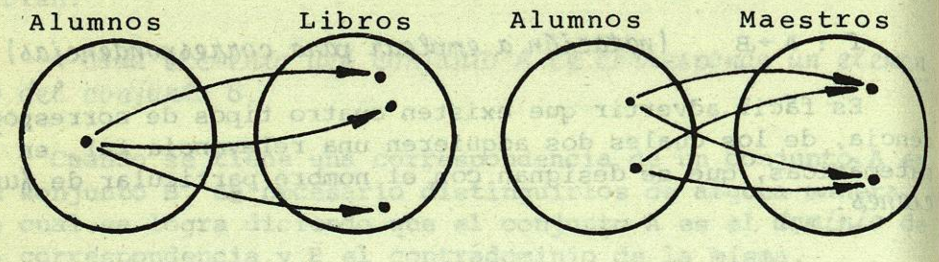
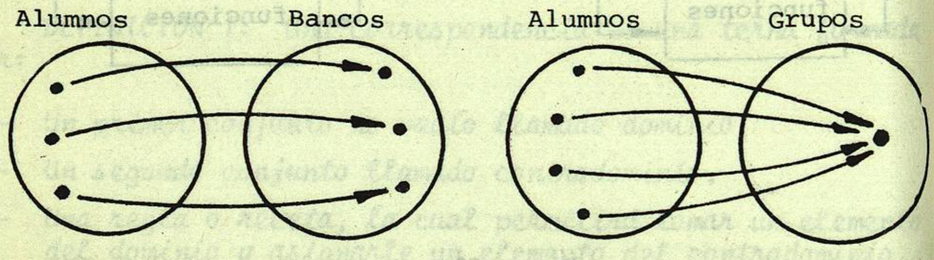


uno a muchos
(no es función)

muchos a muchos
(no es función)

son funciones:



uno a uno

muchos a uno

Fig. 21.

Ejemplo 9.

Al examinar a su paciente, un médico ordena:

"Necesito una gráfica de las temperaturas; deben tomarse éstas cada hora".

En este caso se va a establecer una correspondencia entre dos conjuntos: conjunto de horas y conjunto de temperaturas, la gráfica que sigue muestra tal situación.

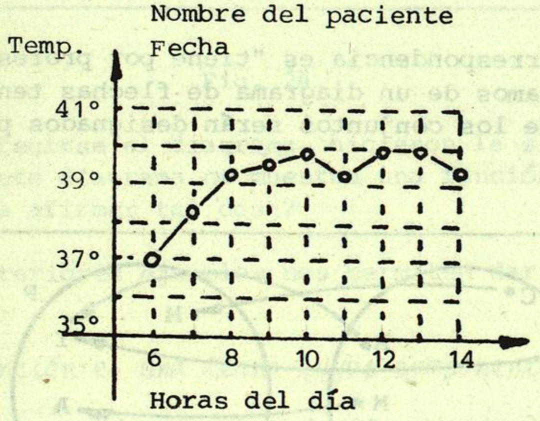


Fig. 22.

En esta gráfica de temperaturas puede advertirse la siguiente situación: El enfermo podrá tener la misma temperatura varias veces, pero nunca se podrá repetir el mismo momento; se trata de una *función*.

Ejemplo 10.

Si se tiene una lista de profesionales como la que sigue:

Nombre	Profesión.
Carlos	Médico
Arturo	Ingeniero
Gabriel	Ingeniero
Jorge	Contador
Benito	Licenciado
Mario	Arquitecto

y la regla de correspondencia es "tiene por profesión", y por comodidad usamos de un diagrama de flechas tendremos: (los elementos de los conjuntos serán designados por su primera letra):

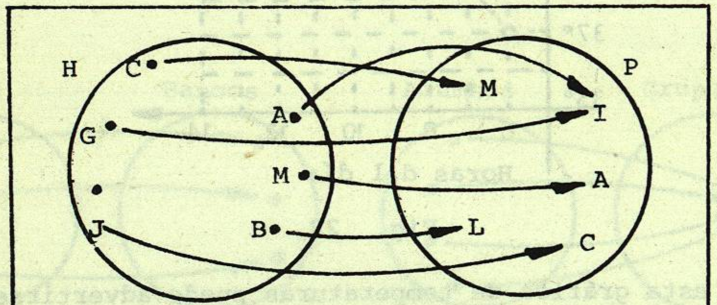


Fig. 23.

