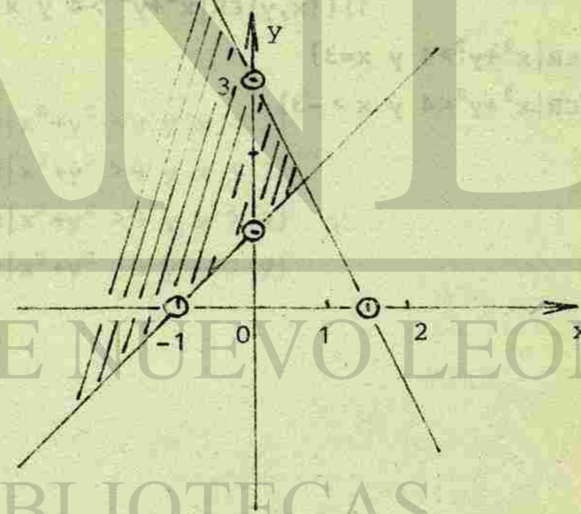
0) $\{(x,y) \in R \mid x > 0 \text{ y } y < 0\}$ 1) $\{(x,y) \in R \mid x \leq 0\}$

2) $\{(x,y) \in R \mid y > 0 \text{ y } x < 0\}$ 3) $\{(x,y) \in R \mid y \geq 0\}$



0) $\{(x,y) \in R \mid x < 1 \text{ y } y > 2\}$ 1) $\{(x,y) \in R \mid x > 1 \text{ y } y > 2\}$

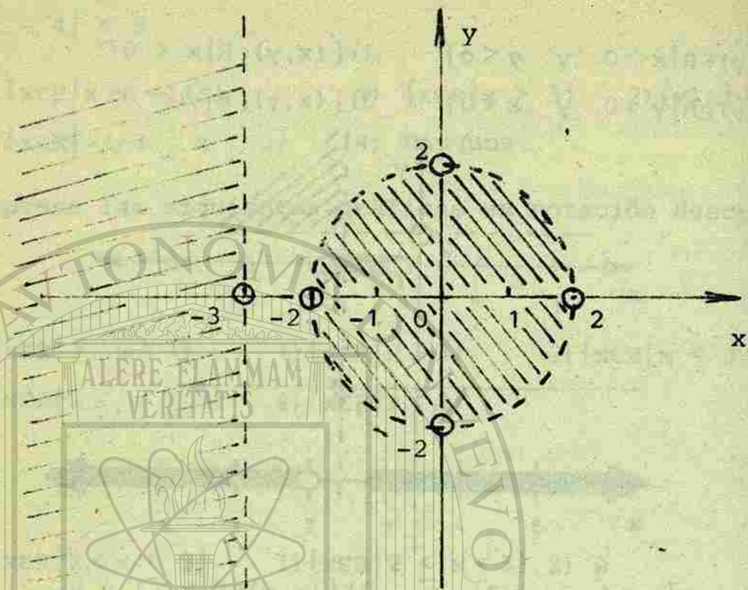
2) $\{(x,y) \in R \mid x > 2 \text{ y } y > 1\}$ 3) $\{(x,y) \in R \mid x < 1 \text{ y } y < 2\}$



0) $\{(x,y) \in R \mid 2x+y \geq 3 \text{ y } y-x \geq 1\}$ 1) $\{(x,y) \in R \mid 2x+y \geq 3 \text{ y-x } \leq 1\}$

1) $\{(x,y) \in R \mid 2x+y \leqslant 3 \text{ y } y-x \geqslant 1\}$ 2) $\{(x,y) \in R \mid x+2y \leq 3 \text{ y } x \leq 1\}$

9.-



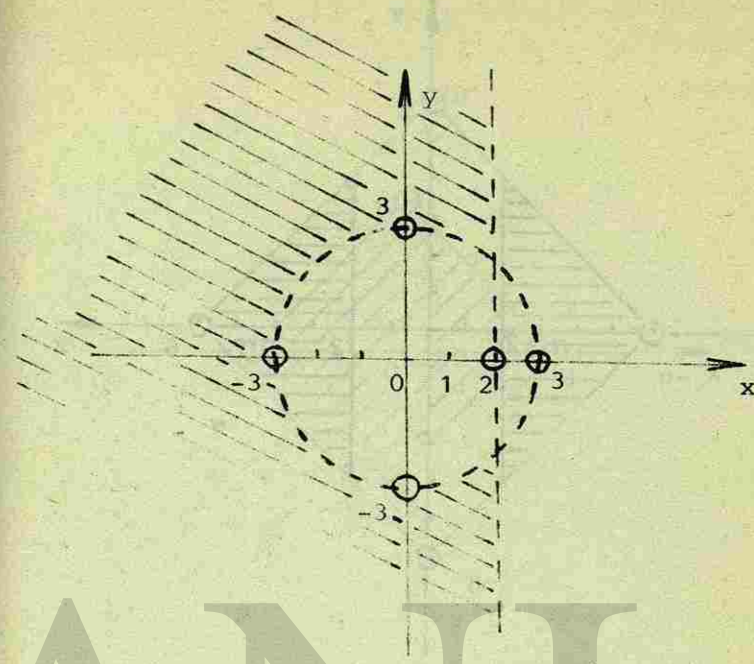
0) $\varnothing$

1) $\{(x,y)\in R \mid x^2+y^2>4 \text{ y } x<-3\}$

2) $\{(x,y)\in R \mid x^2+y^2>4 \text{ y } x=3\}$

3) $\{(x,y)\in R \mid x^2+y^2<4 \text{ y } x>-3\}$

10.-



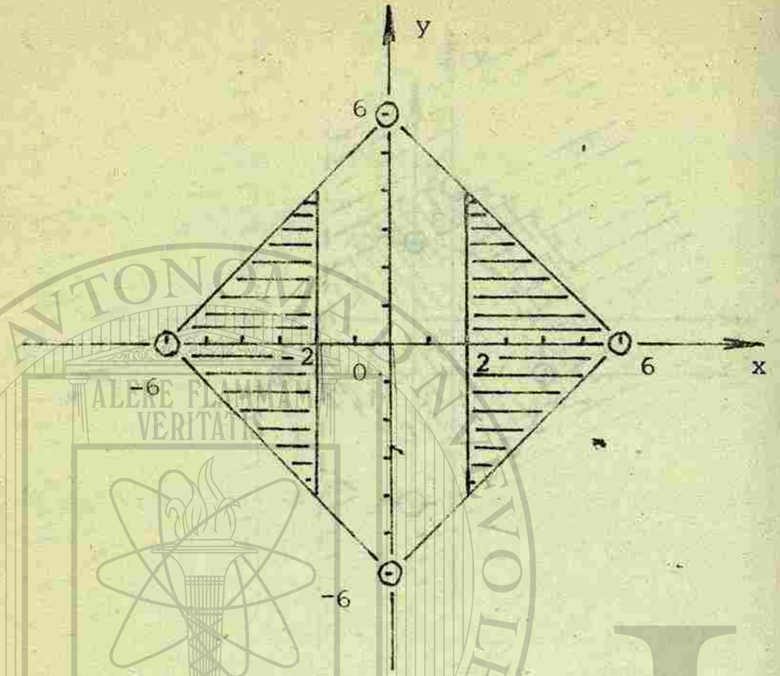
0) $\{(x,y)\in R \mid x^2+y^2<9 \text{ y } x>2\}$

1) $\{(x,y)\in R \mid x^2+y^2>9 \text{ y } x<2\}$

2) $\{(x,y)\in R \mid x^2+y^2>9 \text{ y } x>2\}$

3) $\{(x,y)\in R \mid x^2+y^2>9 \text{ y } y>2\}$

11.-



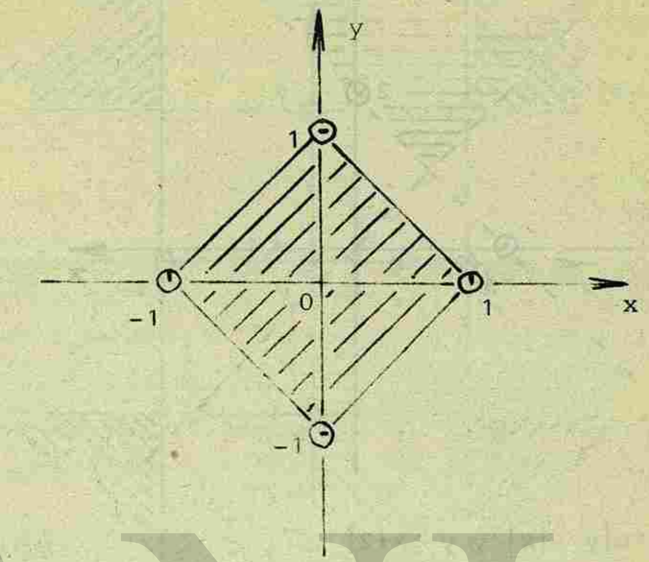
0) $\{(x,y) \in R \mid |x|+|y| \leq 6 \text{ y } |x| \leq 2\}$

