AUTOEVALUACIÓN 4.

1.- **a) Sí.** b) Sí. c) No. d) Sí.
e) No. f) No. g) Sí.

2.- **A sí.**
B sí.
C no.
D sí.

3.- a) **Dominio=** {1,2,3,4}
Contradominio={2}

b) Dominio= {1,2,3,4 }
Contradominio={ 3,1,1,4}

AUTOEVALUACIÓN 5.

1.-	f(x)	f(x)	f(x)
	-1	-7	1
	0	-5	16
	3	-3	31
	8	-9	-17

2.- a) -1 b) -3 c) 9 d) -11
e) -3 f) -9 g) -5 h) 7

3.- a) 3 b) 3 c) 5 d) 15
e) 9 f) 5

4.- a) -3 b) -7 c) -9 d) -13
e) -23 f) 27

CAPITULO 3.

Ecuaciones Lineales en una Variable.

LECCIÓN 1.

3-1 INTRODUCCIÓN.

A las matemáticas se le ha llamado muchas veces la "servidora de las ciencias". Desde tiempos muy remotos la ciencia y las matemáticas han estado relacionadas.

Así, los babilonios y griegos la usaron en la astronomía, Eratóstenes usó las matemáticas para medir la circunferencia de la tierra, y Arquímides expuso los principios de la mecánica.

En la época del Renacimiento, Galileo y Kepler pusieron los cimientos de la astronomía y la dinámica moderna. Hacia el año 1637, las matemáticas crecieron con el descubrimiento de la Geometría Analítica por Descartes y el cálculo infinitesimal por Newton y Leibniz aproximadamente por el año 1700.

A la entrada del siglo XX, empezó una revolución científica. La era de la física relativista había comenzado. Sin la contribución de Einstein, Lorentz, Dirac, Heisenberg, la era atómica moderna hubiera sido imposible. La ciencia está reconstruyendo nuestro mundo, y las matemáticas han hecho que esas ciencias sean una realidad.

2-2 INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES LINEALES.

Una ecuación es el enunciado que se expresa en términos matemáticos para indicar que las cantidades o expresiones a ambos lados de un signo = son iguales. Se dice que una ecuación es la expresión de la igualdad del valor de dos cantidades. Una expresión como $C = \pi D$ es una ecuación simple. La C es el símbolo de la circunferencia D el diámetro del círculo y π la letra griega empleada como símbolo para la constante 3.14159. La ecuación $C = \pi D$ indica que la circunferencia C es igual al producto de π por el diámetro D. Los símbolos C y D se usan en este caso para representar cantidades desconocidas.

Una ecuación es, por tanto, una combinación de cantidades numéricas y símbolos, que cuando se suman, se multiplican o se dividen (según lo indiquen los signos en una expresión) son iguales a otra cantidad establecida. Una ecuación generalmente es una pregunta:

¿Qué número sumado a 7 es igual a 21? La letra X se usa comúnmente para representar la cantidad desconocida. Este problema puede expresarse como una simple - ecuación que puede resolverse a simple vista.

$$X + 7 = 21$$

$$14 + 7 = 21$$

entonces, $X = 14$

Por tanto:

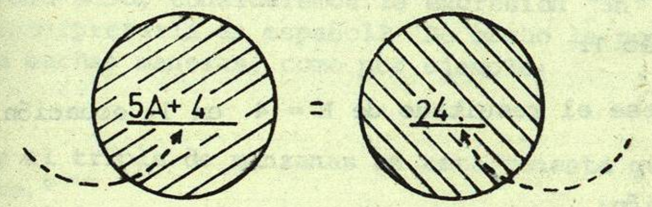
Cuando se indican las operaciones de resta, multiplicación y división, también se hace en cada caso una pregunta por ejemplo:

¿Qué número restado de 10 es igual a 4?
¿Qué número multiplicado por 6 es igual a 4?
¿Qué número dividido por 5, un número dado(o cualquier símbolo), es igual a 10, una cantidad fijada?

Partes de una ecuación.

En todas las ecuaciones, las expresiones que aparecen a uno y otro lado del signo de igualdad (=) se llaman miembros. Usualmente, se usa el término primer miembro para indicar la cantidad que se coloca a la izquierda del signo, y segundo miembro, a la cantidad que va a la derecha del signo de igualdad.

El primer miembro en la ilustración es 5A + 4; el segundo miembro 24.



Equilibrio de una ecuación.

En toda ecuación ambos miembros deben ser iguales y se dice que la ecuación está equilibrada. Para mantener una ecuación en equilibrio, los números iguales deben aumentarse o disminuirse, multiplicarse o dividirse por cantidades iguales.

Después de que se ha resuelto una ecuación, el valor obtenido para una cantidad desconocida se sustituye en ella. Si la ecuación está equilibrada, según lo indica la igualdad de ambos miembros, la solución es correcta.

Esta operación de comprobación es siempre esencial para probar la exactitud de las dimensiones y de las cantidades. Es relativamente sencillo sustituir los valores calculados en la ecuación original para saber la exactitud de los cálculos.

