Debe observarse que, la supresión reemplaza cada numerador por la unidad, así que, el numerador del producto es uno y no cero.

También, al igual que en el caso de reducir fracciones a su mínima expresión, la supresión descuidada puede conducir a errores graves. En la siguiente expresión, sería un error suprimir (2a+b).

$$\frac{(2a+b)+5}{(2a+b)(2a-b)}$$

por ejemplo, tiene 2a+b como un factor del denominador, pero 2a+b es un término del numerador, no un factor.

Resumiendo, las operaciones de multiplicación y división de fracciones, diremos que:

1) Se descomponen en factores todo lo posible, los términos de las fracciones que se van a multiplicar o dividir.

2) En el caso de la división se invierten los términos de la fracción divisor y se multiplican, el dividendo por el divisor invertido.

3) Se simplifica, suprimiendo los factores comunes, en los numeradores y denominadores.

4) Se multiplican entre sí las expresiones que queden en los numeradores; después de simplificar, y este producto se parte por el producto de las expresiones que queden en los denominadores.

AUTOEVALUACIÓN 2.

Efectuar las operaciones indicadas y simplificar.

1. $\frac{3a}{2b}\cdot\frac{4ab}{9c}\cdot\frac{3c^2}{4a^2}$

2. $\frac{2a^2}{3b}\cdot\frac{6b^2}{4a}$

3. $\frac{7y}{12x^2}\cdot\frac{10xy^2}{3z}\cdot\frac{6xz^2}{5y}$

4. $\frac{5}{a}\cdot\frac{2a}{b^2}\cdot\frac{3b}{10}$

5. $\frac{14u^2}{5v}\cdot\frac{10v^2}{21vw}\cdot\frac{9w^2}{8u^2v}$

6. $\frac{x^2}{3y^2}\div\frac{2x}{y^3}$

7. $6a^2x^3\div\frac{a^2x}{5}$

Efectuar las operaciones indicadas y simplificar, llenando los espacios indicados.

8. $\frac{5a-5b}{3a+6b}\cdot\frac{a+2b}{a-b}=\frac{5(\quad)}{(\quad)(a+2b)}\cdot\frac{a+2b}{a-b}=$ __________

9. $\frac{4x-2y}{5x+10y}\cdot\frac{x^2+2xy}{2xy-y^2}=\frac{2(\quad)}{(\quad)(x+2y)}\cdot\frac{x(\quad)}{y(\quad)}=$ __________

10. $\frac{2a(a+b)^2}{3b^3}\cdot\frac{b^2(a-b)}{8a^3(a+b)}\cdot\frac{12a^2b^2}{a^2-b^2}=$ __________

11. $\frac{x-y}{x+y}\cdot\frac{x^2+xy}{x^2y^2-xy^3}\cdot\frac{y}{x^2}=$ __________

12. $\frac{1}{a^2-a-30} \div \frac{2}{a^2+a-42} = \frac{1}{(a-6)(\quad)} \cdot \frac{(a+7)(\quad)}{2} = \_\_\_\_\_\_$

13. $\frac{a^2-6a}{a^3+3a^2} \div \frac{a^2+3a-54}{a^2+9a} = \frac{a(\quad)}{(\quad)(a+3)} \cdot \frac{a(\quad)}{(a+9)(\quad)} = \_\_\_\_\_\_$

14. $\frac{x^3+125}{x^2-64} \div \frac{x^3-5x^2+25x}{x^2+x-56} = \frac{(x+5)(\quad)}{(x+8)(\quad)} \cdot \frac{(x+8)(\quad)}{x(\quad)} = \_\_\_\_\_\_$

15. $\frac{25a^2b^2}{12c^2} \cdot \frac{36bc^3}{5a^3} \div \frac{15b^3}{7ac} = \_\_\_\_\_\_$

16. $\frac{h^2-9}{k^2-9k} \cdot \frac{hk-9h}{hk+3k} \div \frac{h^3-3h^2}{k^3} = \frac{(h+3)(\quad)}{k(\quad)} \cdot \frac{h(\quad)}{k(\quad)} \cdot \frac{k^3}{(\quad)(h-}$

$= \_\_\_\_\_\_$

Realiza las operaciones indicadas y simplifica.

17. $\frac{3a^2+a-10}{8a^2-2a-3} \cdot \frac{10a^2+a-2}{3a^2+20a+25} \div \frac{5a^2+8a-4}{12a^2+11a-15}$

18. $\frac{x^2+4xy-12y^2}{x^2+7xy+6y^2} \cdot \frac{x^2-6xy-7y^2}{x^2-xy-12y^2} \div \frac{x^2-9xy+14y^2}{x^2-xy-12y^2}$

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DE LA LECCIÓN 1.

