AUTOEVALUACIÓN 4.

1.- $8b-a$

2.- $1-10a-25$

3.- $5y^2+xy-x+3$

4.- $9x-20$

5.- $4t-2s+st$

6.- $6b^2+3ab-5a^2$

7.- $3-2a-a^2$

8.- x^2-2x-1

9.- $a(x-y-z)-2yz$

10.- c^2+c-1

AUTOEVALUACIÓN 5.

1.- -5

2.- b

3.- $a+2$

4.- 1

5.- 1

6.- 1

7.- 0

8.- $-6a^2+11a-54$

9.- $-16a-19b$

10.- $a-6$

CAPITULO 2.

RELACIONES Y FUNCIONES.

2-1 INTRODUCCIÓN.

La mayoría de las personas tienen la idea de que números y matemáticas es lo mismo. Es común que al hablar de un matemático, se opine que dicha persona vive sumergida en un mundo en el que solo hay números, con los cuales adquiere tal familiaridad que, incluso, es de esperarse que realice operaciones aritméticas en un abrir y cerrar de ojos. Sin embargo, tal opinión es falsa, más con ello no queremos decir que sea falso que los números sean conceptos muy importantes para la matemática y por consecuencia para el matemático; lo que intentamos aclarar es que el concepto de número, a pesar de su gran importancia, no es el único que ocupa el interés de la matemática, pues hay muchísimos otros tanto o más importantes que éste. Además, el concepto de número no es elemental, es decir, no es posible alcanzar su comprensión sin que previamente se hayan entendido otros conceptos que sí son elementales.

En este contexto la palabra elemental no significa necesariamente sencillo o fácil; aquí se refiere a un concepto que ya no puede ser explicado en términos de otros y que, además, a partir de él se pueden construir conceptos más elaborados y complejos.

Si nos viéramos obligados a definir lo que es la matemática con un mínimo de palabras, estaríamos más cerca de la realidad al decir que es la cienica que se dedica al estudio de las funciones, que si dijéramos, como es común, que es la ciencia que se dedica al estudio de los números.

Tradicionalmente el concepto "función" ha estado íntimamente asociado, en nuestro lenguaje diario, con la noción de "variación" o "cambio". Históricamente, ésta parece ser la motivación que condujo a introducir la idea de función en la matemática: si la masa M de un cuerpo varía, entonces la fuerza F que lo mueve varía también, en función de la masa según la ley F=Ma; si el radio r de un círculo varía, entonces, el área A del círculo varía también en función del radio según la fórmula $A = \pi r^2$; durante muchos años esta fué la única interpretación que se dió al concepto de función.

La definición de función que nosotros adoptamos fué introducida en la matemática en el presente siglo. Tiene la peculiaridad de que cubre la noción "relación entre dos variables", pero asimismo, describe o mejor dicho, permite describir relaciones de carácter mucho más general entre elementos de dos conjuntos. En nuestro caso, los dos conjuntos pueden ser enteramente arbitrarios y la relación o regla que asocie a sus elementos admite un grado de generalidad mucho más allá de la dependencia de carácter algebráico entre dos números.

Una de las cualidades que se le puede atribuir a la idea de función que adoptamos, consiste en su amplia aplicabilidad y cómodo manejo en casi todas las disciplinas del conocimiento humano, por ejemplo: Biología, Economía, Antropología, Sociología, Lingüística, Demografía, Genética, etc.; lo cual ha hecho de la matemática un lenguaje adecuado para la descripción de una amplísima gama de fenómenos, sin más limitaciones en esta aplicabilidad, que el ingenio del usuario.

2-2 CORRESPONDENCIA DE UNO A UNO.

Dados dos conjuntos A y B decimos que están en *correspondencia de uno a uno* si es posible aparear sus elementos en tal forma que cada uno de los elementos de A esté apareado con exactamente un elemento de B y cada uno de los elementos de B esté apareado con exactamente un elemento de A.

Ejemplo 1.

$A = \{a, b, c\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$

Están *en correspondencia de uno a uno* porque podemos mostrar los siguientes pares de elementos:

$$\begin{array}{ccc} A & = & \{a, & b, & c\} \\ & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ B & = & \{2, & 4, & 6\} \end{array}$$

La anterior no es la única manera de aparear los elementos de A con los elementos de B. La siguiente también es posible:

$$A = \{a, b, c\}$$

$$B = \{2, 4, 6\}$$

Los conjuntos A y B, que hemos usado, son conjuntos *finitos*: ambos tienen tres elementos. En una forma muy simple *podemos decir que un conjunto es finito si el número de sus elementos es cero o un número natural.* Todo conjunto que no es finito es *infinito*.

Ejemplo 2.

$$A = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Es *infinito porque el número de sus elementos no es ni cero ni un número natural.*

Dos conjuntos *finitos*, cuando es posible ponerlos en correspondencia de uno a uno, tienen el mismo número de elementos.

2-3 RELACIONES BINARIAS.

Par ordenado.

El concepto de *par ordenado* es muy importante en matemáticas.

Un par ordenado tiene dos elementos tomados en un orden preciso.

Ejemplo 3.