Reglas para probar una ecuación.

1.- Sustitúyase el valor calculado de cualquier letra o símbolo en la ecuación original.

2.- Ejecútese cada operación como se indica.

NOTA: La ecuación esta equilibrada cuando sus valores a ambos lados son iguales.

Ejemplo 1.

Pruébese el resultado de B = 4 en la ecuación 6B = 24

Solución:

Primer paso: Sustitúyase el valor de B en la ecuación original (B = 4)

$$6(4) = 24$$

Segundo paso: multiplíquese.

$$6 \times 4 = 24$$

Tercer paso: Compruébese el resultado. Como ambos miembros de la ecuación son iguales, la respuesta B = 4 es correcta.

3-3 LAS MATEMÁTICAS Y NUESTRO IDIOMA.

En el curso pasado aprendimos a usar algunos símbolos que es el idioma propio de las matemáticas. Por ejemplo, los símbolos como =, ≠, +, >, ε, etc. forman parte de este idioma. Estos y otros símbolos nos capacitan para escribir frases y proposiciones abiertas.

Hemos trabajado ya con frases y proposiciones abiertas. Ahora trataremos que el estudiante vea más claramente estas ideas. Para ello, consideremos la expresión "3n" ¿Cómo podríamos interpretarla en español? De hecho la podemos interpretar de muchas maneras, como por ejemplo:

"Hay el triple de manzanas en esta canasta que en la otra."
"Hoy tengo ahorrado el triple de dinero que lo que tenía ayer."
"El es tres veces más grande que ella."
"El largo del salón es tres veces mayor que el ancho."

Evidentemente, existen muchas otras interpretaciones de la frase abierta.

Empezamos con la frase abierta "3n" y la traducimos a muchas frases diferentes en español. Pero, cabe mencionar que en todas ellas estamos hablando de dos números o dos cantidades. En todos ellos hay un *punto de partida*. Podrá haber un *número desconocido* de manzanas o de dinero o de edades o de dimensiones. Este número desconocido se representó por la letra "n", que previamente identificamos como una *variable*. La segunda cantidad fue escrita siempre como 3 veces mayor que la primera cantidad, o "3n".

Pudimos haber comenzado con la frase en español y traducirla en una expresión matemática. A continuación se exponen varios ejemplos:

FRASE: "Hay 3 manzanas más en la primera canasta que en la segunda."

EXPRESIÓN: " $x+3$ ", donde $x=$ manzana.

FRASE: "El doble de un número aumentado en 8."

EXPRESIÓN: "$2y+8$", donde $y=$ número.

Los símbolos "+" y "-" tienen muchos significados equivalentes en español. Por ejemplo, el signo (+) puede significar "más que", "aumentado en", "sumado a", "más largo que", "más viejo que", "más alto que", etc. El signo (-) puede significar "menor que", "disminuido en", "más corto que", "más joven que", "más bajo que", etc.

AUTOEVALUACIÓN 1.

Traducir cada una de las siguientes expresiones en frases equivalentes en español.

1.- $x + 5$	6.- $1/2\ (5x-3)$
2.- $(2n-3)+ 4$	7.- y^2-7
3.- $5 + 2y$	8.- $t + 2(t+1)$
4.- $x + y$	9.- $8(3a+4)$
5.- $2x + 3$	10.- $K + 5K$

Escribir en forma de expresión matemática cada una de las siguientes frases:

11.- La edad de un niño hace 5 años si él tiene exactamente x años.

12.- El número de huevos que hay en z docenas-

13.- Un tercio de un número.

14.- La edad que tendrá Pedro dentro de 10 años si ahora tiene *y* años.

15.- El número de centavos que hay en *d* monedas de diez centavos y c monedas de 25 centavos.

16.- El doble de un número aumentado en la mitad del mismo número.

17.- El siguiente al número natural z.

18.- Un número par.

19.- Un número impar.

20.- Un número de 2 dígitos.

3-4 RESOLUCION DE ECUACIONES.

Conjunto solución.

Hasta ahora hemos hablado de proposiciones abiertas con una variable. Sabemos que el conjunto solución de una proposición de esta clase es el conjunto de valores del dominio de la variable que hacen verdadera la proposición. Si todos los números del dominio hacen que sea cierta, decimos que la proposición es una "identidad". Y si solo para algunos valores del dominio de la variable es verdadera la proposición, decimos que se trata de una igualdad condicional, o ecuación condicional, o más usualmente, por brevedad decimos que es una ecuación. Los elementos del conjunto solución de una ecuación reciben el nombre de raíces de la ecuación; también se dice que las raíces satisfacen la ecuación.

Hasta ahora hemos encontrado algunas veces las raíces de una ecuación por tanteos. Veremos ahora procedimientos sistemáticos para obtener el conjunto solución de una ecuación sencilla. Llamemos ecuación sencilla a una proposición abierta, con una variable, que tiene una sola raíz. La expresión que está a la izquierda del signo de igualdad se le llama primer miembro de la ecuación. La expresión que está a la derecha del signo igual recibe el nombre de segundo miembro de la ecuación.