1) $\{(x,y) \in R \mid |x| \leq 6 \text{ y } x \geq 2\}$

2) $\{(x,y) \in R \mid |x|+|y| \leq 2 \text{ y } |x| \geq 6\}$

3) $\{(x,y) \in R \mid |x|+|y| \leq 6 \text{ y } |x| \geq 2\}$

12.-



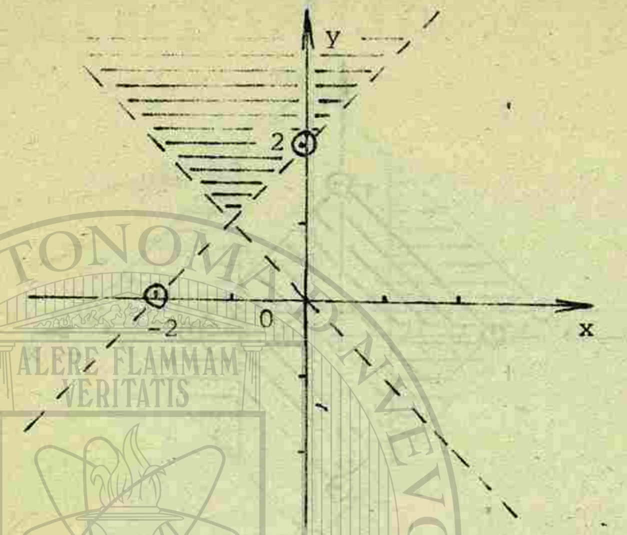
0) $\{(x,y) \in R \mid |x|+|y| \geq 1 \text{ y } |x|+|y|=1\}$

1) $\{(x,y) \in R \mid |x|+|y| \leq 1\}$

2) $\{(x,y) \in R \mid |x|+|y| < 1 \text{ y } |x|+|y|=0\}$

3) $\{(x,y) \in R \mid x+y \geq 1\}$

13.-



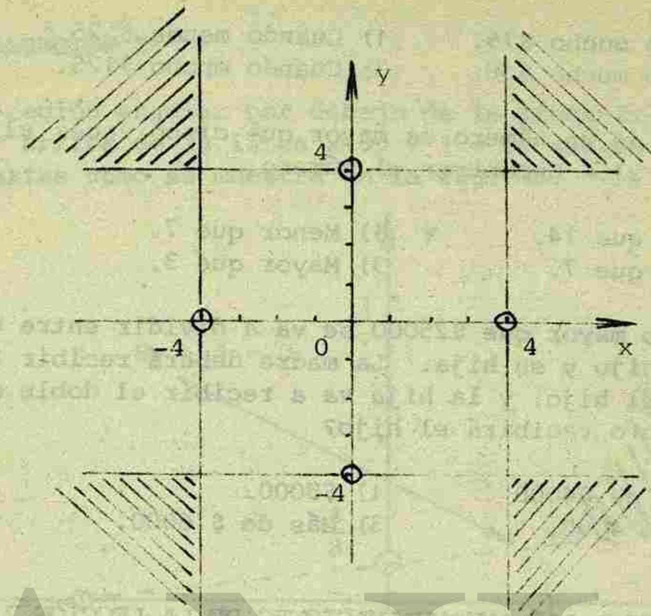
0) $\{(x,y)\varepsilon R | y < |x| \text{ y } y > x+2\}$

1) $\{(x,y)\varepsilon R | y < |x| \text{ y } y > |x|\}$

2) $\{(x,y)\varepsilon R | y > -x \text{ y } y > x+2\}$

3) $\{(x,y)\varepsilon R | y > |x| \text{ y } y < x+2\}$

4.-



0) $\{(x,y)\varepsilon R | y \geq 4 \text{ y } x \geq 4\}$

1) $\{(x,y)\varepsilon R | |y| \geq 4 \text{ y } |x| \geq 4\}$

2) $\{(x,y)\varepsilon R | |y| \leq 4 \text{ y } |x| \geq 4\}$

3) $\{(x,y)\varepsilon R | |y| \leq 4 \text{ y } |x| \leq 4\}$

Resuelva los siguientes problemas de planteo:

5.- La suma de dos números consecutivos impares es menor de 80. ¿Cuál es el mayor de estos números?

0) Cuando mucho 43. 1) Menos de 41.
2) Cuando mucho 39. 3) Cuando menos 39.

6.- Pedro dijo: "Si tuviera cuando mucho cinco veces de lo que tengo ahora en mi cuenta de ahorros, tendría cuando menos \$100. más de lo que tengo". ¿Cuánto tiene Pedro en su cuenta?

0) Cuando mucho \$75.   1) Cuando menos \$ 25.
2) Cuando mucho \$50.   3) Cuando mucho \$125.

17.- El doble de un número es mayor que cinco veces el número, menos 21. Encontrar el número.

0) Menor que 14.   1) Menor que 7.
2) Mayor que 7.   3) Mayor que 3.

18.- Un legado mayor que \$25000 se va a dividir entre una madre, su hijo y su hija. La madre deberá recibir \$9000 más que el hijo, y la hija va a recibir el doble del hijo. ¿Cuánto recibirá el hijo?

0) Menos de \$4000   1) \$8000.
2) Más de 4000.   3) Más de \$16000.

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DE LA LECCION 2

AUTOEVALUACIÓN 1.

1.- $\{x \in R \mid -1 < x < 3\}$

2.- $\{x \in R \mid -1 < x < 2\}$

3.- No hay solución o el conjunto vacío ϕ.

4.- $\{x \in R \mid +1 < x < 5\}$

5.- $\{x \in R \mid 2 < x < 7\}$

6.- $\{x \in R \mid -9/5 \leq x \leq 3\}$

7.- $\{x \in R \mid x \leq -1\}$

8.- $\{x \in R \mid x > -1 \text{ ó } x < -2\}$

9.- $\{x \in R \mid 3 < x < 9\}$

10.- $\{x \in R \mid -4 < x \leq -1\}$

AUTOEVALUACION 2.

1.- La región angular por debajo de la línea $2x-y-1 = 0$ y por arriba de la línea $x-8y + 1 = 0$, sin considerar los límites como se muestra en la fig. 15.

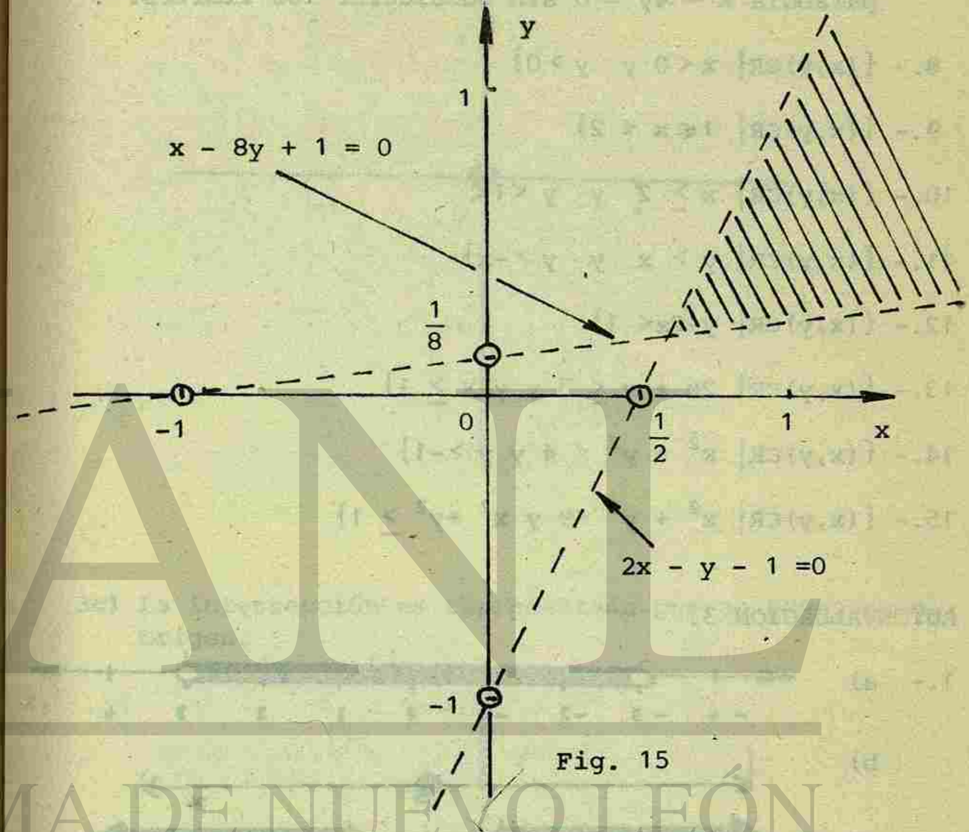


Fig. 15

2.- La región debajo de la línea $2x-y = 2$ y arriba de la línea $2x + y = 2$ sin considerar los límites.

3.- La región arriba de la línea $4x + 3y - 6 = 0$ sin considerar el límite.

4.- La región angular debajo de la línea $3x + 4y + 14 = 0$ y también debajo de la línea $2x - 5y - 6 = 0$ sin considerar los límites.

5.- No hay solución, ó el conjunto vacío.

6.- La región dentro del círculo $x^2 + y^2 = 16$ y debajo de la línea $y - 3x + 9 = 0$ sin considerar los límites.

7.- La región dentro del círculo $x^2 + y^2 = 16$ y dentro de la parábola $x^2 - 4y = 0$ sin considerar los límites.