La dirección de un domicilio, nos da un par ordenado, el nombre de la calle y el número,

Ave. Juárez 35

Un par ordenado se escribe encerrándolo entre paréntesis y separando sus componenetes con una coma, (Ave. Juárez, 35). Ave. Juárez representa al *primer elemento* del par ordenado y 35 al *segundo*.

Si consideramos el par ordenado (7,3) no será el mismo que el par ordenado (3,7):

(7, 3): primer elemento 7; segundo 3.

(3, 7): primer elemento 3; segundo 7.

El par ordenado (7,3) tiene como su *opuesto* el par ordenado (3,7). Dichos pares son opuestos. El alumno debe aprender a localizar puntos en el plano, podemos mostrar lo anterior:

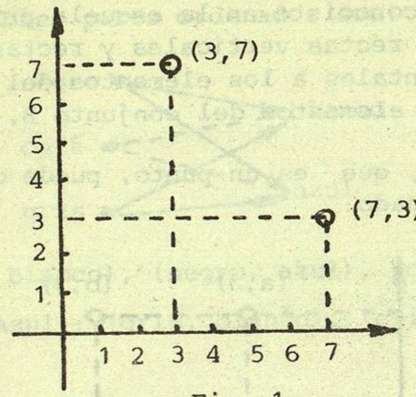


Fig. 1.

Producto cartesiano.

Supongamos que tenemos los conjuntos A= {a, b} y B = { 2, 3}. El *producto cartesiano* de los conjuntos A y B, escrito A X B, es el *conjunto* de todos los *pares ordenados* cuyos primeros elementos los tomamos de A y cuyos segundos se toman de B:

A = {a, b}

B = {2, 3}

A X B= {(a,2), (a,3), (b,2), (b,3)}

Para estos conjuntos A y B, podemos considerar otro producto cartesiano y obtener un conjunto de *pares ordenados* completamente diferentes:

A = {a, b}

$B = \{2, 3\}$

$B \times A = \{(2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}$

Representemos lo anterior gráficamente. Usemos esquemas como los que tú conociste en la escuela primaria. Tracemos una cuadrícula: rectas verticales y rectas horizontales. Asignemos las horizontales a los elementos del conjunto A y las verticales a los elementos del conjunto B.

La *intersección*, que es un punto, puede designarse por medio de un par ordenado:

A x B

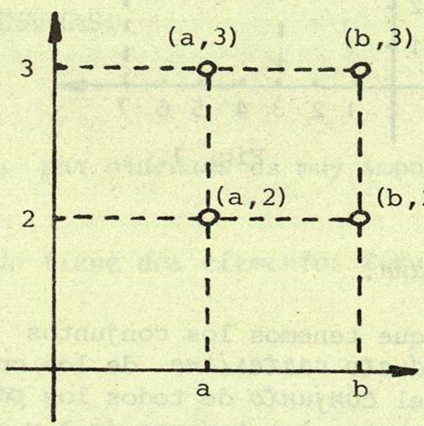


Fig. 2.

Obsérvese cuántos elementos tienen los conjuntos A y B y cuántos pares ordenados fue posible formar.

Ejemplo 4.

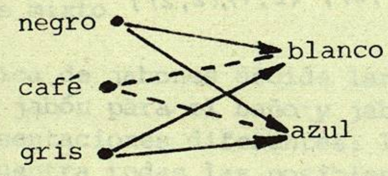
Un muchacho tiene tres pantalones: uno negro, otro café y otro gris. También cuenta con dos camisas: una blanca y otra azul. Encontrar de cuántas maneras diferentes es posible que se vista, tomando como primeros elementos a los pantalones.

Nombremos P, al conjunto de los pantalones y C al de las camisas:

P = {negro, café, gris}

C = {blanco, azul}

Los posibles pares ordenados son:



(negro, blanco), (negro, azul), (café, blanco)

(café, azul), (gris, blanco), (gris, azul)

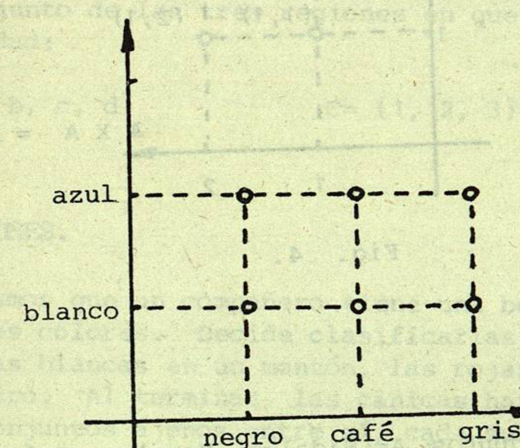


Fig. 3.

O sea que el *producto cartesiano* nos da seis pares ordenados que representan las seis posibles maneras de vestirse.

¿Cuántas maneras diferentes de vestir encontrarías si consideras como primer conjunto al de las camisas?

