$$\frac{3a+2b}{ab}+\frac{5a-3b}{ab}+\frac{2a+5b}{ab}=\frac{3a+2b+5a-3b+2a+5b}{AB}$$

$$=\frac{10a+4b}{ab}$$

Segundo caso: las fracciones algebraicas, no tienen igual denominador.

Para sumar fracciones algebraicas, que no tienen igual denominador, se busca el mínimo común múltiplo de los denominadores, se reducen las fracciones a otras equivalentes, que tengan como denomindador, el mínimo común múltiplo o común denominador y se efectúa la suma.

EJEMPLOS:

Sumar;

$$\frac{a}{6}+\frac{2a}{5}+\frac{3a}{4}$$

El común denominador de 6, 5 y 4 es, 60.

$$\frac{a}{6}=\frac{10a}{60}\ ;\ \frac{2a}{5}=\frac{24a}{60}\ ;\ \frac{3a}{4}=\frac{45a}{60}$$

$$\frac{a}{6}+\frac{2a}{5}+\frac{3a}{4}=\frac{10a}{60}+\frac{24a}{60}+\frac{45a}{60}$$

$$=\frac{10a+24a+45a}{60}=\frac{79a}{60}$$

EJEMPLO:

Sumar;

$$\frac{a+b}{a}+\frac{2a-3b}{b}+\frac{5a^2-2b^2}{ab}$$

El común denominador de a, b y ab es, ab.

$$\frac{a+b}{a}=\frac{(a+b)b}{ab}=\frac{ab+b^2}{ab}$$

$$\frac{2a-3b}{b}=\frac{(2a-3b)a}{ab}=\frac{2a^2-3ab}{ab}$$

Por tanto:

$$\frac{a+b}{a}+\frac{2a-3b}{b}+\frac{5a-2b}{ab}=\frac{ab+b^2}{ab}+\frac{2a^2-3ab}{ab}+\frac{5a^2-2b^2}{ab}$$

$$\frac{ab+b^2+2a^2-3ab+5a^2-2b^2}{ab}=\frac{7a^2-2ab-b^2}{ab}$$

EJEMPLO:

Suma.

$$\frac{x+y}{x^2+2xy+y^2}+\frac{x-y}{x^2-2xy+y^2}+\frac{2x+2y}{x^2-y^2}$$

Antes de comenzar cualquier operación, deben simplificarse las fracciones, siempre que se pueda,

$$\frac{x+y}{x^2+2xy+y^2}=\frac{1}{x+y}$$

$$\frac{x-y}{x^2-2xy+y^2}=\frac{1}{x-y}$$

$$\frac{2x+2y}{x^2-y^2}=\frac{2}{x-y}$$

Por tanto,

$$\frac{x+y}{x^2+2xy+y^2}+\frac{x-y}{x^2-2xy+y^2}=\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}+\frac{2}{x-y}$$

ahora, el común denominador de, x+y y x-y es, $x^2 - y^2$ Luego,

$$\frac{1}{x+y} = \frac{x-y}{x^2-y^2}$$

$$\frac{1}{x-y} = \frac{x+y}{x^2-y^2}$$

$$\frac{2}{x-y} = \frac{2x+2y}{x^2-y^2}$$

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} + \frac{2}{x-y} = \frac{x-y+x+y+2x+2y}{x^2-y^2}$$

$$= \frac{4x+2y}{x^2-y^2}$$

En la práctica, para sumar fracciones algebráicas, se simplifican cuando se puede, se busca el común denominador, se divide el común denominador, entre el denominador de cada una de las fracciones y el resultado, se multiplica por el numerador de la fracción, luego, se reducen los términos semejantes.

EJEMPLOS:

Sumar, $\frac{2a}{5b} + \frac{3b}{7a} + \frac{2b}{5a} = \frac{(2a)(7a)+(3b)(5b)+(2b)(7b)}{35ab}$

$$= \frac{14a^2+15b^2+14b^2}{35ab} = \frac{14a^2+29b^2}{35ab}$$

Sumar, $\frac{x+2}{x^2-4} + \frac{x-3}{x^2-9} + \frac{x+3}{x^2+6x+9} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3}$

$$= \frac{x+3+x-2+x-2}{x^2+x-6} = \frac{3x-1}{x^2+x-6}$$

Sumar, $\frac{5x-5y}{x^2-y^2} + \frac{x^2+xy+y^2}{x^3-y^3} + \frac{3}{x+y} =$

$$= \frac{5}{x+y} + \frac{1}{x-y} + \frac{3}{x+y} = \frac{8}{x+y} + \frac{1}{x-y}$$

$$= \frac{8(x-y)+1(x+y)}{x^2-y^2} = \frac{9x-7y}{x^2-y^2}$$

Propiedades de la suma con fracciones algebráicas.