8.- $\{(x,y) \varepsilon R \mid x < 0 \text{ y } y > 0\}$

9.- $\{(x,y) \varepsilon R \mid 1 \leq x < 2\}$

10.- $\{(x,y) \varepsilon R \mid x \geq 2 \text{ y } y < 1\}$

11.- $\{(x,y) \varepsilon R \mid y > x \text{ y } y > -x\}$

12.- $\{(x,y) \varepsilon R \mid y - 2x < 1\}$

13.- $\{(x,y) \varepsilon R \mid 2x + y \leq 3 \text{ y } y - x \geq 1\}$

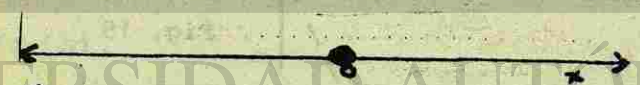
14.- $\{(x,y) \varepsilon R \mid x^2 + y^2 < 4 \text{ y } y > -1\}$

15.- $\{(x,y) \varepsilon R \mid x^2 + y^2 < 9 \text{ y } x^2 + y^2 \geq 1\}$

AUTOEVALUACION 3.

1.- a)

b)



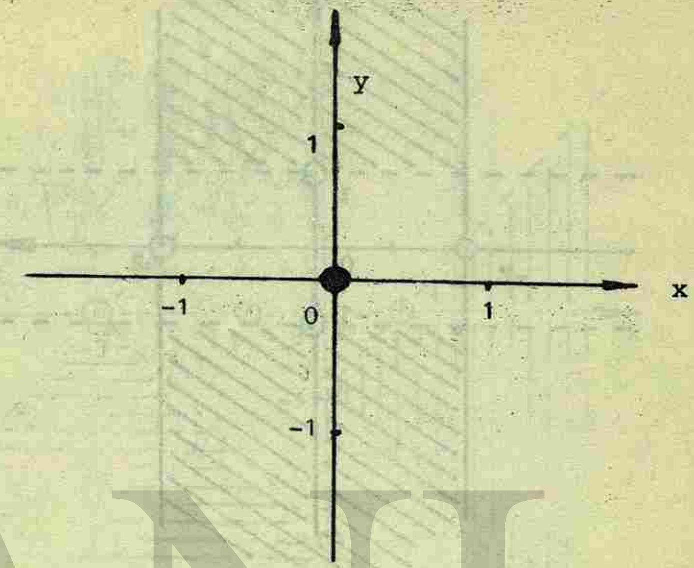
c) Ø

2.- a) $\{x \; \varepsilon \; R \mid -3 < x < 3\}$

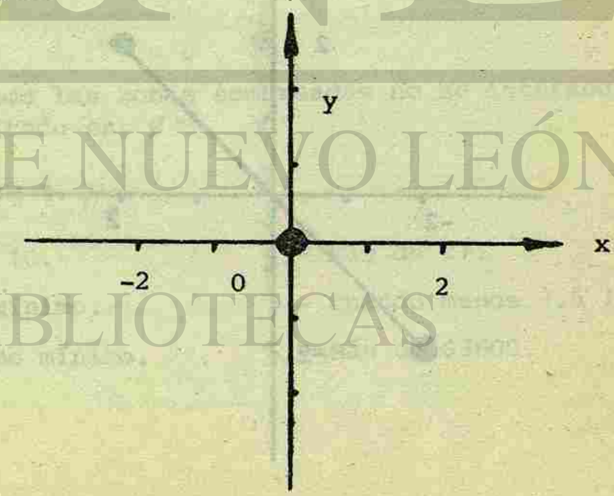
b) $\{x \; \varepsilon \; R \mid x \leq 0 \text{ y } x > 0\}$

c) $\{x \; \varepsilon \; R \mid x > 1 \text{ ó } x < -1\}$

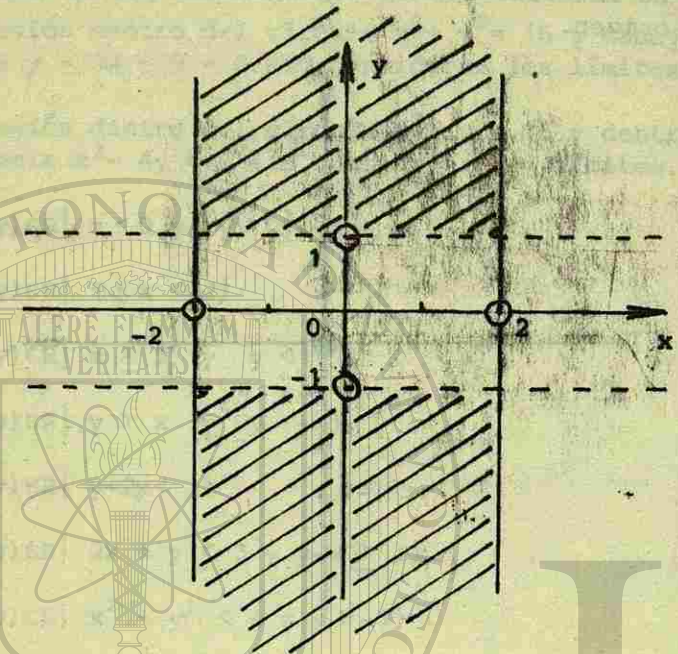
3a) La intersección es representada por un punto en el origen.



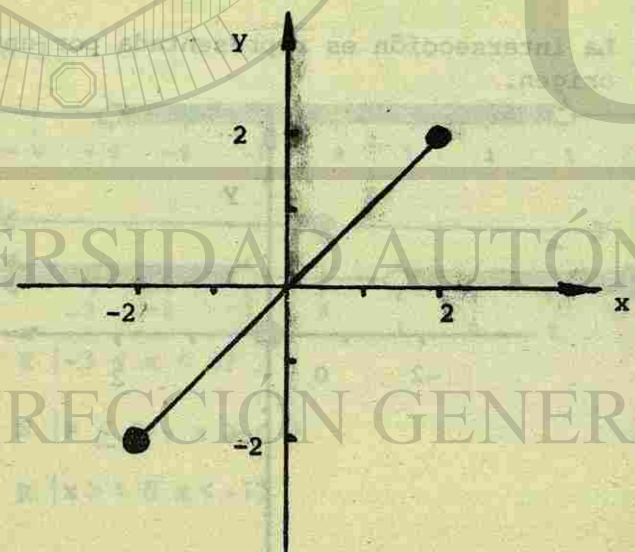
3c) La intersección es representada por un punto en el origen.



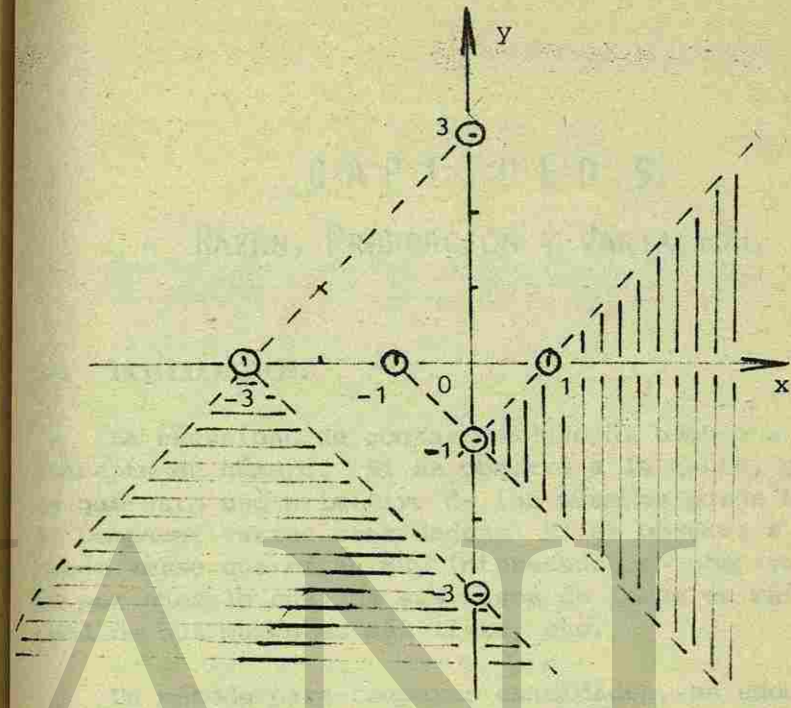
3d)



3e)



3f)



Como las zonas sombreadas no se intersectan el resultado es, Ø

AUTOEVALUACION 4.

1.- Menor de 16.

2.- 87 como mínimo.

3.- $ 230 como mínimo.

4.- Más de 27.

5.- Cuando menos 3.5 libras.

6.- Más de $3600.

CAPITULO 5.

RAZÓN, PROPORCIÓN Y VARIACIÓN.

5-1 INTRODUCCIÓN.

La necesidad de contar condujo al hombre a inventar el concepto de número. Si se observa a la gente, puede pensarse que otro uso primitivo de los números puede haber sido el de comparar varias cantidades. Si se observa a dos niños, puede verse que están muy interesados en comparar cosas, como por ejemplo cuál de sus vasos de leche es más grande, cuál de sus mamás es más lista, etc.