Tal esquema nos permite observar que de cada elemento de H parte una flecha.

Cuando el esquema le fue mostrado a Jorge, éste protestó diciendo: "No es correcto, han olvidado que tengo dos profesiones; de acuerdo con este diagrama están omitiendo un No deben olvidar que soy contador y licenciado". Ante tal

situación, el diagrama tuvo que corregirse.

Diagrama corregido.

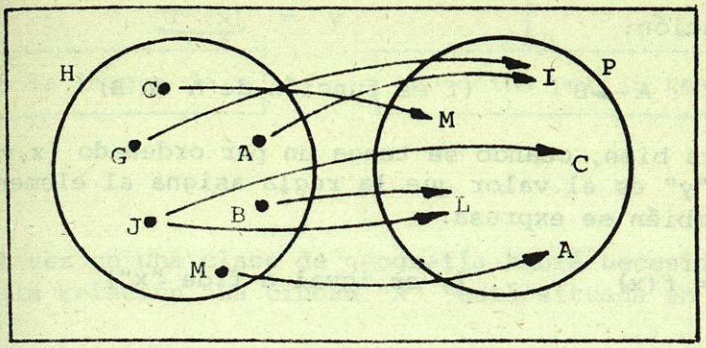


Fig. 24.

Al corregirse el diagrama, hicieron la siguiente advertencia: "Este diagrama no muestra una función". ¿En qué se basaron para afirmar tal cosa?

Los anteriores ejemplos nos permiten dar la definición de *función*.

Una función es una terna cuyos componentes son:

1.- *Un primer conjunto no vacío llamado dominio de la función.*

2.- *Un segundo conjunto llamado contradominio de la función.*

3.- *Una regla de correspondencia con las siguientes características:*

a) *Por medio de esta regla, a cualquier elemento del dominio de la función se le puede asociar un elemento del contradominio.*

b) *Ningún elemento del dominio ha de quedarse sin su asociado en el contradominio.*

c) *Ningún elemento del dominio puede tener más de un asociado en el contradominio.*

Notación:

f : A → B (f es función de A en B)

Ahora bien, cuando se tenga un par ordenado (x,y), se dice que "y" es el valor que la regla asigna al elemento "x", lo que también se expresa:

y= f(x) (y es igual a f de "x")

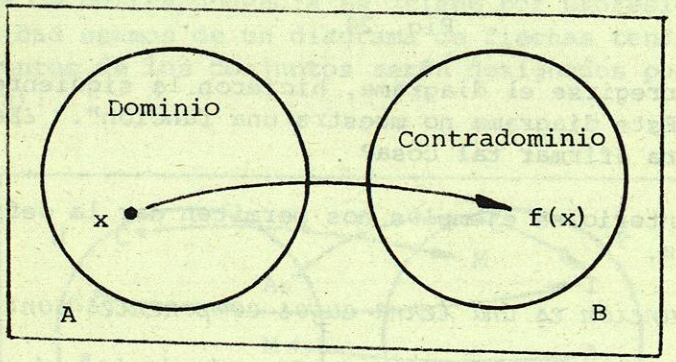


Fig. 25.

A f(x) se le llama *"imagen"* de x.

Debemos ser cuidadosos para no interpretar en forma errónea esta notación; el siguiente esquema será de utilidad

f ( ) = $\boxed{}$ ← el elemento que pertenece a B y que está asociado con x bajo la regla f.