La suma de fracciones algebráicas, es una operación conmutativa y asociativa, es decir:

Conmutativa; porque indistintamente, se puede obtener la misma suma, a pesar de cambiar el orden de los sumandos.

EJEMPLO:

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{12+4+3}{18} = \frac{19}{18} = 1\frac{1}{18}$$

$$\frac{2}{9} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{4+12+3}{18} = \frac{19}{18} = 1\frac{1}{18}$$

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{9} + \frac{2}{3} = \frac{3+4+12}{18} = \frac{19}{18} = 1\frac{1}{18}$$

Asociativa; porque se puede agrupar dos o más sumandos, y obtener una suma parcial que, agregada a los sumandos restantes, da el mismo resultado, que efectuada la suma en forma corriente.

EJEMPLO:

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{5}{4} = \frac{36+40+45+20+12+75}{60}$$

$$= \frac{228}{60} = 3\frac{48}{60} = 3\frac{4}{5}$$

Asociando fracciones, con el mismo denominador, se tiene:

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

Por tanto, $\frac{4}{5} + 1 + 2 = 3\frac{4}{5}$

Ley de cerradura para la adición de fracciones.

Dados, los números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, en ese orden, existe un único número racional, llamado la suma de estos dos números racionales.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \text{número racional} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Suma de fracciones con denominadores monomios.

EJEMPLO:

Sumar, $\frac{2}{5x^2}$ y $\frac{1}{3xy}$

Hay que reducir las fracciones, al mínimo común denominador.

El m.c.m. de los denominadores es $15x^2y$, dividiendo $15x^2y$, entre los denominadores, tenemos;

$15x^2y \div 5x^2 = 3y$ y, $15x^2y \div 3xy = 5x$, estos cocientes, los multiplicamos por los numeradores respectivos y tenemos.

$$\frac{2}{5x^2} + \frac{1}{3xy} = \frac{2(3y)+5x(1)}{15x^2y}$$

sumando los numeradores $= \frac{6y+5x}{15x^2y}$

EJEMPLO;

Sumar, $\frac{a-4x}{2xa} + \frac{a-2}{5a^2} + \frac{1}{10a}$

El m.c.m. de los denominadores es, $10xa^2$. Dividiendo $10xa^2$ entre cada denominador y multiplicando los cocientes por el numerador respectivo, se tiene:

$$\frac{a-4x}{2xa} + \frac{a-2}{5a^2} + \frac{1}{10a} = \frac{5a(a-4x)+2x(a-2)+xa}{10xa^2}$$

multiplicando $= \frac{5a^2-20xa+2xa-4x+xa}{10xa^2}$

reduciendo términos semejantes $= \frac{5a^2-17xa-4x}{10xa^2}$

AUTOEVALUACION 2.

Efectuar, las operaciones indicadas y simplificar.

1.- $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{2}{3} = \frac{\quad}{4}$

2.- $\frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{12} = \frac{\quad}{18}$

3.- $\frac{u}{9} + \frac{v}{2} + \frac{4u-9v}{18} = \frac{\quad}{3}$

4.- $\frac{1}{6y} + \frac{1}{3x} + \frac{2x+3y}{12xy} = \frac{\quad}{12xy}$

5.- $\frac{2}{3b} + \frac{3}{2a} + \frac{2a-3b}{2ab} = \frac{\quad}{ab}$

6.- $\frac{5a}{12bc} + \frac{4b}{9ac} + \frac{3c}{16ab} = \frac{\quad}{144abc}$

7.- $\frac{3yz}{4x^2} + \frac{5}{8xyz} + \frac{7x}{36yz^2} = \frac{\quad}{72x^2yz^2}$

$$8.- \quad \frac{h}{10k} + \frac{2h^2-5k^2}{20hk} + \frac{k}{12h} = \frac{\qquad}{30hk}$$

$$9.- \quad \frac{2u}{9v^2} + \frac{5v}{18u^2} + \frac{u^2}{12v^3} = \frac{\qquad}{36u^2v^3}$$

$$10.- \quad \frac{4c}{5a^2b} + \frac{3b}{10ac^2} + \frac{5a}{6b^2c} = \frac{\qquad}{30a^2b^2c^3}$$

Suma de fracciones con denominadores polinomios.