Un método para comparar cantidades, es encontrar la diferencia entre las dos cantidades. Por ejemplo, si una persona tiene 22 años y otra tiene 33, la diferencia en sus edades es 11 años. Por lo tanto, se puede decir que la primera persona es 11 años más joven que la segunda, que la segunda es 11 años mayor que la primera.

Un segundo método para comparar estas dos mismas edades, sería el de decir que una persona tiene 2/3 de la edad de la otra. Cuando se comparan cantidades por este método, se está usando el concepto de *razón*. En efecto, estamos diciendo que por cada dos años de vida de la persona más joven, la persona mayor ha tenido tres años de vida. Podríamos decir que la *razón* en años de la edad de la primera persona a la edad de la segunda persona es 2 a 3.

Usando símbolos se puede escribir la *razón* de sus edades como $\frac{2}{3}$, 2:3, 2/3, ó 2÷3.

La *razón* de dos cantidades semejantes de define como el cociente de la primera cantidad dividida entre la segunda. Hay que notar que este cociente se expresa usualmente en sus términos más simples. Así, la *razón* de 20 a 50 se escribe como 2:5 no como 20:50

5-2 RAZÓN.

La *razón* de 15 días a 35 días puede expresarse como $\frac{3}{7}$, 3 : 7 ó 3/7. Generalmente se establece la siguiente definición.

Definición 1:

Si "a" es una cantidad expresada en alguna unidad de medida y "b" alguna cantidad expresada en la misma unidad de medida, entonces la razón de "a" a "b" es el cociente $\frac{a}{b}$.

Como ya hemos visto, hay tres formas de escribir la razón de "a" a "b": $\frac{a}{b}$, a:b y a÷b. Note que la *razón* de dos cantidades, se define solo si las unidades de medida son las mismas, pero estas unidades no se tienen que incluir en la forma final de la razón. Así, en el caso del primer ejemplo acerca de la razón de dos edades, ambas se dieron en años, pero la razón de las edades fué simplemente 2 : 3.

Ejemplo 1.

Seleccione una de las tres respuestas dadas a continuación, para completar la siguiente proposición. Una *razón* es:

a) El cociente de dos cantidades.

b) La diferencia entre dos cantidades semejantes.

c) El cociente de dos cantidades semejantes.

La elección de (c) es correcta, porque incluye las dos ideas de cociente y cantidades semejantes. Esto es importante. Nos dice por ejemplo, que la razón de 3 días a una semana puede encontrarse transformado la semana en 7 días y escribiendo la razón como 3:7, lo cual se puede hacer ya que las unidades son las mismas.

Hemos definido una *razón* como el *cociente de dos cantidades semejantes*. Sin embargo, con frecuencia encontrará una razón expresada entre dos cantidades que son completamente diferentes en unidades de medida. Por ejemplo, la velocidad (V) se puede expresar como la razón de la distancia (d) al tiempo (t):

$$V = \frac{d}{t}$$

si "a" y "b" no representan cantidades de la misma especie, la razón a : b representa simplemente una porción de "a" que corresponde a una unidad "b" , como una milla por hora.

AUTOEVALUACIÓN 1.

Escriba en su forma más simple la razón de lo siguiente:

1.- 7 docenas a 6 docenas.

2.- 3 yardas a 7 pies.

3.- 85 libras por pulgada cuadrada a 150 libras por pulgada cuadrada.

4.- 36 pies cuadrados a 3 yardas cuadradas.

5.- 25 galones a 50 galones.

6.- 15 días a 36 cuartos de galón.

7.- 12 libras a 36 yardas.

8.- 45 monedas de 10 centavos a 12 monedas de veinticinco centavos.

9.- 18°F a 30°F (F indica grados Fahrenheit)

10.- 3 pies cúbicos a 1 yarda cúbica.

5-3 PROPORCIÓN.

Ya has trabajado lo suficiente con razones, como para comprender algo acerca de ellas. Se adelantará más en su uso y formación cuando empieces a trabajar con *proporciones*. Esto es cierto porque una *proporción* es solamente una proposición en la cual una razón es igual a otra razón. Así, 1/2 = 3/6 ó 1:2 = 3:6 es una *proporción*.

Definición 2.

Si a/b y c/d son razones iguales, entonces a/b = c/d es una *proporción*; la forma a:b = c:d se usa también frecuentemente.

EJEMPLO 2.

¿Cuáles de las siguientes parejas de razones se pueden usar para formar una proporción verdadera?

a) 2/3 y 3/4 **b)** 3/4 y 6/8

c) 2/7 y 6/21 **d)** 3/7 y 5/9

respuesta: (b) y (c).

El alumno debe aprender a identificar una proporción cuando la vea y estar capacitado para encontrar algún valor que haga de la proporción una proposición verdadera. Si falta un término de una proporción, puede encontrarse frecuentemente por inspección. Sin embargo, ya que no todas las proporciones se pueden resolver tan fácilmente, necesitamos aprender algo sobre los métodos de solución.

Un punto importante que se debe recordar, es que una proporción es una ecuación. En consecuencia, todas las reglas de las ecuaciones se pueden usar para encontrar los términos faltantes en las proporciones. También, ya que las razones son fracciones, todas las reglas relacionadas con las fracciones se pueden aplicar. Todo lo quenecesitas aprender, son unos cuantos nombres especiales y algunas propiedades importantes de las proporciones.

En la proporción a:b = c:d (que se lee "a" es a "b" como "c" es a "d"), las letras a, b, c, d, se llaman primer término, segundo término, tercer término y cuarto término, respectivamente. Los términos "a" y "d" se llaman los *extremos* (porque son los más apartados) y "b" y "c" se llaman los *medios* (porque son los términos intermedios). En la proporción 5:7 = 10:14, los extremos son ____ y ____ y los me- -

dios son ____ y ____.

Una de las propiedades básicas de una proporción, es que el producto de los *extremos* es igual al producto de los *medios*. Esta idea se puede expresar algebraicamente como sigue:

TEOREMA.

Si b y d $\neq$ 0 y si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces a.d = b.c

DEMOSTRACIÓN:

Hipótesis: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$b \neq 0$

$d \neq 0$

Por demostrar: a.d = b.c

Si multiplicamos ambos miembros de la hipótesis por "d" tenemos:

$$\frac{a.d}{b} = c$$

luego, si multiplicamos ambos miembros por "b" queda:

$$a.d = b.c$$

AUTOEVALUACIÓN 2.

Contesta las siguientes preguntas:

1.- En la proporción 2:7 = 3:x, el producto de los extremos es ____ y el producto de los medios es ____.

2.- Si 3:x = 4:7 es una proporción. Entonces, 4x= ____.

3.- Si n:a = c:r, es una proporción. Entonces, ____ = nr

Resuelva las siguientes proporciones para la incógnita.

4.- 2:3 = a:18

5.- 1/2: e = 3: 3/4

6.- (f-3):4 = (f+3):3

Utilizando proporciones resuelva los siguientes problemas:

7.- Si en un mapa, 1 pulgada equivale a 24 millas y una población aparece en un rectángulo de 2 3/8 de pulgada por 1 3/4 de pulgada. ¿Cuál es el área de la población en millas cuadradas?

8.- ¿Qué longitud representan 14 3/5 pies en un dibujo a escala, si la escala es 5/8 de pulgada igual a 1 pie?

3-4 VARIABLES INDEPENDIENTES Y DEPENDIENTES.

Con frecuencia se observa en problemas cotidianos que el concepto de función está íntimamente relacionado con la idea de variación; para interpretar tal situación, veamos los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 3.

Conocida la fórmula del movimiento uniforme,

$$d = vt$$

si consideramos que la velocidad del móvil es de 30 Km por hora y ésta se mantiene constante, es fácil calcular las distancias recorridas en ciertos tiempos.

Si t = 1 hora; d = 30 x 1 = 30 Km.

Si t = 2 horas; d = 30 x 2 = 60 Km.

Si t = 3 horas; d = 30 x 3 = 90 Km.

¿Qué ocurre? Podemos afirmar que la distancia recorrida depende o está en función del tiempo empleado en recorrerlo.

EJEMPLO 4.

Conocida la fórmula para calcular el área del círculo,

$$A = \pi r^2$$

si aceptamos que la constante π es igual a 3.14 resulta sencillo calcular el área de un círculo cuando se conoce su radio.

Si r = 1 cm $A = 3.14 \times (1)^2 = 3.14\ cm^2$

Si r = 2 cm $A = 3.14 \times (2)^2 = 12.56\ cm^2$

Si r = 3 cm $A = 3.14 \times (3)^2 = 28.26\ cm^2$

¿Que ocurre con las areas de los círculos? Podemos afirmar que el área de un círculo depende o está en función de la longitud de su radio.

Definición 3.

Una variable independiente es la que puede sustituirse en una función por cualquier elemento del dominio de la función.

Definición 4.

Una variable dependiente es la que puede sustituirse en una función por cualquier elemento del contradominio de la función.

5-5 PROPORCIONALIDADES DIRECTA E INVERSA.

Consideremos que tenemos los antecedentes necesarios para interpretar las proporcionalidades directa e inversa como funciones.

EJEMPLO 5.