↑

un elemento que pertenece a A

El siguiente esquema nos permite interpretar lo que llamamos *imagen* del *dominio* de una *función*.

f (x) = y

"y" es la imagen de x | producida por la regla f

Tal vez en una clase de geografía habrá necesidad de emplear la relación "La ciudad "x" está situada en el país "y".

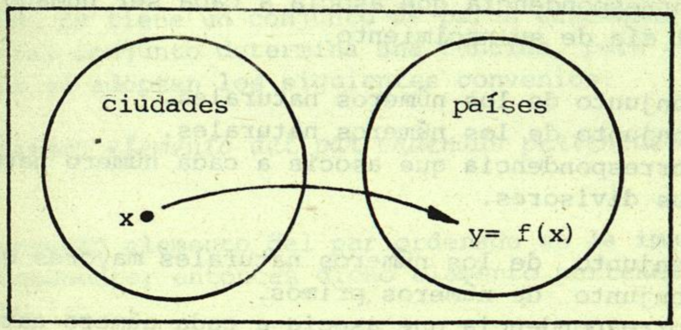


Fig. 26.

Se tendrán expresiones como: "París es una ciudad que se encuentra situada en Francia". "Roma es una ciudad que se encuentra situada en Italia". "Barcelona es una ciudad que se encuentra situada en España". "Madrid es una ciudad que se encuentra situada en España".

Se observa que tales expresiones están referidas a dos conjuntos y una receta que cumple con las tres características citadas; es decir, que se trata de una función, entonces podemos emplear la notación:

f (x) = y

f (París) = Francia

f (Roma) = Italia
f(Barcelona) = España
f (Madrid) = España

AUTOEVALUACION 3.

Diga si cada una de las siguientes ternas son o no funciones:

1.- A: Conjunto de los seres humanos.
B: Conjunto de los días del año.
f: Correspondencia que asocia a cada ser humano con el día de su nacimiento.

2.- N: Conjunto de los números naturales.
N: Conjunto de los números naturales.
f_1: Correspondencia que asocia a cada número natural sus divisores.

3.- A: Conjunto de los números naturales mayores que 1.
B: Conjunto de números primos.
f_2: Correspondencia que asocia a cada número natural sus factores primos.

4.- X: Conjunto de todos los números reales (positivos, cero, negativos, enteros, quebrados, raíces, etc.)
Y: Conjunto de los números reales.
K: Correspondencia que a cada número real le asocia su cuadrado.

2-9 FUNCIONES COMO CONJUNTOS DE PARES ORDENADOS.

Si el dominio de una función es un conjunto finito y éste consta de muy pocos elementos, dicha función queda determinada con facilidad por medio de un conjunto de pares ordenados.

$A = \{(1,3),\ (2,4),\ (3,5),\ (4,6)\}$

Primer componente del par.	Segundo componente del par.
1	3
2	4
3	5
4	6

Cuando se tiene un conjunto de pares ordenados y se indica que tal conjunto determina una función, para evitar ambigüedades se adoptan los siguientes convenios:

El primer elemento del par ordenado pertenece al dominio.

El segundo elemento del par ordenado es la imagen del primer componente; entonces dicho elemento pertenece al contradominio.

(a,b) — b es la imagen de a y pertenece al contradominio.
a es el elemento del dominio.

Dicho conjunto de pares debe cumplir con la siguiente condición: *no deben existir pares ordenados cuyas primeras componentes sean iguales.*

2-10 GRÁFICA DE UNA FUNCION.

El conjunto de pares ordenados que sirve para designar una función recibe el nombre de *grafo*; ¿por qué razón usamos tal nombre? Tal vez se deba a que cuando a los pares ordenados que forman el grafo se les asigna un punto del plano, dicho conjunto de puntos constituye lo que se llama gráfica de la función

DEFINICION 2: Sea f *una ley de correspondencia de una función de un conjunto* A *en un conjunto* B,

$$f : A \rightarrow B$$

Al conjunto de los pares ordenados $(x, f(x))$, *con* $x \in A$, *que a su vez es subconjunto del producto cartesiano* $A \times B$, *se le llama grafo de la función* f.

