OPERACIONES CON LAS FRACCIONES ALGEBRAICAS.

LECCIÓN 1.

1-1 PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES ALGEBRAICAS.

Enunciaremos varios propiedades de las fracciones que nos serán útiles más adelante.

1) Pueden cambiarse simultáneamente a la vez los signos - del numerador y denominador de una fracción y no se altera.

$$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = -\frac{a}{-b} = -\frac{-a}{b}$$

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

2) Si el numerador y el denominador de una fracción algebráica, se multiplican o se dividen por una misma cantidad, la fracción no se altera.

$$\frac{a}{b} = \frac{a.c}{b.c} = \frac{a \div c}{b \div c}$$

3) Además una fracción a/b siendo a y b dos números cualesquiera y b≠0, se puede expresar como:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b}(a) = a\left(\frac{1}{b}\right);$$

4) De igual modo una fracción $\frac{1}{ab}$ siendo a y b dos números diferentes del cero se pueden expresar como:

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$$

1-2 REDUCCIÓN A TÉRMINOS MÍNIMOS.

Reducir una fracción, es cambiar su forma sin cambiar su valor. Simplificar una fracción algebráica, es convertirla en una fracción equivalente, cuyos términos sean primos entre sí. Por ejemplo, las fracciones siguientes son equivalentes

a) $\frac{12}{8} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

b) $\frac{12a^2}{8a} = \frac{6a}{4} = \frac{3a}{2}$,

donde cada una de ellas está expresada en su forma más simple, ya que, al reducirla nos queda que 3 y 2 son primos entre sí, al igual que 3a y 2 de la segunda fracción.

Cuando los términos de una fracción son primos entre sí, la fracción es irreductible y entonces, la fracción está reducida a su más simple expresión o a su mínima expresión.

La mínima expresión de una fracción, es aquella en la cual, el numerador y el denominador no tienen factores comunes. Así en los ejemplos anteriores, lo que hicimos para reducirlas fue

a) $\frac{12}{8} = \frac{(6)(2)}{(4)(2)} = \frac{6}{4} = \frac{(3)(2)}{(2)(2)} = \frac{3}{2}$

o bien

$$\frac{12}{8} = \frac{(4)(3)}{(4)(2)} = \frac{3}{2};$$

b) $\frac{12a^2}{8} = \frac{(4)(3)a.a}{(4)(2)\ a} = \frac{3a}{2}$.

Por lo tanto, para reducir una fracción a su mínima expresión, se factorizan primero el numerador y el denominador de la fracción y luego se divide, cada uno de ellos, entre cada factor que les sea común.

Así, podemos determinar si una fracción está en sus términos mínimos expresando el numerador y denominador como productos de sus factores primos. Cualquier factor común que aparezca tanto en el numerador como en el denominador puede entonces ser suprimido o cancelado.

EJEMPLO:

Simplificar la fracción $\frac{9a^2b^3}{24a^3b^4c^2}$

Solución:

Se tiene que:

$$\frac{9a^2b^3}{24a^3b^4c^2} = \frac{(3)(1)(1)}{(8)(a)(b)(c^2)} = \frac{3}{8abc^2}$$

Hemos dividido 9 y 24 entre 3 y obtuvimos 3 y 8; a^2 y a^3 entre a^2 y obtuvimos 1 y a; b^3 y b^4 entre b^3 y obtuvimos 1 y b; c^2 no tiene factor común por tanto, queda en el denominador. También vemos que, 3 y $8abc^2$, son números primos entre sí, es decir, no hay factor común por lo que resulta una fracción irreductible, que es precisamente lo que queríamos.

De las fracciones, las más fáciles de resolver son las de un monomio entre otro monomio, como en el caso del ejemplo anterior, puesto que está expresado como factores y no aparece ningún sumando. Veamos otro ejemplo:

EJEMPLO:

Simplificar la fracción $\dfrac{12a^3b^2c}{18ab^3c^2}$

Solución:

Según el principio fundamental de las fracciones, se pueden dividir sus dos términos entre $6ab^2c$, y se tiene:

$$\frac{12a^3b^2c \div 6ab^2c}{18ab^3c^2 \div 6ab^2c} = \frac{2a^2}{3bc}$$

Para llegar a este resultado se han dividido el numerador y el denominador entre $6ab^2c$, que es el factor máximo de ambos miembros de la fracción, cuyo producto es el máximo común divisor (m.c.d.) de los términos de dicha fracción.

Por tanto, para reducir una fracción a su más simple expresión, mediante una sola división, se dividen sus dos términos entre su máximo común divisor (m.c.d.).

EJEMPLO:

Reducir a su más simple expresión la fracción

$$\frac{144a^5b^4c^3d}{36a^4b^5c^2}$$

Solución:

El m.c.d. de los términos de la fracción es $36a^4b^4c^2$, por lo que queda como:

$$\frac{144a^5b^4c^3d \div 36a^4b^4c^2}{36a^4b^5c^2 \div 36a^4b^4c^2} = \frac{4acd}{b}$$

Ahora veamos el caso en el que la fracción involucre división de monomios entre polinominos o polinomios entre polinomios.

