3.- Decir cuáles de los siguientes pares de ecuaciones son ecuaciones equivalentes.

a) $x = 2$; $2x = 6$

c) $3x = 12$; $2x = 8$

b) $x + 1 = 3$; $x + 2 = 4$

d) $y - 3 = -9$; $y = -6$

4.- Decir en cada caso, el número que debemos agregar a la expresión para que quede solamente x:

a) $x+3$
b) $x-1$
c) $x+9$
d) $x-3$
e) $x+1$
f) $x-2$
g) $x+7$

5.- Identificar el número por el cual debemos multiplicar la expresión para que quede solamente x:

a) $2x$
b) $\frac{1}{3}x$
c) $-\frac{1}{2}x$
d) $-4x$
e) $5x$
f) $\frac{7}{6}x$

Hallar los conjuntos solución de las ecuaciones siguientes. En todos los casos, comprobar los resultados en la ecuación original.

6.- $x+12 = 29$

7.- $y+28 = 50$

8.- $x-35 = 34$

9.- $39+x = 47$

10.- $x+18 = 8$

11.- $-5+y = -12$

12.- $6K = -3$

13.- $-\frac{2}{7}K = \frac{2}{3}$

14.- $-15z = -5$

15.- $8y = 13/2$

16.- $\frac{2}{3}q = 7$

17.- $-\frac{3}{4}r = -5$

3-7 APLICACION SIMULTANEA DE LOS TEOREMAS DE LA IGUALDAD EN LA RESOLUCION DE ECUACIONES LINEALES EN UNA VARIABLE.

Al resolver ecuaciones, a menudo es necesario usar los dos inversos, el aditivo y el multiplicativo. En general, es recomendable usar primero el inverso aditivo y después el inverso multiplicativo.

Ejemplo 4.

Resolver la ecuación $\frac{3y}{9} = 2$

Solución:

$\frac{3}{9}y = 2$ (Ecuación dada)

$(\frac{9}{3})(\frac{3}{9}y) = (\frac{9}{3})(2)$ (Teorema 1)

$1 \cdot y = \frac{18}{3}$ (Propiedad del inverso multiplicativo).

$y = 6$ (Propiedad del elemento de identidad para la multiplicación y efectuando la operación de división)

El conjunto solución es: $\{6\}$

Ejemplo 5.

Resolver la ecuación $z-4 = 3$

Solución:

$z - 4 + (4) = 3 + (4)$ (Por el teorema 1)

$z + 0 = 7$ (Propiedad del inverso aditivo y efectuando la operación de suma)

$z = 7$ (Propiedad del elemento de identidad para la suma)

En los ejemplos anteriores se ha visto la forma de usar los teoremas de la igualdad por separado y sus inversos tanto aditivo como multiplicativo. Ahora vamos a hacer uso de los dos teoremas y los inversos simultáneamente en ecuaciones del tipo $ax = bx+c$.

Ejemplo 6.

Consideremos ahora la ecuación:

$$3y + 7 = 5$$

Solución:

Esta ecuación es posible resolverla empleando ambos teoremas. Utilizando el teorema 1, con el inverso aditivo de tenemos,

$3y + 7 + (-7) = 5+(-7)$	(Teorema 1)
$3y + 0 = -2$	(Propiedad del inverso aditivo y efectuando la operación de suma)
$3y = -2$	(Propiedad del elemento de identidad para la suma de números reales);

ahora, aplicando el teorema 2 y usando el inverso multiplicativo de 3, tenemos,

$(\frac{1}{3})(3y) = (\frac{1}{3})(-2)$	(Teorema 2)
$1 \cdot y = -\frac{2}{3}$	(Propiedad del inverso multiplicativo y efectuando la operación de multiplicación)
$y = -\frac{2}{3}$	(Propiedad del elemento de identidad para la multiplicación)

El conjunto solución es: $\{-\frac{2}{3}\}$

Ejemplo 7.

Resolver la ecuación $8 = 11-6K$

Solución:

Aplicando el teorema 1 y utilizando el inverso aditivo de 6 K y 8, tenemos:

$8+(6K) = 11-6K+(6K)$	(Teorema 1)
$8+6K = 11$	(Propiedad del inverso aditivo de los números reales)
$(-8)+8+6K = (-8)+11$	(Teorema 1)
$0+6K = 3$	(Propiedad del inverso aditivo de los números reales y efectuando la operación de suma).
$6K = 3$	(Propiedad del elemento de -- identidad para la suma de números reales).