AUTOEVALUACIÓN 1.

1.- $1/3x^2$; $4x^5$

2.- $b/3a$; $8a^2b^2$

3.- $2y/x^2z$; $16x^2y^3z^3$

4.- $3a^4/4m^7n^3$; $25a^3m^5$

5.- $4b/3ac$; $6abc$

6.- $1/5ab^2x^6$; $12a^3b^3$

7.- $3/7abcd$; $9a^2b^2c^3d^4$

8.- $5b^5/2a$; $75a^5b^6$

9.- $3xy(x+5)/(x+5)(x-5) = 3xy/x-5$

10.- $(x+3)(x-2)/(x+3)(x+2) = x-2/x+2$

11.- $(a-b)(a^2+ab+b^2)/(a+b)(a-b) = a^2+ab+b^2/a+b$

12.- $(a-2)(a^2-1)/(a+2)(a^2-1) = a-2/a+2$

13.- $(3-x)(3-x)/(3-2x)(3-x) = 3-x/3-2x$

14.- $b+a/b-a$

15.- $a-b/2a-b$

16.- $1/a+b$

17.- $x-3/x+1$

18.- $ç+3/c-1$

AUTOEVALUACION 2.

1.- c/2

2.- ab

3.- $7y^2z/3$

4.- 3/b

5.- 3w/2v

6.- xy/6

7.- $30x^2$

8.- $\dfrac{5(a-b)}{3(a+2b)}$; 5/3

9.- $\dfrac{2(2x-y)}{5(x+2y)} \cdot \dfrac{x(x+2y)}{y(2x-y)} = \dfrac{2x}{5y}$

10.- b/2

11.- $1/x^2y$

12.- $\dfrac{1}{(a-6)(a+5)} \cdot \dfrac{(a+7)(a-6)}{2} = \dfrac{a+7}{2a+10}$

13.- $\dfrac{a(a-6)}{a^2(a+3)} \cdot \dfrac{a(a+9)}{(a+9)(a-6)} = \dfrac{1}{a+3}$

14.- $\dfrac{(x+5)(x^2+5x+25)}{(x+8)(x-8)} \cdot \dfrac{(x+8)(x-7)}{x(x^2-5x+25)} = \dfrac{(x+5)(x-7)}{(x-8)}$

15.- $7c^2$

16.- $\dfrac{(h+3)(h-3)}{k(k-9)} \cdot \dfrac{h(k-9)}{k(h+3)} \cdot \dfrac{k^3}{h^2(h-3)} = \dfrac{k}{h}$

17.- $\dfrac{3a-5}{a+5}$

18.- 1

SUMA Y RESTA DE FRACCIONES ALGEBRAICAS.

LECCIÓN 2.

1-4 REDUCCION DE UNA FRACCION A UN MINIMO COMUN DENOMINADOR.

Definición.

Reducir, dos o más fracciones, a un común denominador, es hallar otras, respectivamente equivalentes a las primeras, cuyos denominadores sean iguales.

Reducción a un común denominador.

Consideremos las fracciones,

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{m}{n}$$

si se multiplican los dos términos de la primera fracción por dn, los de la segunda por bn, y los de la tercera por bd, ninguna de las fracciones cambia de valor, y se convierten respectivamente en:

$$\frac{adn}{bdn}, \frac{cbn}{bdn}, \frac{mbd}{bdn}$$

que como se ve, tiene el mismo denominador.

Por lo expuesto, resulta que: **para reducir dos o más fracciones, a un común denominador, se multiplican ambos miembros de cada una de ellas, por el producto de los denominadores de todas las demás.**

Fracciones reducidas a su mínimo común denominador.

Con el objeto de evitar, denominadores muy grandes, es preferible, siempre que sea posible, reducir las fracciones a su menor común denominador, es decir, transformarlas en otras, respectivamente equivalentes a las propuestas, cuyo denominador común sea mínimo.

Por ejemplo, consideremos las fracciones,

$$\frac{2a}{5\ (a^2-4)} \quad y \quad \frac{6a}{35\ (a^2-6a+8)}$$

Para reducirlas a su menor común denominador, se debe hallar una expresión, que sea múltiplo de, $5(a^2-4)$ y al mismo tiempo de, $35(a^2-6a+8)$, y tal que su coeficiente sea el mínimo común múltiple, de los coeficientes de los denominadores y que el grado de la parte literal sea mínimo.