Hasta ahora hemos considerado dos conjuntos diferentes pero el conjunto A puede no ser diferente del conjunto B; por ejemplo A X A es el producto cartesiano de A por sí mismo. Si el conjunto A = {1,2} los pares ordenados serían:

A X A= {(1,1), (1,2), (2,1),(2,2)}

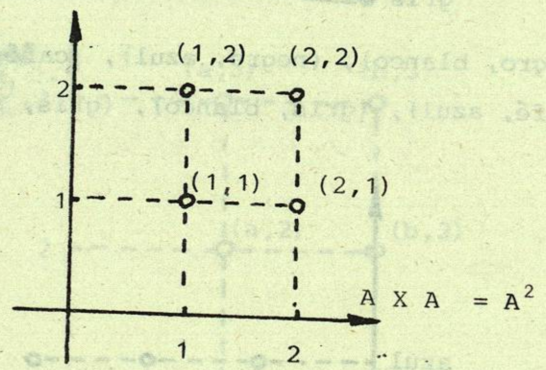


Fig. 4.

AUTOEVALUACIÓN 1.

1.- Dados los conjuntos: A={Hidalgo, Morelos, Juárez, Bolívar} y B= {x|x es un mes del año}, forma los pares ordenados pensando en el mes de nacimiento de cada uno de los elementos del conjunto A. Toma primero a los elementos del conjunto A.

2.- Forma los pares ordenados del producto cartesiano AXB, de los conjuntos siguientes:

A= {arroz, fideos} y B= {huevos, legumbres, carne}

3.- En un club se tienen los siguientes conjuntos de jugadores de tenis:

A= {Luis, Juan}

B= {Margarita, Alba, Esthela}

Encuentra todas las posibles formas de tener un equipo de dobles mixto.

4.- Una fábrica de jabones decide lanzar a la venta dos productos: jabón para el baño y jabón para la ropa, en tres presentaciones diferentes: líquida, sólida y en polvo. Encuentra todas las posibles opciones que se ofrecerán al consumidor.

5.- Calcule el producto cartesiano A X C cuando A es el conjunto de cuatro agentes vendedores de una empresa y C el conjunto de las tres regiones en que se ha dividido la ciudad:

A= {a, b, c, d} C= {1, 2, 3}

2-4 RELACIONES.

Supongamos que un compañero tiene una bolsa con canicas de diferentes colores. Decide clasificarlas de acuerdo con el color, las blancas en un montón, las rojas en otro, las azules en otro. Al terminar, las canicas han quedado separadas en subconjuntos ajenos entre sí, cada subconjunto se caracteriza por su color. Dos canicas están en el mismo montón, si y solo sí, tienen el mismo color: estas dos canicas decimos que están *relacionadas* por la propiedad de tener el mismo color. Si no tienen el mismo color no se les puede *relacionar*. Nuestro universo es ahora el de las canicas. Las *relaciones* establecen *proposiciones abiertas* con dos variables siendo una variable un símbolo que admite la posibilidad de representar cualquier elemento de un conjunto dado.

"a" tiene el mismo color que "b" en esta proposición abierta, consideramos a las canicas que pueden ocupar los lugares de "a" y "b".

Ejemplo 5.

Sean los conjuntos A= {1,2} y B= {3,4} y la propiedad que *relaciona* a sus elementos:

R = "a" tiene una unidad menos que "b". Encontrar los posibles pares ordenados que cumplen la propiedad indicada e la proposición abierta.

Escribamos todas las parejas del producto cartesiano,

A X B = {(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)};

de estos pares ordenados hay solamente uno (2,3) que cumple la propiedad establecida por la proposición abierta. Este par por tanto, está en la *relación* que llamaremos R: R = {(2,3)}, lo anterior se representa con la notación:

A R B

Ejemplo 6.

Sea el conjunto A= {1,2,3,4}. Si establecemos para los elementos de estos conjuntos que deba cumplirse la propiedad

"a" es divisor de "b"

Encontrar las posibles parejas que la cumplan. Escribimos los pares ordenados del producto cartesiano A X A:

A X A: {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)}

Los pares ordenados que cumplen con la propiedad establecida y que están, por tanto, en la relación son:

R = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)}

Si observamos con cuidado estos dos ejemplos, obtendremos conclusiones:

a) ¿Qué es una *relación?*

Una relación es un conjunto de pares ordenados.

b) ¿Qué relación existe entre R y el producto cartesiano?

La relación que existe es la relación de inclusión; toda relación es un subconjunto del producto cartesiano.

$R \subset$ (A X B) $\qquad R \subset$ A X A

Ejemplo 7.

Si nuestro universo es U = {enteros positivos} y tenemos la proposición abierta con dos variables: 3x + y = 8, encontremos los posibles pares ordenados que la hagan verdadera.

Escribamos de la siguiente manera nuestra proposición abierta:

y = 8 - 3x

Ensayemos valores para x que nos den el valor de y:

Si x = 0; y= 8- 3(0) = 8; par ordenado (0, 8)
x = 1; y= 8- 3(1) = 5; par ordenado (1, 5)
x = 2; y= 8- 3(2) = 2; par ordenado (2, 2)
x = 3; y= 8- 3(3) =-1; par ordenado (3,-1)

Como nuestro universo es {enteros positivos}, no podemos aceptar el último par ordenado obtenido; el segundo componente de ese par es un entero negativo.