2-11 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN.

Ejemplo 11:

$A = \boxed{\{(1,3),\ (2,4),\ (3,5),\ (4,6)\}}$ grafo de la función

Dominio: primeros componentes de los pares ordenados; dichos elementos se sitúan en el eje horizontal $\{1,2,3,4\}$.

Contradominio: segundos componentes de los pares ordenados; tales elementos se sitúan en el eje vertical $\{3,4,5,6\}$.

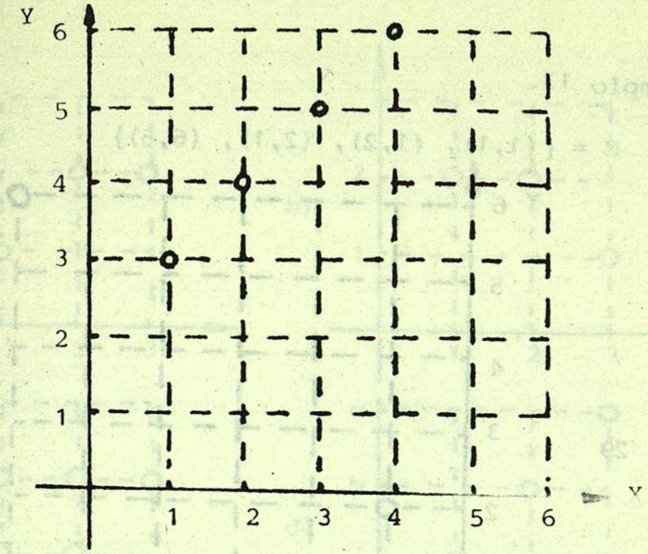


Fig. 27

Ejemplo 12:

$C = \{(1,3),\ (2,1),\ (3,3),\ (4,1)\}$

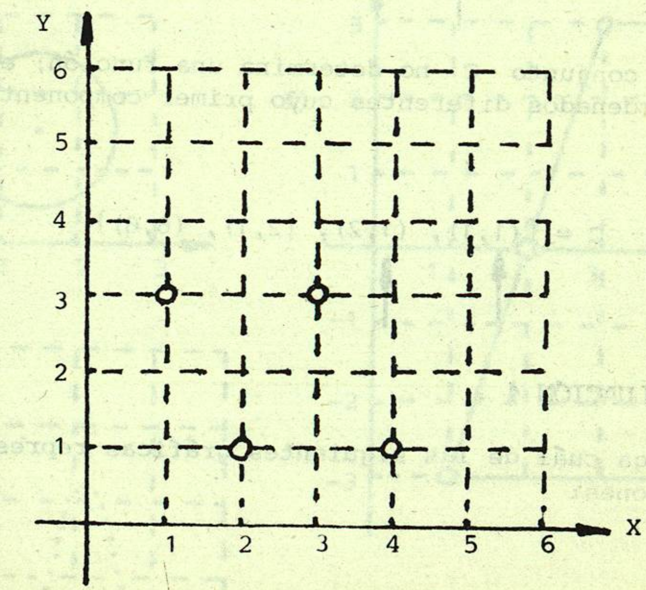


Fig. 28

Ejemplo 13.