EJEMPLO:

Sumar, $\frac{1}{3a+3} + \frac{1}{2a-2} + \frac{1}{a^2-1}$

Se factorizan los binomios, para encontrar el m.c.m. de los denominadores:

$$3a+3 = 3(a+1)$$
$$2a-2 = 2(a-1) \qquad \text{m.c.m.} = 6(a+1)(a-1)$$
$$a^2-1 = (a+1)(a-1)$$

dividiendo el m.c.m., entre cada denominador y multiplicando cada cociente, por el numerador respectivo, tenemos:

$$\frac{1}{3a+3} + \frac{1}{2a-2} + \frac{1}{a^2-1} = \frac{2(a-1)+3(a+1)+6}{6(a+1)(a-1)}$$

multiplicando $= \dfrac{2a-2+3a+3+6}{6(a+1)(a-1)}$

reduciendo términos semejantes $= \dfrac{5a+7}{6(a+1)(a-1)}$

EJEMPLO:

Sumar, $\frac{x-1}{x^2-4} + \frac{x-2}{x^2-x-6} + \frac{x+6}{x^2-5x+6}$

Se encuentra el m.c.m. de los denominadores:

$$x^2-4 = (x+2)(x-2)$$
$$x^2-x-6 = (x-3)(x+2) \qquad \text{m.c.m.} = (x+2)(x-2)(x-3)$$
$$x^2-5x+6 = (x-3)(x-2)$$

dividiendo el denominador común, entre cada denominador y multiplicando los cocientes, por los numeradores respectivos, se tiene:

$$\frac{x-1}{x^2-4} + \frac{x-2}{x^2-x-6} + \frac{x+6}{x^2-5x+6} = \frac{(x-1)(x-3)+(x-2)^2+(x+2)(x+6)}{(x+2)(x-2)(x-3)}$$

multiplicando $= \dfrac{x^2-4x+3+x^2-4x+4+x^2+8x+12}{(x+2)(x-2)(x-3)}$

reduciendo términos semejantes $= \dfrac{3x^2+19}{(x^2-4)(x-3)}$

AUTOEVALUACION 3.

Efectuar las operaciones siguientes y simplificar:

$$1.- \quad \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{\qquad}{x^2-1}$$

$$2.- \quad \frac{1}{3a-2b} + \frac{a-b}{9a^2-4b^2} = \frac{\qquad}{9a^2-4b^2}$$

$$3.- \quad \frac{2}{x^2-xy} + \frac{2}{xy+y^2} = \frac{\qquad}{xy(x^2-y^2)}$$

$$4.- \quad \frac{xy}{9x^2-y^2} + \frac{x}{3x+y} = \frac{\qquad}{9x^2-y^2}$$

5.- $\frac{y+1}{10} + \frac{y-3}{5y-10} + \frac{y-2}{2} = \frac{\qquad}{10(y-2)}$

6.- $\frac{a}{x^2-xa} + \frac{x+a}{xa} + \frac{x}{xa-a^2} = \frac{\qquad}{a(x-a)}$

7.- $\frac{1}{b+b^2} + \frac{1}{b-b^2} + \frac{b+3}{1-b^2} = \frac{\qquad}{b(1-b)}$

8.- $\frac{z-a}{z+a} + \frac{z+a}{z-a} + \frac{4za}{z^2-a^2} = \frac{\qquad}{z-a}$

9.- $\frac{c-2}{2c^2-5c-3} + \frac{c-3}{2c^2-3c-2} + \frac{2c-1}{c^2-5c+6} = \frac{\qquad}{(2c+1)(c-2)(c-3)}$

10.- $\frac{k-2}{k-1} + \frac{k+3}{k+2} + \frac{k+1}{k-3} = \frac{\qquad}{(k-1)(k+2)(k-3)}$

1-6 RESTA DE FRACCIONES ALGEBRAICAS.

Definición.

La sustracción o resta, es una operación que tiene por objeto, hallar lo que falta a un número, para igualar a otro mayor de la misma especie; o también, hallar uno de dos sumandos, cuando se conocen la suma y el otro sumando.

La suma dada, se llama minuendo, el sumando conocido, se llama sustraendo, y el sumando que se busca, se denomina resta o diferencia.

El signo de la sustracción, es una rayita horizontal (-) que se lee menos, y que se coloca entre el minuendo y el sustraendo.

Para restar fracciones algebráicas, se reducen las fracciones a un común denominador y se restan los numeradores.

EJEMPLOS:

1) $\frac{3}{2a} - \frac{1}{6a} = \frac{9-1}{6a} = \frac{8}{6a} = \frac{4}{3a}$

2) $\frac{8}{a-b} - \frac{5}{a+b} = \frac{8(a+b)-5(a-b)}{a^2-b^2} = \frac{8a+8b-5a+5b}{a^2-b^2}$

$= \frac{3a+13b}{a^2-b^2}$

3) $\frac{a+3b}{a^2-9b^2} - \frac{a-5b}{a^2-25b^2} = \frac{1}{a-3b} - \frac{1}{a+5b}$

$= \frac{a+5b-(a-3b)}{a^2+2ab-15b^2} = \frac{a+5b-a+3b}{a^2+2ab-15b^2} = \frac{8b}{a^2+2ab-15b^2}$

Resta de fracciones con denominadores monomios.