Ahora aplicando el teorema 2 y utilizando el inverso multiplicativo de 6, nos queda que $K = 1/2$. El conjunto solución de la ecuación es $\{1/2\}$

Otra forma de resolver esta ecuación es la siguiente:

$(-11)+8 = (-11)+11-6K$	(Teorema 1)
$-3 = 0+(-6K)$	(Propiedad del inverso aditivo de los números reales y efectuando la operación de suma).
$-3 = -6K$	(Propiedad del elemento de identidad para la suma de números reales).
$-1(-3) = -1(-6K)$	(Teorema 2)
$3 = 6K$	(Efectuando la multiplicación)
$(\frac{1}{6})(3) = (\frac{1}{6})(6K)$	(Teorema 2)

$\frac{3}{6} = 1 \cdot K$ (Efectuando la operación, propiedad del inverso multiplicativo).

$\frac{1}{2} = K$ (Propiedad del elemento de identidad para la multiplicación; fracción equivalente).

$K = \frac{1}{2}$ (Propiedad de simetría de la igualdad).

donde tenemos el mismo conjunto solución $\{\frac{1}{2}\}$. En realidad, la podemos resolver de distintas maneras, todo depende de la habilidad que tengamos al usar los teoremas anteriores.

Ejemplo 8.

Resolver la ecuación: $13x-8 = 9x+16$

Solución:

Primero) Agregamos el inverso aditivo de -8 a los dos miembros de la ecuación (teorema 1) para obtener una ecuación equivalente:

$$13x-8+(8) = 9x+16+(8)$$
$$13x = 9x+24 \quad \text{(Ecuación equivalente)}$$

Segundo) Agregamos ahora el inverso aditivo de $9x$ a los dos miembros de la ecuación y obtenemos una equivalente:

$$(-9x)+13x = (-9x)+9x+24$$
$$4x = 24 \quad \text{(Ecuación equivalente)}$$

Tercero) Finalmente, multiplicamos los dos miembros de la ecuación por el inverso multiplicativo de 4, para obtener una ecuación equivalente:

$$(\tfrac{1}{4})\ 4x = (\tfrac{1}{4})\ 24$$
$$x = 6 \quad \text{(Ecuación equivalente)}$$

Por último, para poder comprobar el resultado lo hacemos por el proceso de sustitución. Al comprobar este resultado se sustituye x por 6 en la ecuación original o dada:

Comprobación:

$$13x-8 = 9x+16$$
$$13(6)-8 = 9(6)+16$$
$$78-8 = 54+16$$
$$70 = 70$$

Por lo tanto, el conjunto solución es $\{6\}$.

Cuando resuelva una ecuación, debe comprobar siempre su respuesta, sustituyendo el conjunto solución en la ecuación original y comprobar si da un enunciado verdadero. Se deja al estudiante la comprobación de las ecuaciones resueltas anteriores.

AUTOEVALUACIÓN. 3.

Hallar los conjuntos solución de las ecuaciones siguientes. En todos los casos comprobar los resultados en la ecuación original.

1.- $3x = 15+2x$	7.- $-2y+5 = -y+2$	13.- $3p-11 = -5p$
2.- $2y+3 = y+2$	8.- $-3y+5 = 7$	14.- $-2y+8 = 5$
3.- $5y+9 = 4y$	9.- $-5 = 5-2b$	15.- $-2 = 8-5y$
4.- $3x-5 = 2x+2$	10.- $4z+7 = 9z$	16.- $5z+9 = 2z$
5.- $8z+1 = 7z+5$	11.- $4m-6 = -11$	17.- $3y-5 = -7$
6.- $5z = 9+4z$	12.- $K = -4K+7$	

2-8 SOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES DE LA FORMA $ax+b = cx+d$.

En la sección anterior mostramos cómo ampliar los métodos para encontrar la solución de ecuaciones. Ahora vamos a ampliar el método para ecuaciones con más de tres términos, pero sin paréntesis o fracciones.

Ejemplo 9.