Supongamos que estamos viajando a velocidad constante de 0 Km por hora. Entonces es fácil advertir que existe una correspondencia entre el espacio o distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrer dicha distancia.

a t_1 = 1 hora le corresponde, d_1= 40 Km.

a t_2 = 2 horas le corresponde, d_2= 80 Km.

a t_3 = 3 horas le corresponde, d_3= 120 Km.

a t_x = x horas le corresponde, d_y = y Km.

En tal correspondencia puede observarse que a un tiempo doble le corresponde una distancia doble, a un tiempo triple, le corresponde una distancia triple, y así sucesivamente. Nos podríamos preguntar, ¿esta correspondencia entre los tiempos y las distancias será una función? La respuesta es afirmativa; lo que debe hacerse para una mayor precisión es dar la terna que constituye la función.

Dominio: Conjunto A de todas las medidas del tiempo a emplear.

Contradominio: Conjunto B de todas las distancias por recorrer.

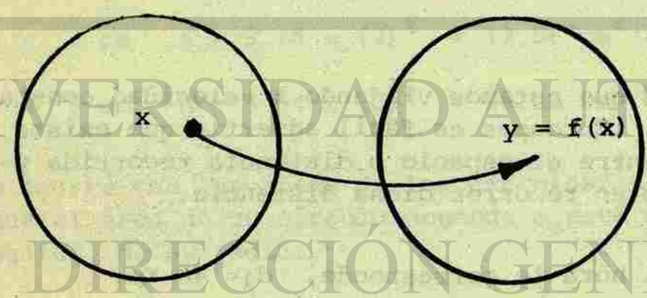


Fig. 1.

Si empleamos la notación de funciones para este caso, tendremos:

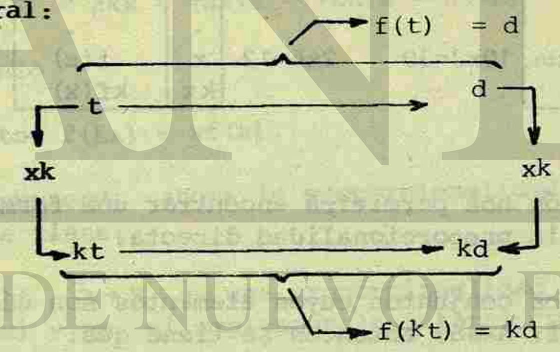
$$f : A \to B$$

$$f(t) = d$$

elemento del dominio ← → imagen correspondiente

Sabemos también que tal función tiene una propiedad básica; si **multiplicamos** un tiempo "t" por un número "k", la distancia correspondiente resulta multiplicada por dicho número.

En general:



Al sustituir d = f(t) en la expresión, f(kt) = kd, se **tiene:**

$$f(kt) = k\ f(t)$$

que es la fórmula fundamental de la proporcionalidad directa.

Definición 5:

Si A y B son dos conjuntos cuyos elementos son números, y se tiene una función de A en B, dicha función es una proporcionalidad directa de A en B si para cada elemento $x \in A$ y cada número "k", tal que $kx \in A$, se cumple la igualdad:

$$f(kx) = kf(x)$$

Podemos interpretar tal definición en dos tabulaciones:

	x	f(x) = y	
	1	5	
	2	10	
k=3	3	15	k=3
	4	20	
	5	25	
	6	30	
	.	.	
	.	.	
	.	.	
2x3=6	x	f(x)	10x3=30
	kx	kf(x)	

	x	f(x) = y	
	2	1	
	6	3	
k=6	8	4	k=6
	10	5	
	12	6	
	20	10	
	.	.	
	.	.	
	.	.	
2x6=12	x	f(x)	1x6=6
	kx	kf(x)	

Esta definición nos permitirá encontrar una forma general para expresar la proporcionalidad directa.

Sean A y B dos conjuntos cuyos elementos son números, con la condición, $f: A \to B$; entonces se tiene que:

1.- Si para toda $x \in A$ se verifica que $f(x) = ax$, siendo "a" una constante, entonces "ax" es la regla de una proporcionalidad directa.

2.- Si $P: a \in B$ es una proporcionalidad directa de A en B, entonces existe una constante "a" llamada constante de proporcionalidad, tal que $f(x) = ax$, para todo elemento del conjunto A. Como $f(x) = ax$,

$$a = \frac{f(x)}{x}$$

pero, $f(x) = y$; entonces:

$$a = \frac{y}{x}$$

Advertimos que no se debe confundir el número k con la constante de proporcionalidad.

Supongamos que la constante "a" existe; entonces se tiene que, $f(x) = ax$ para todo $x \in A$; si tal regla de correspondencia determina una proporcionalidad directa, la definición aceptada debe cumplirse. Si "k" es un número cualquiera, se tiene que $f(kx) = kf(x)$.

En seguida veremos que tal igualdad se verifica:

$$\underset{\uparrow \atop \text{igualando}}{f(kx)} = akx = (ak)x = (ka)x = k(ax) = \underset{\uparrow \atop \text{sustituyendo } f(x)=ax}{kf(x)}$$

por tanto, $f(kx) = kf(x)$.

Resumiendo ahora la proporcionalidad directa como función, se tiene:

1.- Si $f: A \to B$ es una proporcionalidad directa, entonces $f(x) = ax$; si empleamos la literal "y" para designar $f(x)$, tenemos:

$$y = ax$$

2.- Para toda proporcionalidad directa existe un número "a" llamado constante de proporcionalidad que la determina.

$$f(x) = ax$$
$$a = \frac{f(x)}{x}$$
$$= y/x$$

3.- Sabemos que funciones con regla de correspondencia ax+b tienen por gráfica una línea recta; como en este caso b=0, entonces la gráfica de proporcionalidad directa es un conjunto de puntos que pertenecen a una recta que pasa por el origen.

4.- **Si se tiene una proporcionalidad directa basta calcular la imagen de un número diferente de cero para construir su gráfica.**

Ejemplos de gráficas de proporcionalidad directa:

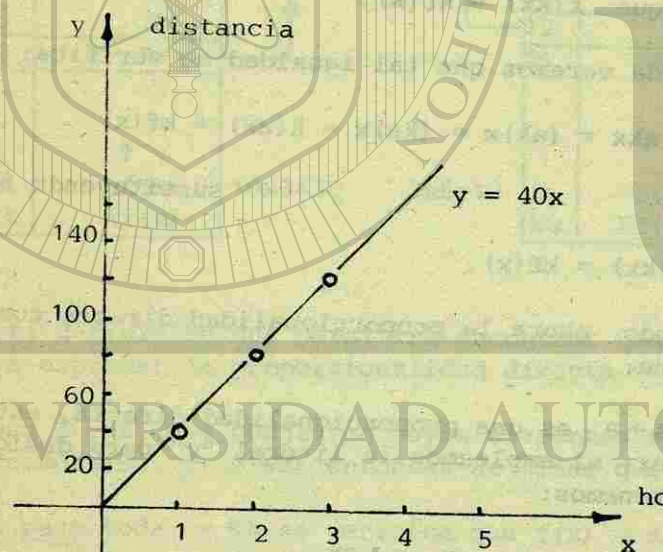


Fig. 2.a

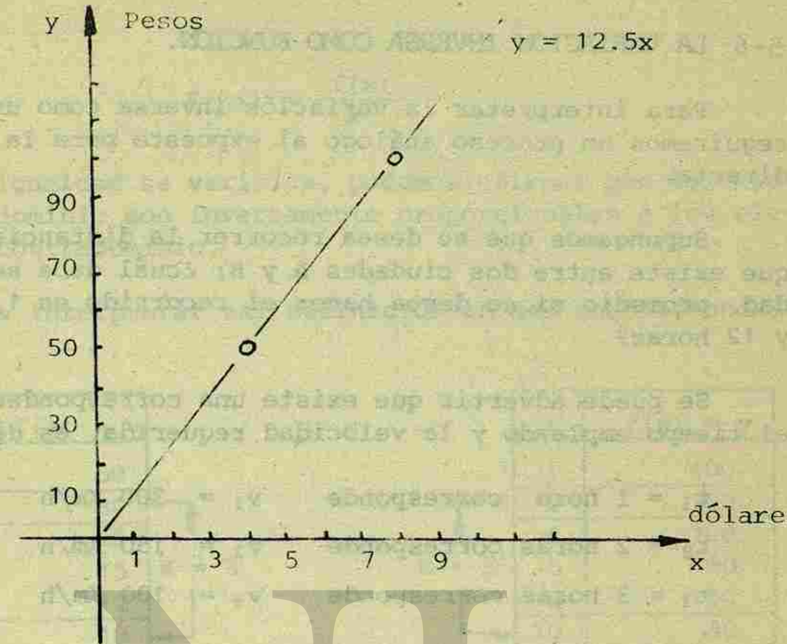


Fig. 2.b

AUTOEVALUACIÓN 3.

Haz una tabla y traza la gráfica de:

1.- $y = 2.54x$ para transformar pulgadas a cm.

2.- $y = 12.5\ x$ para transformar pesos a dólares.

3.- $y = 32 + \frac{9}{5}\ x$ para convertir °C a °F.

4.- $y = 1.25\ x$ para aumentar a los precios 25 % de su valor.

5.- $y = 0.85\ x$ para conocer cuánto debe pagarse cuando se obtiene 15 % de descuento.