EJEMPLO:

De, $\frac{x+2y}{3x}$ restar $\frac{4xy^2-3}{6x^2y}$

El m.c.m. de los denominadores es, $6x^2y$.

Dividiendo $6x^2y$ entre cada denominador y multiplicando cada cociente, por el numerador respectivo, se tiene:

$\frac{x+2y}{3x} - \frac{4xy^2-3}{6x^2y} = \frac{2xy(x+2y)}{6x^2y} - \frac{4xy^2-3}{6x^2y}$

multiplicando $= \frac{2x^2y+4xy^2}{6x^2y} - \frac{4xy^2-3}{6x^2y}$

restando los numeradores $= \frac{2x^2y+4xy^2-(4xy^2-3)}{6x^2y}$

eliminando el paréntesis $= \frac{2x^2y+4xy^2-4xy^2+3}{6x^2y}$

$= \frac{2x^2y+3}{6x^2y}$

obsérvese que para restar $4xy^2-3$ del primer numerador hay que cambiar el signo a cada uno de sus términos, y esta operación la indicamos, incluyendo $4xy^2-3$ en un paréntesis, precedido del signo (-).

Resta de fracciones con denominadores polinomios.

EJEMPLO:

Restar, $\frac{x}{xy-y^2} - \frac{1}{y}$

Se encuentra el m.c.m. de los denominadores:

$xy-y^2 = y(x-y)$ m.c.m: $y(x-y)$

$y = y$

dividiendo, $y(x-y)$ entre cada denominador y multiplicando cada cociente, por el numerador respectivo, se tiene:

$$\frac{x}{xy-y^2} - \frac{1}{y} = \frac{x-(x-y)}{y(x-y)} = \frac{x-x+y}{y(x-y)} = \frac{y}{y(x-y)} = \frac{1}{x-y}$$

EJEMPLO:

Simplificar: $\frac{4a^2-1}{2a^2-8} - \frac{(a+1)^2}{a^2+4a+4} - \frac{a+3}{a-2}$

Se encuentra el denominador común:

$2a^2-8 = 2(a^2-4) = 2(a+2)(a-2)$

$a^2+4a+4 = (a+2)^2$ m.c.m. $= 2(a+2)^2(a-2)$

$(a-2) = (a-2)$

dividiendo, $2(a+2)^2(a-2)$ entre cada denominador, queda:

$$\frac{4a^2-1}{2a^2-8} - \frac{(a+1)^2}{a^2+4a+4} - \frac{a+3}{a-2} = \frac{(a+2)(4a^2-1)-2(a-2)(a+1)^2-2(a+2)^2(a+3)}{2(a+2)^2(a-2)}$$

$$= \frac{(a+2)(4a^2-1)-2(a-2)(a^2+2a+1)-2(a^2+4a+4)(a+3)}{2(a+2)^2(a-2)}$$

$$= \frac{4a^3+8a^2-a-2-2(a^3-3a-2)-2(a^3+7a^2+16a+12)}{2(a+2)^2(a-2)}$$

$$= \frac{4a^3+8a^2-a-2-2a^3+6a+4-2a^3-14a^2-32a-24}{2(a+2)^2(a-2)}$$

resumiendo términos semejantes y simplificando, queda:

$$= \frac{-6a^2-27a-22}{2(a+2)^2(a-2)} = \frac{6a^2+27a+22}{2(a+2)^2(2-a)}$$

AUTOEVALUACIÓN 4.

Efectuar las operaciones indicadas y simplificar.

Restar:

1.- $\frac{1}{2}$ de $\frac{4b}{a} = \frac{\qquad}{2a}$

2.- $\frac{2a+5}{2a}$, de $\frac{1}{10a} = \frac{\qquad}{10a}$

3.- $\frac{y-3}{xy}$, de $\frac{x+5y}{x} = \frac{\qquad}{x\,y}$

4.- De, $\frac{7x-4}{4}$, restar $\frac{3x+2}{3}$ $\frac{\qquad}{12}$

5.- De, $\frac{4}{rs}$, restar $\frac{2-t}{rt} = \frac{\qquad}{rst}$

6.- De, $\frac{b-2a}{20a}$, restar $\frac{a-3b}{24b} = \frac{\qquad}{120ab}$