El primer denominador, $5(a^2-4)$, se descompone en: $5(a+2)(a-2)$, y el segundo, $35(a^2-6a+8)$ es igual a $5 \cdot 7\ (x-2)(x-4)$; entonces, en vez de tomar como denominador común el producto de, $5(a^2-4)$ por $35(a^2-6a+8)$, basta tomar $5 \cdot 7\ (x+2)(x-2)(x-4)$, que es el m.c.m. de los denominadores de las fracciones dadas.

Si a la primera fracción, se le da por denominador,

$$35(a+2)(a-2)(a-4) \;=\; 35(a^2-4)(a-4)$$

dicho denominador queda multiplicado por, $7(a-4)$ para que no se altere el valor de la fracción hay que multiplicar el numerador, por el mismo factor, y así se obtiene:

$$\frac{2a \cdot 7\ (a-4)}{35\ (a+2)(a-2)(a-4)} = \frac{14a\ (a-4)}{35\ (a^2-4)(a-4)}$$

dando a la segunda fracción el mismo denominador, el suyo queda multiplicado por $(a+2)$; para no alterar el valor de la fracción, hay que multiplicar también el numerador por, $(a+2)$, y así resulta:

$$\frac{6a\ (a+2)}{35\ (a+2)(a-2)(a-4)} = \frac{6a\ \ (a+2)}{35\ (a^2-4)(a+2)}$$

El mínimo común múltiplo.

El mínimo común múltiplo, (m.c.m.) de un conjunto de polinomios, es el polinomio de menor grado, y con los mínimos coeficientes enteros, que sea divisible exactamente, entre cada polinomio del conjunto.

El grado de un polinomio, es el grado de su término de mayor grado. El grado de un término, es la suma de los exponentes que aparecen en él.

Por ejemplo, el grado de, $2x^3-3x^2+4x$ es 3, y el grado de $3x^2y^2-2xy+3y^2$ es 4.

EJEMPLOS:

1) El m.c.m. de, $3x$; $4x^2y$; $8x^5y^2$ y de $36x^4$es, $72x^5y^2$.

2) El m.c.m. de, $2(x-y)$; $3(x+y)$; y de $(x-y)^2$,es $6(x-y)^2(x+y)$.

Si los polinomios están factorizados, se observa que, por definición, el m.c.m. factorizado, debe satisfacer los requisitos siguientes:

1.- Cada factor, de cada polinomio, debe aparecer como factor del m.c.m. Además, cada factor del m.c.m., debe estar elevado a una potencia igual, a la mayor que dicho factor tenga, en cualquiera de los polinomios factorizados.

2.- El m.c.m. no puede tener un factor, que no aparezca en alguno de los polinomios factorizados.

De ese modo, se tiene el siguiente método, para obtener el m.c.m. de un conjunto de polinomios:

1.- Se factoriza, cada uno de los polinomios.

2.- Se escribe el m.c.m., cada uno de los diferentes factores primos, de los polinomios, y luego se eleva cada factor, a la mayor potencia con que aparezca en alguno de los polinomios factorizados. (Número primo, es un número que no tiene más factores, que él mismo y la unidad).

EJEMPLO:

Encontrar el m.c.m. de los siguientes polinomios:

$$x^2-2xy+y^2$$

$$x^2+2xy+y^2$$

$$x^2-y^2$$

$$x^2 - 3xy + 2y^2$$
$$2x^2 + 3xy + y^2$$

SOLUCIÓN:

Se escriben factorizados cada uno de esos polinomios, como se muestra en seguida:

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$$
$$x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$$
$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$
$$x^2 - 3xy + 2y^2 = (x-2y)(x-y)$$
$$2x^2 + 3xy + y^2 = (2x+y)(x+y)$$

Los factores primos que aparecen arriba son, $(x-y)$; $(x+y)$; $(x-2y)$ y $(2x+y)$. Sin embargo, $(x-y)$ y $(x+y)$ tienen exponente 2, en el primero y en el segundo de los polinomios, respectivamente. Por tanto, el m.c.m. es, $(x-y)^2(x+y)^2(x-2y)(2x+y)$.

Reducción de fracciones al mínimo común denominador empleando el mínimo común múltiplo (m.c.m.).

Para reducir, dos o más fracciones a su mínimo común denominador, por el método del m.c.m., se pueden seguir los siguientes pasos:

1.- Se toma como denominador común, el m.c.m. de los denominadores.