Para poder simplificar una fracción algebráica de este tipo es necesario primero descomponer cada polinomio en sus factores primos, o bien, factorizar completamente el polinomio de cada término de la fracción para luego suprimir los factores que sean comunes del numerador y del denominador. Veamoslo mejor con el siguiente ejemplo:

EJEMPLO:

Reduzcamos la fracción $\dfrac{2x^2}{4x^2-4xy}$ a términos mínimos

Solución:

Como en la fracción aparece solamente en el denominador un polinomio, procedamos a factorizarlo.

$$\frac{2x^2}{4x^2-4xy} = \frac{2x^2}{4x(x-y)} ;$$

luego sacamos el m.c.d. que es $2x$

$$\frac{2x^2 \div 2x}{4x(x-y) \div 2x} = \frac{x}{2(x-y)}$$

EJEMPLO:

Reducir a su más simple expresión la fracción $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+x-6}$

Solución:

Se procede a factorizar el numerador y denominador de la fracción:

$$\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+3)} = \frac{x-3}{x+3}$$

En la reducción de fracciones, es común suprimir el factor por el cual se dividen el numerador y el denominador. El proceso de eliminar un factor común del numerador y denominador de una fracción es llamado cancelación multiplicativa.

EJEMPLO:

Reducir a su más simple expresión la fracción

$$\frac{x^2-9x+20}{25-x^2}$$

Solución:

Haciendo lo mismo que en los otros ejemplos tenemos

$$\frac{x^2-9x+20}{25-x^2} = \frac{(x-5)(x-4)}{(5-x)(5+x)}$$

Ahora bien, como en el numerador tenemos (x-5) y en el denominador (5-x), podemos, según una de las propiedades de las fracciones, multiplicar arriba y abajo por una misma cantidad, y no se nos altera la fracción.

$$\frac{(x-5)(x-4)}{(5-x)(5+x)} = \frac{-1}{-1}\,\frac{(x-5)(x-4)}{(5-x)(5+x)} = \frac{(5-x)(x-4)}{-(5-x)(5+x)}$$

ahora procedamos a simplificar

$$-\frac{(5-x)(x-4)}{(5-x)(5+x)} = -\frac{x-4}{5+x} =$$

$$= \frac{4-x}{5+x}$$

AUTOEVALUACION 1.

Reducir a su más simple expresión las siguientes fracciones indicando el m.c.d.

1. $\frac{4x^5}{12x^7}$ = ______; m.c.d. = ______

2. $\frac{8a^2b^3}{24a^3b^2}$ = ______; m.c.d.= ______

3. $\frac{32x^2y^4z^3}{16x^4y^3z^4}$ = ______; m.c.d.= ______

4. $\frac{75a^7m^5}{100a^3m^{12}n^3}$ = ______; m.c.d. = ______

5. $\frac{24ab^2c}{18a^2bc^2}$ = ______; m.c.d. = ______

6. $\frac{12a^2b^3}{60a^3b^5x^6}$ = ______; m.c.d. = ______

7. $\frac{27a^2b^2c^3d^4}{63a^3b^3c^4d^5}$ = ______; m.c.d. = ______

8. $\frac{(25a^2b^5)(15a^3b^6)}{150a^6b^6}$ = ______; m.c.d. = ______

Factorizar y reducir a su mínima expresión, las fracciones siguientes, llenando los espacios indicados.

9. $\frac{3x^2y + 15xy}{x^2-25} = \frac{3xy(\quad\quad)}{(x+5)(\quad\quad)}$ = ______

10. $\frac{x^2+x-6}{x^2+5x+6} = \frac{(x+3)(\quad\quad)}{(\quad\quad)(x+2)}$ = ______

11. $\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2} = \dfrac{(a-b)(\quad)}{(\quad)(a-b)} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$

12. $\dfrac{a^3-2a^2-a+2}{a^3+2a^2-a-2} = \dfrac{a^2(\qquad)-(a-2)}{a^2(a+2)-(\quad)} = \dfrac{(a-2)(\qquad)}{(a+2)(\qquad)}$

13. $\dfrac{9-6x+x^2}{9-9x+2x^2} = \dfrac{(3-x)(\quad)}{(3-2x)(\quad)} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$

Reduzca cada fracción a términos mínimos.

14. $\dfrac{b^2-a^2}{(a-b)^2}$

15. $\dfrac{a^2-b^2}{2a^2+ab-b^2}$

16. $\dfrac{a^2-ab+b^2}{a^3+b^3}$

17. $\dfrac{3x^2-11x+6}{3x^2+x-2}$

18. $\dfrac{c^3+3c^2+2c+6}{c^3-c^2+2c-2}$

1-3 MULTIPLICACION Y DIVISIÓN DE FRACCIONES.