Consideremos ahora la ecuación:

$$5z+6+2z = 3+z+1$$

Solución:

Apliquemos varias veces el teorema 1 sucesivamente hasta que todos los términos que contengan variables estén en el miembro izquierdo de la ecuación y todos los términos sin variables estén en el miembro derecho:

$5z+6+(-6)+2z = (-6)+3+z+1$

$5z+2z = (-6)+3+z+1$ (ecuación equivalente)

$5z+(-z)+2z = (-6)+3+z+(-z)+1$

$5z+(-z)+2z = (-6)+3+1$ (ecuación equivalente)

A continuación simplifiquemos ambos miembros de la ecuación por "reducción de términos semejantes":

$4z+2z = -3+1$ (ecuación equivalente)

$6z = -2$ (ecuación equivalente)

Ahora, utilizando el teorema 2 y usando el inverso multiplicativo de 6, nos queda:

$(\frac{1}{6})6z = (\frac{1}{6})(-2)$

$z = \frac{-2}{6}$ (ecuación equivalente)

$z = -\frac{1}{3}$ (ecuación equivalente)

Comprobación:

$5z+6+2z = 3+z+1$ (ecuación original)

$5(-\frac{1}{3})+6+2(-\frac{1}{3}) = 3+(-\frac{1}{3})+1$ (sustitución del conjunto solución)

$-\frac{5}{3}+6-\frac{2}{3} = 3-\frac{1}{3}+1$

$6-\frac{7}{3} = 4-\frac{1}{3}$ (sumando términos semejantes)

$\frac{18-7}{3} = \frac{12-1}{3}$ (sacando común denominador)

$\frac{11}{3} = \frac{11}{3}$ (es verdadero)

Por lo tanto, el conjunto solución es $\{-\frac{1}{3}\}$

Ejemplo 10.

Resolver la ecuación $8y-5-3y-2 = 6y-8+7$ y comprobar la respuesta.

Solución:

Aplicando los teoremas 1 y 2, tenemos:

$(-6y)+8y-5-3y-2 = (-6y)+6y-8+7$ (Teorema 1, inverso aditivo de 6y)

$(-6y)+8y-5+(+5)-3y-2 = 0-8+7+(+5)$ (Teorema 1, y el inverso aditivo de -5)

$(-6y)+8y+0-3y-2+(+2) = 0-8+7+(+5)+(+2)$ (teorema 1, y el inverso aditivo de -2)

$-6y+8y+0-3y+0 = 0-8+7+(+5)+(+2)$

$-9y+8y = -8+14$ (ecuación equivalente)

$(-9+8)y = +6$ (reducción de términos semejantes)

$(-1)(-y) = (-1)(+6)$ (teorema 2)

$y = -6$ (ecuación equivalente)

Comprobación:

$8y-5-3y-2 = 6y-8+7$ (ecuación original)

$8(-6)-5-3(-6)-2 = 6(-6)-8+7$ (conjunto sustitución)

$-48-5+18-2 = -36-8+7$ (efectuando la operación de multiplicación)

$-55+18 = -44+7$ (efectuando la operación de la suma)

$-37 = -37$ (es verdadero)

Por lo tanto, el conjunto solución es $\{-6\}$

Los pasos que se sugieren para resolver una ecuación por esta forma de "trasposición de términos semejantes" son los siguientes:

1°) Determínese cuáles términos deben cambiarse de un miembro a otro de la ecuación.

2°) Aplicar el teorema 1 tantas veces como sea necesario, buscando que en la ecuación equivalente queden en un solo miembro todos los términos que contengan la variable y del otro miembro los que no contengan variables.

3°) Efectuar las operaciones indicadas, buscando que la nueva ecuación equivalente quede en la forma.

$ax = b$ (donde a y b son constantes)

4°) Despejar la variable, aplicando el teorema 2, para encontrar su conjunto solución.

5°) Comprobar el conjunto solución en la ecuación original.

"Otra forma de resolver ecuaciones lineales"

Hay diferentes formas, como ya se vió anteriormente, de resolver ecuaciones lineales. Ahora vamos a resolver la siguiente ecuación aplicando primero la "reducción de términos semejantes" en ambos miembros de la ecuación y luego aplicamos los teoremas de la igualdad.

Ejemplo 11.