6.- $y = 3.14\ x$ para calcular la circunferencia conociendo el diámetro.

5-6 LA VARIACIÓN INVERSA COMO FUNCIÓN.

Para interpretar la variación inversa como una función seguiremos un proceso análogo al expuesto para la variación directa.

Supongamos que se desea recorrer la distancia de 300 Km que existe entre dos ciudades A y B; ¿cuál debe ser la velocidad promedio si se desea hacer el recorrido en 1, 2, 3, 4, 6 y 12 horas?

Se puede advertir que existe una correspondencia entre el tiempo empleado y la velocidad requerida, es decir:

t_1 = 1 hora corresponde v_1 = 300 Km/h

t_2 = 2 horas corresponde v_2 = 150 Km/h

t_3 = 3 horas corresponde v_3 = 100 Km/h

.

.

.

t_x = x horas corresponde v_y = y Km/h

En esta correspondencia puede observarse que al multiplicar una cantidad por un número k, la cantidad correspondiente resulta dividida por ese número k. También se puede advertir que el tiempo debe ser diferente de cero; de lo contrario no se efectuaría el recorrido.

Lo anterior nos permite dar la definición de proporcionalidad inversa.

Definición 6:

Si A y B son dos conjuntos cuyos elementos son números y se tiene una función de A en B, dicha función es una proporcionalidad inversa de A en B si para cada elemento $x \in A$ y cada número k, tal que $kx \in A$, se cumple la siguiente igualdad:

$$F(kx) = \frac{f(x)}{k}$$

Cuando tal igualdad se verifica, podemos afirmar que los elementos del dominio son inversamente proporcionales a los elementos del contradominio.

Podemos interpretar tal definición en dos tabulaciones:

x	f(x) = y
1	60
2	30
3	20
4	15
5	12
6	10
.	.
.	.
.	.

K = 3

x	f(x) = y
1	400
2	200
4	100
5	80
8	50
10	40
.	.
.	.
.	.

K = 5

x $\qquad$ f(x)

2x3=6 $\qquad \frac{30}{3} = 10$

kx $\qquad \frac{f(x)}{k}$

x $\qquad$ f(x)

2x5=10 $\qquad \frac{200}{5} = 40$

kx $\qquad \frac{f(x)}{k}$

Cuando se tiene una tabulación para una proporcionalidad inversa, es fácil advertir que el producto de un elemento del dominio por su imagen correspondiente es siempre el mismo:

x	f(x)	x.f(x)
1	60	1x60
2	30	2x30
3	20	3x20
4	15	4x15
.	.	.
.	.	.
.	.	.

x	f(x)	x.f(x)
1	400	1x400
2	200	2x200
4	100	4x100
5	80	5x80
.	.	.
.	.	.
.	.	.

En general, sean A y B dos conjuntos cuyos elementos son números ; si $f : A \to B$ es una proporcionalidad inversa, entonces existe un número "a" llamado constante de proporcionalidad inversa, que cumple la siguiente condición:

Para todo número $x \in A$, siendo $x \neq 0$ se tiene que:

$$x\, f(x) = a$$

como, $f(x) = y$, $a = xy$.

A continuación se da la expresión general de la proporcionalidad inversa.

Si A y B son conjuntos cuyos elementos son números, con la condición de que cero no pertenece al dominio, y si $f: A \to B$ es una proporcionalidad inversa, entonces dicha proporcionalidad está determinada por un número "a" llamado constante de proporcionalidad inversa, es decir:

$$f : A \to B,$$

cuya regla de correspondencia es, $f(x) = \frac{a}{x}$

$$f(x) = \frac{a}{x}$$

EJEMPLO 6.

Dar la gráfica de la proporcionalidad inversa:

$$f : A \to B$$

cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = \frac{300}{x}$$

En primer lugar se procede a tabular algunos valores de x.

x	f(x)
1	300
2	150
3	100
4	75
5	60
6	50
10	30
12	25

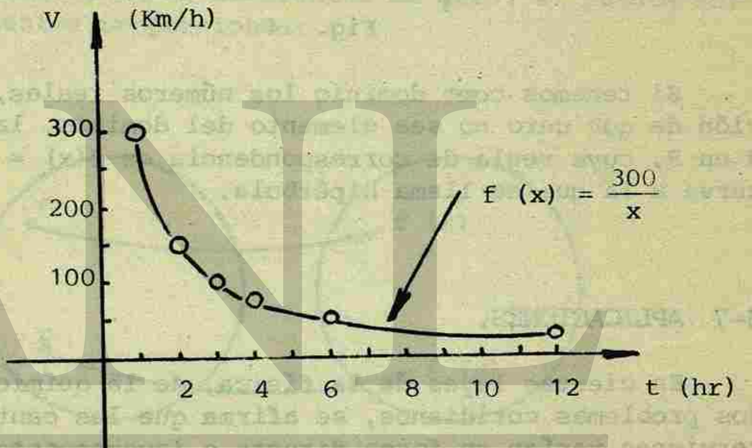


Fig. 3.

EJEMPLO 7.

Trazar la gráfica de la función, $f: A \to B$ cuya regla de correspondencia es, $f(x) = 24/x$

x	f(x)
2	12
3	8
4	6
8	3

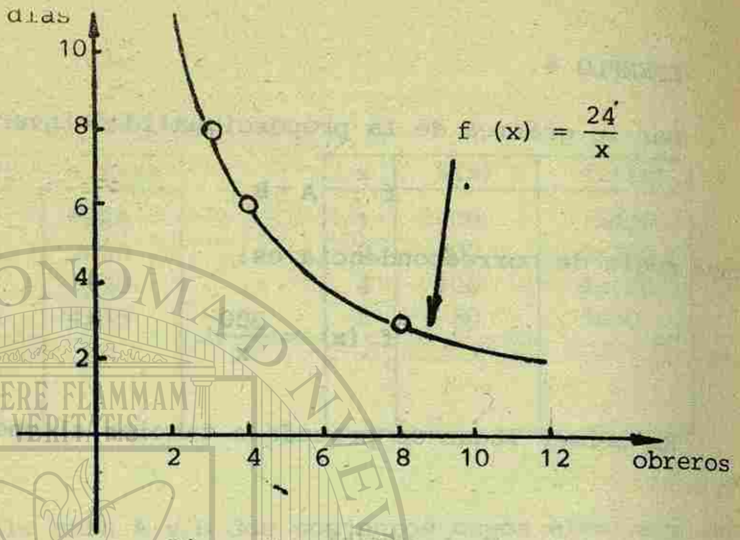


Fig. 4.

Si tenemos como dominio los números reales, con la condición de que cero no sea elemento del dominio, la gráfica de R en R, cuya regla de correspondencia es $f(x) = a/x$; es una curva a la que se llama hipérbola.

5-7 APLICACIONES.

En ciertas leyes de la física, de la química y en algunos problemas cotidianos, se afirma que las cantidades que intervienen varían en forma directa o inversamente proporcional, a continuación se dan tres ejemplos.

a) Ley de Charles.

En un proceso, a presión constante, los volúmenes de un gas ideal son directamente proporcionales a las temperaturas que soportan.

b) Ley de Boyle y Mariotte.

En un proceso, a temperatura constante, las presiones en un gas ideal son inversamente proporcionales a los volúmenes ocupados.

c) Si se tiene un conjunto de rectángulos con la condición de tener la misma área, la longitud de la base es inversamente proporcional a su altura.

Lo usual es expresar las leyes de la física y la química en forma simbólica por medio de proporciones, lo cual ocasiona dificultad en su interpretación cuando se trata de resolver problemas específicos, ya que se dan únicamente dos elementos del dominio.

Si se tiene $f: A \to B$ y dicha función determina una proporcionalidad directa, entonces, para un par de elementos r y s del dominio y ambos diferentes de cero, se pueden formar las siguientes proporciones:

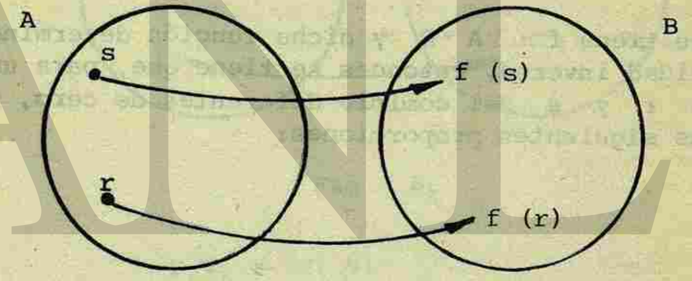


Fig. 5.

$$\frac{r}{f(r)} = \frac{s}{f(s)}$$

La ley de Charles se puede expresar en forma simbólica de la siguiente manera:

$$f : V \to T$$

$$f : V \longrightarrow T$$

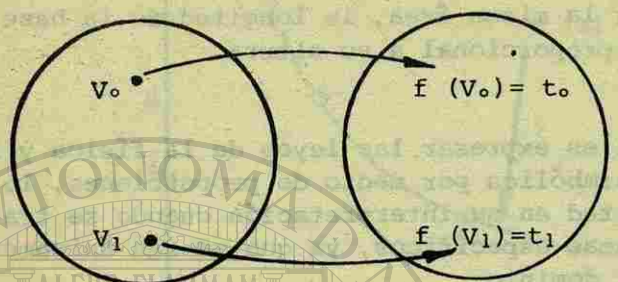


Fig. 6.