Las siguientes propiedades nos proporcionan prodeci-- mientos para multiplicar y dividir fracciones:

a) *El producto de dos o más fracciones es igual al producto de los numeradores dividido entre el producto de los denominadores, es decir:*

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}\ ;\ \text{donde } b,\ d \neq 0$$

b) *El cociente de dos fracciones es igual al dividendo multiplicado por el divisor invertido, es decir:*

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}\ ;\ \text{donde } b, c, d \neq 0$$

Es con frecuencia deseable reducir el producto, o el cociente, de fracciones a términos mínimos. Siendo éste el caso, el mejor procedimiento es escribir cada fracción en la forma factorizada, donde, factores comunes del numerador y del denominador pueden entonces suprimirse.

EJEMPLO:

Realizar las operaciones indicadas.

$$\frac{2x^2-x-3}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-2x+1}{3x^2-x-2}$$

Solución:

Como el producto de dos o más fracciones, es el producto de los numeradores, divididos, entre el producto de los denominadores, tenemos que:

$$\frac{2x^2-x-3}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-2x+1}{3x^2-x-2} = \frac{(2x^2-x-3)(x^2-2x+1)}{(x^2-1)(3x^2-x-2)}$$

luego, factorizando el numerador y denominador nos queda

$$= \frac{(2x^2-x-3)(x^2-2x+1)}{(x^2-1)(3x^2-x-2)} = \frac{(2x-3)(x+1)(x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x-1)(3x+2)}$$

para luego suprimir los factores comunes quedando

$$= \frac{(2x-3)(x+1)(x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x-1)(3x+2)} = \frac{2x-3}{3x+2}$$

EJEMPLO:

Dividamos $\dfrac{y^3-1}{y^2-9}$ por $\dfrac{y^2+y+1}{y^2-2y-3}$

Solución:

Para encontrar el cociente, invertimos el divisor, es decir:

$$\frac{y^3-1}{y^2-9}\div\frac{y^2+y+1}{y^2-2y-3} = \frac{y^3-1}{y^2-9}\cdot\frac{y^2-2y-3}{y^2+y+1} =$$

Factorizando los numeradores y denominadores de las fracciones tenemos que:

$$= \frac{y^3-1}{y^2-9} \cdot \frac{y^2-2y-3}{y^2+y+1} = \frac{(y-1)(y^2+y+1)}{(y+3)(y-3)} \cdot \frac{(y-3)(y+1)}{(y^2+y+1)} =$$

suprimiendo los factores comunes, nos queda por último

$$\frac{(y-1)(y^2+y+1)(y+3)(y+1)}{(y+3)(y-3)(y^2+y+1)} = \frac{(y-1)(y+1)}{y+3}$$

EJEMPLO:

Efectuaremos las multiplicaciones de fracciones siguientes:

$$\frac{x^2-3x+2}{2x^2+3x-2} \cdot \frac{2x^2+5x-3}{x^2-1} \cdot \frac{3x^2+6x}{2x-4} =$$

Solución:

Factorizando los numeradores y denominadores de las fracciones tenemos

$$= \frac{(x-2)(x-1)}{(2x-1)(x+2)} \cdot \frac{(2x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{3x(x+2)}{2(x-2)}$$

luego, por último, suprimiendo los factores comunes en el numerador y denominador, resulta.

$$= \frac{3x(x+3)}{2(x+1)}$$

EJEMPLO:

Realicemos las operaciones indicadas

$$\frac{a^2-7a+12}{a^2-6a+8} \cdot \frac{a^2+3a-10}{a^2-10a+21} \div \frac{a+5}{a-7} =$$

Solución:

Cuando haya que efectuar operaciones, en las que se combinen multiplicaciones y divisiones se procede primero a convertir los divisores en factores, invirtiéndolos y procediendo según la regla de multiplicación; es decir, invirtiendo el divisor y factorizando, obtenemos:

$$= \frac{(a-3)(a-4)}{(a-4)(a-2)} \cdot \frac{(a+5)(a-2)}{(a-7)(a-3)} \cdot \frac{(a-7)}{(a+5)} = 1$$

Frecuentemente se observan con mayor claridad los términos que pueden cancelarse, si previamente, se ordenan y se hacen los cambios permitidos de signos en los términos de los miembros de las fracciones. Por ejemplo, en la siguiente multiplicación de fracciones

$$\frac{(a+2b)}{(a^2-b^2)} \cdot \frac{(2b-a)}{(b-a)} \cdot \frac{(a+b)}{(4b^2-a^2)}$$

En este problema, algunos de los términos en que aparece "a" son positivos. Sin embargo, si se cambian ambos signos en los miembros de la segunda fracción, y se cambia el signo que antecede a la tercera fracción cambiando los dos signos de su denominador y se ordenan los términos, se tiene:

$$\frac{(a+2b)}{(a^2-b^2)} \cdot \frac{(a-2b)}{(a-b)} \cdot \frac{(a+b)}{-(a^2-4b^2)}$$

$$= \frac{(a+2b)}{(a-b)(a+b)} \cdot \frac{(a-2b)}{(a-b)} \cdot \frac{(a+b)}{-(a-2b)(a+2b)}$$

$$= \frac{-1}{(a-b)^2}$$