Así, por ejemplo:

$$\underbrace{5y + 3 - 2y}_{\text{Primer miembro}} = \underbrace{2y - 1}_{\text{Segundo miembro}}$$

"Resolver" una ecuación significa encontrar su conjunto solución. Pero antes de ver esto debemos aprender dos propiedades importantes de la igualdad.

3-5 PROPIEDADES DE LA IGUALDAD.

Vamos a demostrar algunos teoremas relativos a la igualdad que nos serán muy útiles en este capítulo.

TEOREMA 1. Si a, b y c son números reales y a=b, entonces a + c = b + c. Esta es llamada la "propiedad de adición de los números reales"

"Demostración":

a+c es un número real.	(Propiedad de cerradura del conjunto de los números reales respecto a la adición).
a+c = a+c	(Propiedad reflexiva de la igualdad)
a=b	(Dato conocido)
a+c = b+c	(Puesto que a y b son iguales son nombres diferentes para el mismo número. Así pues, podemos sustituir "a" por "b" en el segundo paso).

TEOREMA 2. Si a, b y c son números reales y a=b, entonces a·c = b·c A esto se le llama la propiedad de multiplicación de los números reales.

"Demostración".

a.c es un número real.	(Propiedad de cerradura del conjunto de los números reales respecto a la multiplicación.)
a.c = a.c	(Propiedad reflexiva de la igualdad)
a = b	(Dato conocido)
a.c = b.c	

Estos teoremas lo que nos dicen es que: "podemos sumar el mismo número a ambos miembros de la ecuación, o podemos multiplicar los dos miembros de una ecuación por el mismo número. En cualquiera de los dos casos, se mantiene la igualdad.

3-6 OPERACIONES INVERSAS Y ECUACIONES EQUIVALENTES.

Considérese lo siguiente:

$$30 + 2 - 2 = 30 \qquad y + 2 - 2 = y$$

Nótese que el restar 2, anula el efecto de sumar 2 en ambos casos. Cuando dos operaciones están en tal forma que cada una anula lo que la otra hace, se dice que son *operaciones inversas*. Sumar un número y restar el mismo número son operaciones inversas.

Análogamente, multiplicar por un número y dividir por el mismo son *operaciones inversas*. Por ejemplo, si comenzamos con 12, multiplicamos por 4 y después dividimos por 4, tenemos 12x4 ÷ 4 = 12.

Ejemplo 2.

Consideremos ahora la ecuación: $x + 2 = 7$.

Solución:

Esto nos dice que cuando se le suma 2 a cierto número (x), el resultado es 7. Podemos anular la suma de 2 restando 2, o agregando el inverso aditivo de 2, a ambos miembros de la ecuación.

$x+2 + (-2) = 7 + (-2)$	(Por el teorema 1)
$x + 0 = 5$	(Propiedad del inverso aditivo y efectuando la suma).
$x = 5$	(Propiedad del elemento de identidad para la suma).

El conjunto solución de la ecuación es $\{ 5 \}$.

Nótese que $\{5\}$ es el conjunto solución de cada uno de los tres pasos de la ecuación original, puesto que la sustitución de x por 5 hará verdadera cada una de estas ecuaciones. Decimos que estas ecuaciones son *ecuaciones equivalentes*. En general, las ecuaciones equivalentes son las que tienen el mismo conjunto solución.

Ejemplo 3.

Consideremos ahora la ecuación: $5x = 10$

Solución:

Esto nos dice que cuando se le multiplica a un número (x) por 5, el resultado es 10. Análogamente que en el problema anterior, podemos eliminar el 5 dividiendo entre 5 ó multiplicar por el inverso multiplicativo de 5, a ambos miembros de la ecuación.

$(\frac{1}{5})(5x) = (\frac{1}{5})(10)$	(Por el teorema 2).
$1.x = \frac{10}{5}$	(Propiedad del inverso multiplicativo y efectuando la operación de multiplicación).
$x = 2$	(Propiedad del elemento de identidad de la multiplicación y efectuando la operación de división).

El conjunto solución es $\{2\}$. Al igual que el problema anterior el conjunto solución se cumple para las demás ecuaciones derivadas de la primera, puesto que son *ecuaciones equivalentes*.

En los ejemplos anteriores, el dominio de la variable es el conjunto de los números reales (R). Por convención de aquí en delante, cuando no se de el dominio de la variable se sobreentenderá que es el conjunto de los números reales.

AUTOEVALUACIÓN 2.

1.- Decir cuál es la operación inversa de cada una de las siguientes:

a) Ponerse los zapatos.
b) Cerrar la puerta.
c) Apagar la televisión.
d) Dividir los números por tres.
e) Doblar un número.
f) Aumentar un número en 7.

2.- Escribe el inverso aditivo y el multiplicativo de las siguientes expresiones:

a) 1	d) $5xy$
b) -3	e) $5+x$
c) $4x$	f) $4y-3x$