2.- Se divide ese común denominador, entre el denominador de cada fracción.

3.- Se multiplica el numerador de cada fracción, por el cociente respectivo obtenido.

EJEMPLOS:

Reducir, a su mínimo común denominador:

1) $\dfrac{5ax^2}{8by^2}$, $\dfrac{7by}{10x^2z}$, $\dfrac{8cx^3}{15yz^3}$

m.c.m. (8, 10, 15) = 120

m.c.m. $(8by^2,\ 10x^2z,\ 15yz^3) = 120bx^2y^2z^3)$

Efectuando las operaciones indicadas resulta:

$$\frac{75ax^4z^3}{120bx^2y^2z^3},\ \frac{84b^2y^3z^2}{120bx^2y^2z^3},\ \frac{64bcx^5y}{120bx^2y^2z^3}$$

2) Reducir, a su mínimo común denominador:

$$\frac{2}{3m^3-12m^2},\ \frac{m}{m^2-6m+8},\ \frac{m^2}{m^3-8}$$

Factorizando los denominadores se tiene:

$$3m^3 - 12m^2 = 3m^2(m-4)$$
$$m^2 - 6m + 8 = (m-2)(m-4)$$
$$m^3 - 8 = (m-2)(m^2+2m+4)$$

Por tanto, el mínimo común denominador es:

$$3m^2(m-4)(m-2)(m^2+2m+4)$$

y las fracciones, se transforman respectivamente en:

$$\frac{2(m-2)(m^2+2m+4)}{3m^2(m-2)(m-4)(m^2+2m+4)}$$

$$\frac{m.3m^2(m^2+2m+4)}{3m^2(m-2)(m-4)(m^2+2m+4)}$$

$$\frac{m^2.3m^2(m-4)}{3m^2(m-2)(m-4)(m^2+2m+4)}$$

AUTOEVALUACION 1.

Transforma la siguiente fracción en una equivalencia, cuyo denominador sea, la expresión que aparece a la derecha.

1.- $\frac{5a}{3bc}$. $15ab^2c^2$

2.- $\frac{4r}{9s\ t}$. $27r^2s^2t^5$

3.- $\frac{2a}{3a-1}$, $(3a-1)(2a+3)$

4.- $\frac{3x+2y}{2x-3y}$, $4x^2-9y^2$

5.- $\frac{3a+4b}{5a-2b}$, $15a^2-26ab+8b^2$

Reducir al mínimo común denominador.

6.- $\frac{2a}{36c}$, $\frac{4b^2}{9c^2}$, $\frac{5c^3}{12a^2c^3}$, m.c.d. = ________________

7.- $\frac{4x}{9y^2z}$, $\frac{5y}{12xz^2}$, $\frac{8z}{15x^2y}$, m.c.d. = ________________

8.- $\frac{5w^2}{12u^2v}$, $\frac{7v^2}{24uw^2}$, $\frac{8u^2}{27v^2w}$, m.c.d. = ________________

9.- $\frac{a}{a^2-b^2}$, $\frac{a-b}{(a+b)^2}$, $\frac{a+b}{(a-b)^2}$, m.c.d. = ________________

10.- $\frac{2u+v}{4u^2-9v^2}$, $\frac{2u-3v}{4u^2+8uv+3v^2}$, $\frac{2u+3v}{4u^2-4uv-3v^2}$, m.c.d.= ________________

Nota.

Generalmente es preferible, indicar la multiplicación en el denominador, sin efectuarla; así se ve más rápidamente, por qué factores, ha sido multiplicado el denominador de cada fracción y por tanto, qué factores deben multiplicar también su numerador.

1-5 SUMA DE FRACCIONES ALGEBRAICAS.

Definición.

La adición o suma, es una operación que tiene por objeto, reunir varios números de la misma especie, en uno solo.

Los números que se suman, se llaman sumandos, y el resultado se denomina, suma o total.

El signo de la operación de sumar, es una cruz (+), que se lee más, y se coloca entre los sumandos.

En la suma de fracciones algebráicas se distinguen dos casos:

Primer caso; las fracciones algebráicas tienen igual denominador.

Para sumar fracciones algebráicas de igual denominador, se suman algebráicamente los numeradores y al resultado se le da, el denominador común.

EJEMPLOS.

$$\frac{x}{5} + \frac{2y}{5} = \frac{x+2y}{5}$$

$$\frac{8a}{7b} + \frac{-5a}{7b} = \frac{8a-5a}{7b} = \frac{3a}{7b}$$