Resolver la ecuación: $7p+8-3p-2 = 5p-8+3$

Solución:

Primero vamos a reducir a términos semejantes el miembro izquierdo de la ecuación:

$7p-3p+8-2 = 5p-8+3$ (reordenando el primer miembro de la ecuación)

$(7-3)p+6 = 5p-8+3$ (Propiedad distributiva y efectuando la operación de suma)

$4p+6 = 5p-8+3$ (ecuación equivalente)

Ahora, partiendo de la ecuación equivalente, vamos a reducir a términos semejantes el segundo miembro de la ecuación:

$4p+6 = 5p-5$ (efectuando la operación de suma)

Luego aplicando los teoremas 1 y 2 tenemos:

$(-5p)+4p+6 = (-5p)+5p-5$ (teorema 1 y el inverso aditivo de 5p)

$(-5p)+4p+6+(-6) = 0-5+(-6)$ (teorema 1 y el inverso aditivo de 6)

$(-5p)+4p+0 = 0-5+(-6)$ (ecuación equivalente).

$(-5+4)p = -5-6$ (Propiedad distributiva y elemento de identidad para la suma).

$(-1)(-p) = (-1)(-11)$ (teorema 2)

$p = 11$ (ecuación equivalente)

Comprobación.

$7p+8-3p-2 = 5p-8+3$ (ecuación original)

$7(11)+8-3(11)-2 = 5(11)-8+3$ (conjunto sustitución)

$77+8-33-2 = 55-8+3$ (efectuando la operación de multiplicación)

$85-35 = 58-8$ (efectuando la operación de suma)

$50 = 50$ (es verdadera)

Por lo tanto el conjunto solución es $\{11\}$

Cualquiera de las dos formas es correcta para resolver este tipo de ecuaciones. En realidad, sólo es cuestión que se tenga amplio dominio sobre los teoremas y la habilidad para operar con los inversos aditivos y multiplicativos.

Los pasos que se sugieren para esta forma de "reducción de los términos semejantes" son los siguientes:

1°) Simplificar primero cualquiera de los dos miembros de la ecuación reordenando los términos para luego reducirlos a su mínima expresión.

2°) Hacer lo mismo con el otro miembro de la ecuación buscando que la ecuación equivalente quede en la forma:

$$ax + b = cx + d$$

3°) Aplicar simultáneamente los teoremas de la igualdad, hasta reducir la ecuación original a la ecuación equivalente

$$x = K \quad \text{(donde K es cualquier número real)}$$

4°) Comprobar el conjunto solución en la ecuación original.

AUTOEVALUACIÓN 4.

Hallar los conjuntos solución de las ecuaciones siguientes. En todos los casos comprobar los resultados en la ecuación original.

1.- $7y+8-3y-2 = 5y-8+3$
2.- $6x+7-13x = 4x-12+8$
3.- $2-3y+8 = 4y-2-9y$
4.- $4p+3-9 = 11-3p+8p$
5.- $5y+9-6y-3 = 7y-4+18$
6.- $3x+2-8 = 11-4x+9x$
7.- $6+3m-5 = 3m+9-4m$
8.- $8+8y-3y = 5-y+1$

3-9 SOLUCIONES DE ECUACIONES QUE CONTIENEN PARÉNTESIS.

En esta sección vamos a ampliar los métodos de las secciones anteriores a ecuaciones que contienen paréntesis. Para ello vamos a hacer uso de una propiedad de los números reales que es la *Propiedad distributiva*, que se enuncia como sigue:

$$a(b+c) = ab + ac \quad \text{(para cualquier } a,b,c \in R\text{)}$$

La propiedad distributiva afirma que un producto puede ser igual a una suma y que, recíprocamente, la suma en cuestión es igual a un producto, puesto que la igualdad es simétrica. El nombre que se le da a esta propiedad de los números reales parece apropiado en vista de que el multiplicador "a" se *distribuye* a cada elemento de la suma (b+c). Esta propiedad, es básica en la estructura del álgebra elemental.

Una consecuencia inmediata de esta propiedad es el hecho de que el producto de un número por la suma de tres o más números es igual a la suma de los productos del primer número con cada uno de los números que forman la suma. Así, para el caso de tres números, tenemos:

$$\begin{aligned} a\left[b+c+d\right] &= a\left[(b+c) + d\right] \\ &= a\,(b+c) + ad \\ &= (ab + ac) + ad \\ &= ab + ac + ad \end{aligned}$$

Ejemplo 12.

Consideremos ahora la ecuación:

$$5(3-4m) = 2(m+5)$$

Solución:

1°) Aplicamos la Propiedad distributiva en ambos miembros de la ecuación.