$C = \{(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (6,6)\}$

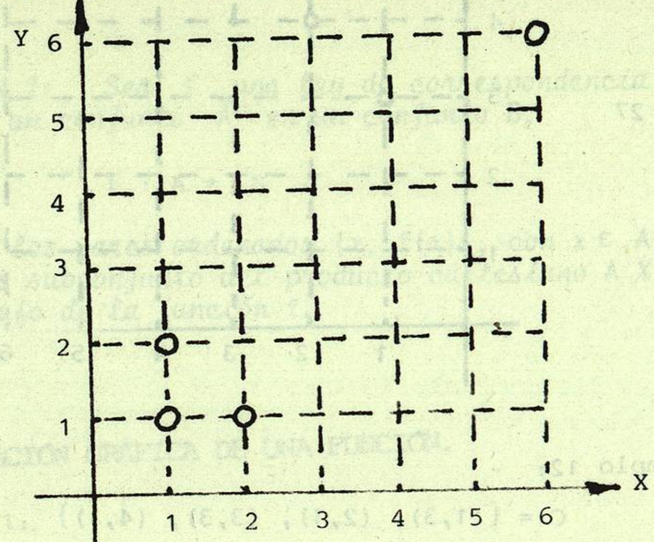


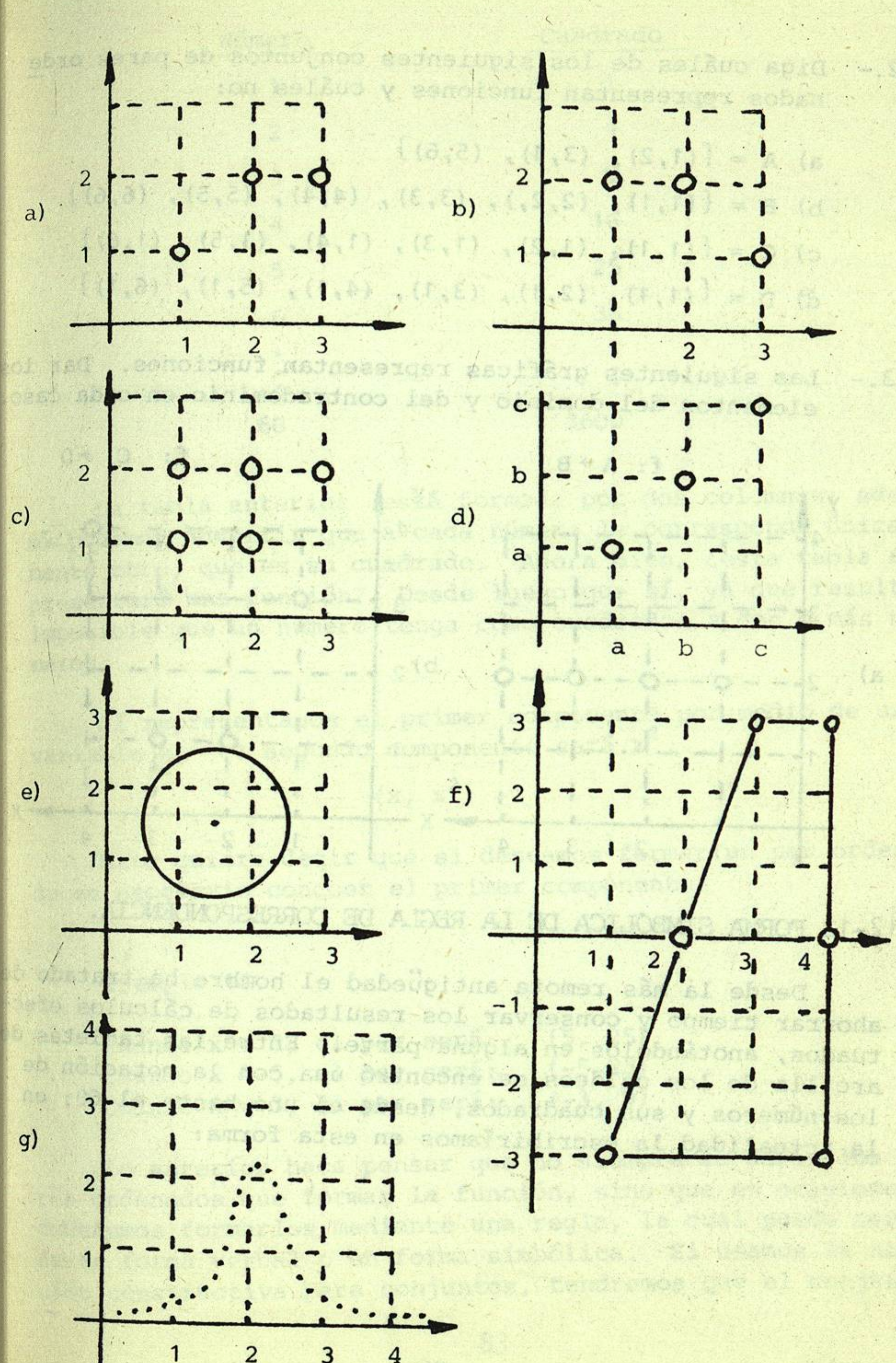
Fig. 29

El conjunto C no determina una función; existen dos pares ordenados diferentes cuyo primer componente es el mismo.

$C = \{(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (6,6)\}$

AUTOEVALUACIÓN 4 .

1.- Diga cuál de las siguientes gráficas representan funciones:



2.- Diga cuáles de los siguientes conjuntos de pares orde-
nados representan funciones y cuáles no:

a) $A = \{(1,2), (3,4), (5,6)\}$

b) $B = \{(1,1), (2,2,), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$

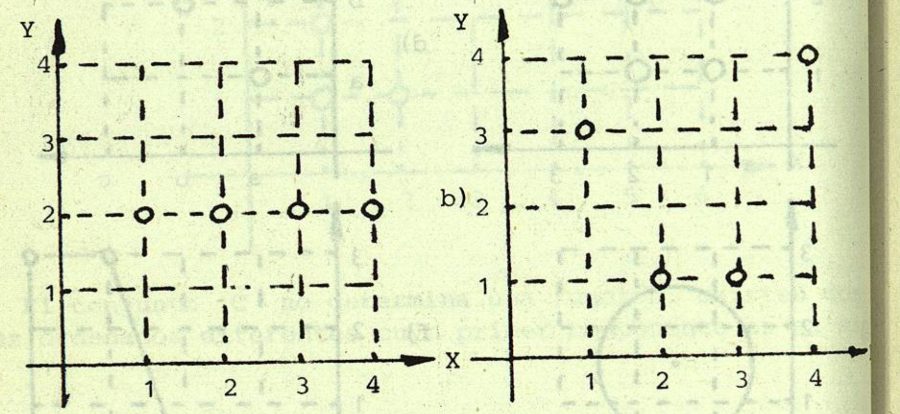
c) $C = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\}$

d) $D = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1)\}$

3.- Las siguientes gráficas representan funciones. Dar l
elementos del dominio y del contradominio en cada cas

f: $A \to B$ f: $C \to D$

a)   b)



2-12 FORMA SIMBÓLICA DE LA REGLA DE CORRESPONDENCIA.

Desde la más remota antigüedad el hombre ha tratado
ahorrar tiempo y conservar los resultados de cálculos efe
tuados, anotándolos en alguna parte. Entre las tabletas
arcilla de los caldeos se encontró una con la notación de
los números y sus cuadrados, desde el uno hasta el 60; en
la actualidad la escribiríamos en esta forma:

Número	Cuadrado
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
⋮	⋮
60	3600

La tabla anterior está formada por dos columnas; además podemos advertir que a cada número le corresponde únicamente otro, que es su cuadrado. Ahora bien, ¿esta tabla representará una función? Desde luego que sí, ya que resulta imposible que un número tenga como cuadrados a dos o más números.

Si representamos el primer componente por medio de una variable x, el segundo componente será x^2.

$$(x, x^2)$$

Esto quiere decir que si deseamos formar un par ordenado es necesario conocer el primer componente.

Ejemplo 14.

Cuando $x = 5$, el par será: $(5, 25)$
Cuando $x =-5$, el par será: $(-5,25)$
Cuando $x =-3$, el par será: $(-3, 9)$

Lo anterior hace pensar que no siempre se darán los pares ordenados que forman la función, sino que en ocasiones deberemos formarlos mediante una regla, la cual puede ser dada en forma verbal o en forma simbólica. Si usamos la notación constructiva para conjuntos, tendremos que el conjunto