$$\frac{V_0}{t_0} = \frac{V_1}{t_1}$$

Si se tiene $f : A \to B$ y dicha función determina una proporcionalidad inversa, entonces se tiene que, para un par de elementos r y s del dominio diferentes de cero, se pueden formar las siguientes proporciones:

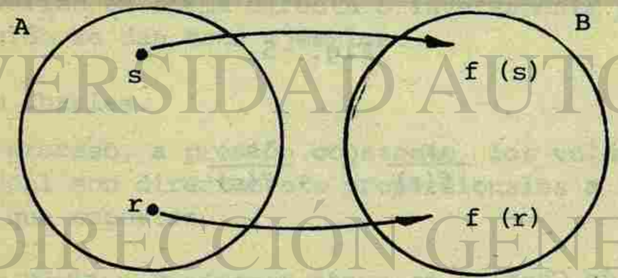


Fig. 7.

$$rf(r) = sf(s)$$

o bien, $$\frac{r}{s} = \frac{f(s)}{f(r)}$$

La ley de Boyle y Mariotte puede expresarse en forma simbólica de la siguiente manera:

$$f : P \to V$$

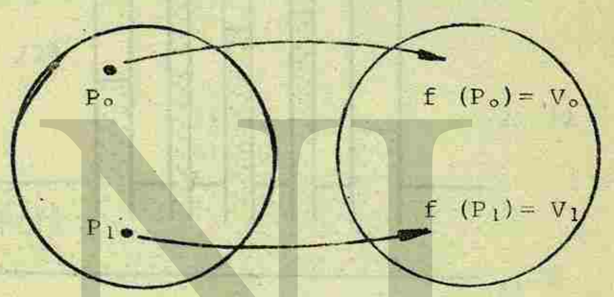


Fig. 8.

$$P_0 V_0 = P_1 V_1$$

AUTOEVALUACIÓN 4.

Para cada una de las siguientes tabulaciones, dé la regla de correspondencia:

1.-

x	f(x)
12	4
6	8
4	12
2	24

2.-

x	f(x)
2	6
3	9
4	12
5	15

3.-

x	f(x)
1	120
2	60
3	40
4	30

4.-

x	f(x)
5	20
6	24
7	28
8	32

5.- Un resorte de alambre acerado se alarga 3 mm cuando se le suspende un peso de 1 Kg y 15 mm cuando el peso es de 5 Kg; ¿cuál será su alargamiento cuando se suspen-- den pesos de 2, 3 y 4 Kg?

6.-

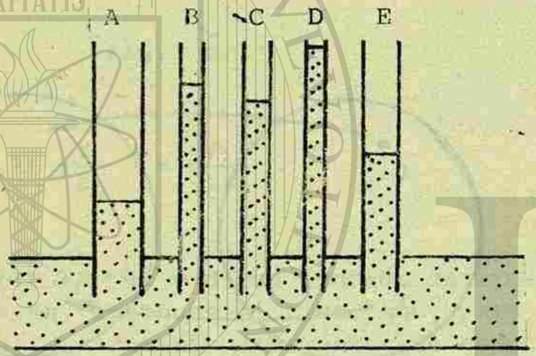


Fig. 9.

La altura que alcanza un líquido en los tubos capilares está de acuerdo con la siguiente proporción:

$$\frac{h}{h'} = \frac{r'}{r}$$

en la que "h" es la altura correspondiente a "r" y "h'" a "r'".

Los tubos A, B, C, D y E son capilares; sus radios in teriores miden respectivamente 1 mm, 0.5 mm, 0.6 mm, 0.4 mm, y 0.8 mm.; en el tubo A sube el agua 14 mm; en B, 28 mm. Calcula las demás alturas.

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO IV.

Escribir el número que falta en cada una de las proporciones siguientes.

1.- /5 = 10/25

0) 4 1) 2 2) 1
3) 0 4) 3

2.- 3/5 = 9/

0) 25 1) 20 2) 5
3) 10 4) 15

3.- 3/4 = /24

0) 18 1) 6 2) 12
3) 24 4) 30

4.- 2/ = 16/24

0) 9 1) 6 2) 4
3) 3 4) 8

Resuelva los siguientes problemas:

5.- La razón del peso de un cuerpo en la Tierra a su peso en Marte es aproximadamente de 3 a 1. ¿Cuánto pesará en Marte una persona que pesa 70 Kg en la Tierra?

0) 210 1) 23.333 2) 89
3) 50 4) 15.5

6.- Si 9 gramos de ácido clorhídrico neutralizan 10 gramos de lejía, ¿cuántos gramos de lejía neutralizarán 270 g de ácido clorhídrico?

0) 250 1) 200 2) 100
3) 150 4) 300

7.- En un conjunto de rectángulos con áreas iguales, el largo de cada rectángulo es inversamente proporcional al ancho del rectángulo. Si el ancho de un rectángulo es de 8 centímetros y su largo es de 15 cm. ¿Cuál es el ancho de un rectángulo cuyo largo es de 12 cm?

0) 10 | 1) 20 | 2) 15
3) 5 | 4) 25

8.- El tiempo necesario para hacer un cierto viaje varía inversamente con la velocidad con que se viaja. Si viajando con una velocidad media de 40 millas por hora se emplean 5 horas en hacer el recorrido. ¿Cuánto tiempo podrá economizarse, si se viaja con una velocidad media de 45 millas por hora?

0) 1 hora | 1) 15 minutos | 2) 34 minutos
3) 57 minutos | 4) 1 1/2 hr.

9.- La tabla siguiente es un ejemplo de variación directa; escríbase una ecuación lineal, expresando la primera variable como función de la segunda y dar el valor de la constante de proporcionalidad.

t	30	32	34	36	38
n	0	1	2	3	4

0) $t = 2n$ | 1) $t = 2n+3$ | 2) $t = 30n$
3) $t = 2n+30$ | 4) $t = 3n+2$

10.- El peso de un objeto varía directamente con su volumen. Traduzca el enunciado anterior en una fórmula.

0) $W = 1/V$ | 1) $W = K/V$ | 2) $W = K$
3) $W = KV$ | 4) $W = V$

11.- Con respecto al problema anterior, si un objeto con un volumen de 10 cm^3 pesa 14 g, hallar el valor de k.

0) 0.14 | 1) 7 | 2) 1.4
3) 0.7 | 4) 2.8

12.- Ahora escriba la fórmula, utilizando el valor de k que se acaba de obtener.

0) $W= 0.7V$ | 1) $W= 1.4V$ | 2) $W= 0.14V$
3) $W= 7V$ | 4) $W= 2.8 V$

13.- Hallar el volumen de un objeto de la misma sustancia cuyo peso es de 35 g.

0) 10 | 1) 15 | 2) 30
3) 20 | 4) 25

En cada uno de los siguientes problemas indicar si cada variable del par es directamente proporcional a la otra.

14.- El diámetro y la longitud de una circunferencia.

0) F | 1) V

15.- El número de hombres que hacen una tarea y el tiempo que se emplea en terminarla.

0) F | 1) V

16.- La longitud de un lado y el área de un cuadrado.

0) F | 1) V

17.- La longitud y la anchura de un rectángulo que tiene un área de 100 unidades cuadradas.

0) F | 1) V

Para cada una de las tablas siguientes, escribir una ecuación que exprese "x" como función de "y".

18.-

x	y
2	3
3/2	4
1	6

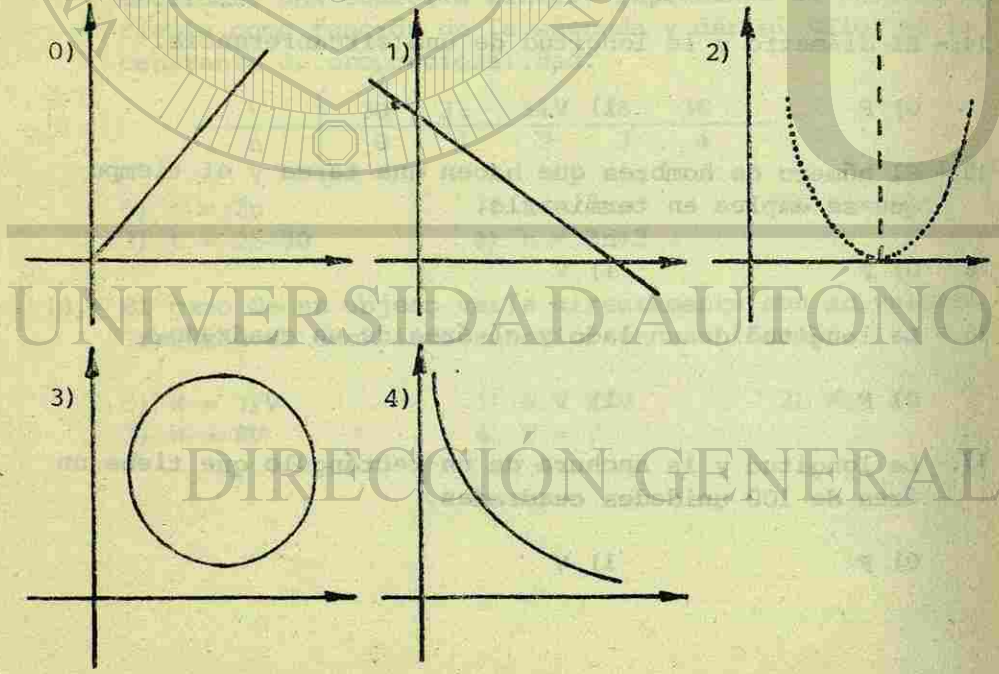
0) $y = 6x$ 1) $x = \frac{6}{y}$ 2) $x = 6y$
3) $y = 6kx$ 4) $x = 6ky$

19.- Todo rectángulo de un cierto conjunto de rectángulos tiene un área de 24 pulgadas cuadradas. Entonces la longitud varía inversamente con la anchura.

Escribir una fórmula que defina dicha función.

0) $\ell a = 24$ 1) $\ell k = 24$ 2) $ak = 24$
3) $a = 24\ell$ 4) $\ell = 24a$

20.- Construir la gráfica de la función:



21.- ¿Qué sucede a la anchura, si la longitud se reduce a la mitad?

0) Queda dividida por 24.
1) Se triplica.
2) Se duplica.
3) Queda multiplicada por 24.
4) Se reduce a la mitad.

22.- ¿Qué sucede a la longitud, si se triplica la anchura?

0) Se duplica. 1) Se triplica.
2) Queda dividida por dos. 3) Queda dividida por tres.
4) Ninguna.

Indicar si las funciones siguientes son ejemplo de variación directa o inversa.

23.- La longitud de la circunferencia de una rueda y el número de revoluciones que necesita para cubrir una distancia dada.

0) Inversa. 1) Directa.

24.- El perímetro y el lado de un cuadrado.

0) Inversa. 1) Directa.

25.- La masa y el volumen de un cuerpo de densidad uniforme.

0) Inversa. 1) Directa.

26.- La base y la altura de un triángulo de área constante.

0) Inversa. 1) Directa.

27.- El número de personas que aportan cantidades iguales para la compra de un artículo y la cantidad que debe aportar cada una.

0) Inversa.   1) Directa.

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DE LA LECCIÓN

AUTOEVALUACIÓN 1.

1.- 7/6
2.- 9/7
3.- 17/30
4.- 4/3
5.- 1/2
6.- No hay respuesta.
7.- No hay respuesta.
8.- 3/2
9.- 3/5
10.- 1/9

AUTOEVALUACIÓN 2.

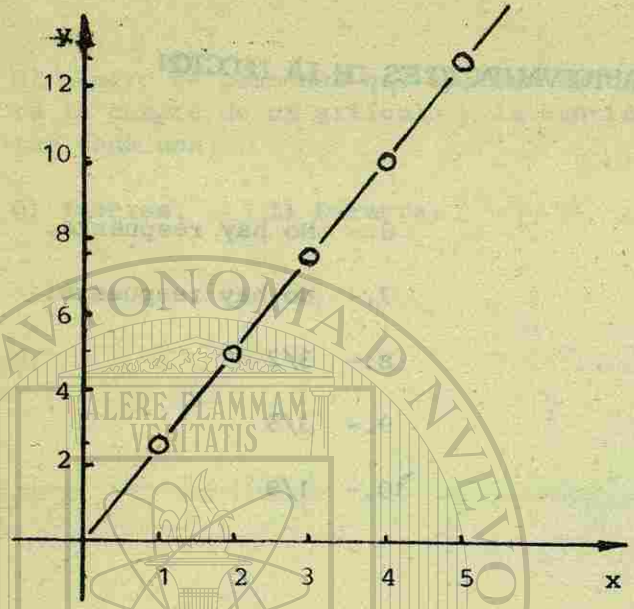
1.- 2x ; 21
2.- 21
3.- ca
4.- 12
5.- 1/8
6.- -21
7.- 2394
8.- 9 1/8

AUTOEVALUACIÓN 3.

1.-

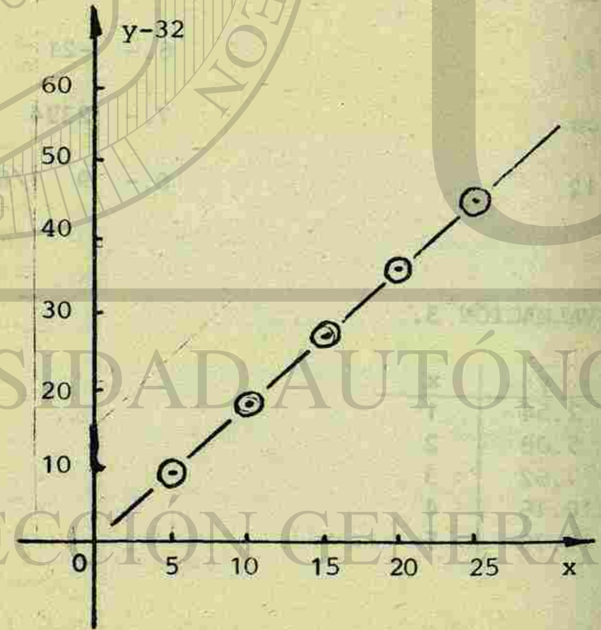
y	x
2.54	1
5.08	2
7.62	3
10.16	4
12.70	5

1.-

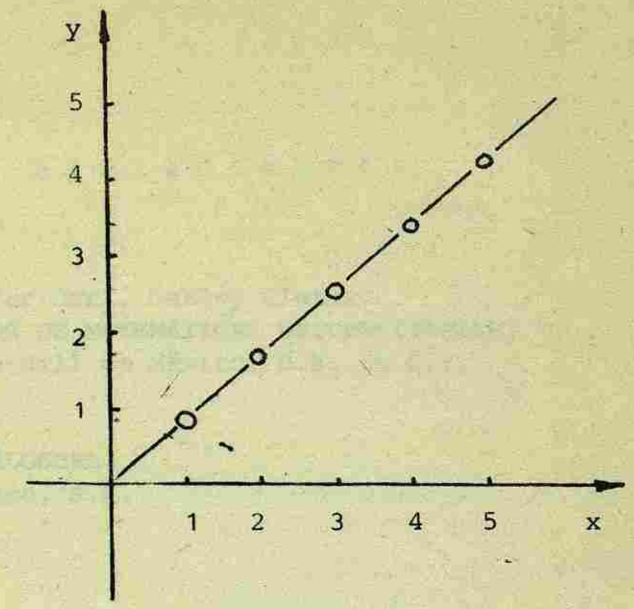


3.-

y	x	y-32
32	0	0
41	5	9
50	10	18
59	15	27
68	20	36
77	25	45



y	x
0	0
0.85	1
1.70	2
2.55	3
3.40	4
4.25	5



AUTOEVALUACIÓN 4.

1.- $f(x) = 48/x$

2.- $f(x) = 3x$

3.- $f(x) = 120/x$

4.- $f(x) = 4x$

5.- 6, 9, 12

6.- $C = 23.33$
$D = 35$
$E = 17.5$

B I B L I O G R A F Í A.

1.- Allendoerfer Carl, Oakley Cletus.
FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS UNIVERSITARIAS.
Ed. McGraw-Hill de México, S.A. de C.V.

2.- Anfossi.
CURSO DE ÁLGEBRA.
Ed. Progreso, S.A.

3.- Baldor, A.
ÁLGEBRA.
EDIME Organización Gráfica.

4.- Dolciani, Berman, Freilich.
ÁLGEBRA MODERNA (Tomo 1).
Publicaciones Cultural, S.A.

5.- Dolciani, Berman, Wooton.
ÁLGEBRA MODERNA Y TRIGONOMETRÍA (Tomo 2).
Publicaciones Cultural, S.A.

6.- Hall, Knight.
ÁLGEBRA ELEMENTAL.
Montainer y Simón, S.A. Barcelona.

7.- Lehmann, Charles.
ÁLGEBRA.
Ed. Limusa, S.A.

8.- Lovaglia, Florence - Elmore, Merritt - Conway, Donald.
ÁLGEBRA.
Harper y Row Latinoamericana (HARLA, S.A. de C.V.)

9.- Nichols, Eugene D.
ÁLGEBRA MODERNA ELEMENTAL.
Compañía Editorial Continental, S.A. (CECSA).

10.- Nichols, Heimer, Garland.
ÁLGEBRA MODERNA.
Compañía Editorial Continental, S.A. (CECSA).

11.- Rees, Sparks.
ÁLGEBRA.
Editorial Reverté Mexicana, S.A.

12.- Rider, Paul R.
ÁLGEBRA.
Editorial Herrero.

13.- Schaaf, Peters.
ÁLGEBRA, UN ENFOQUE MODERNO.
Editorial Reverté Mexicana, S.A.

14.- Tomber, Marvin L.
INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA CONTEMPORÁNEA.
Unión Tipográfica Editorial Hispano-Americana (UTHEA).

15.- Swokowski, Earl.
ÁLGEBRA UNIVERSITARIA.
Compañía Editorial Continental, S.A. (CECSA).

16.- Wentworth y Smith.
ELEMENTOS DE ÁLGEBRA.
Editorial Porrúa, S.A.