$5(3)-5(4m) = 2(m)+2(5)$ (Propiedad distributiva)

$15-20m = 2m+10$ (ecuación equivalente)

2°) Resolviendo la ecuación equivalente por cualquiera de las formas anteriores, tenemos:

$15-20m+(-2m) = 2m+(-2m)+10$ (teorema 1 y por el inverso aditivo de 2m)

$(-15)+15-20m+(-2m) = 0+10+(-15)$ (teorema 1 y por el inverso aditivo de 15)

$0-20m+(-2m) = 0+10+(-15)$ (Por el elemento inverso de la suma)

$(-20-2)m = 10-15$

$-22m = -5$ (ecuación equivalente)

$\left(-\frac{1}{22}\right)(-22m) = \left(-\frac{1}{22}\right)(-5)$ (teorema 2 y por el inverso multiplicativo de -22)

$1 \cdot m = \frac{5}{22}$

$m = \frac{5}{22}$ (ecuación equivalente)

Comprobación:

$5(3-4m) = 2(m+5)$ (ecuación original)

$5\left[3-4\left(\frac{5}{22}\right)\right] = 2\left[\left(\frac{5}{22}\right)+5\right]$ (conjunto sustitución)

$5\left[3-\frac{20}{22}\right] = 2\left[\frac{5}{22}+5\right]$

$5\left(\frac{66-20}{22}\right) = 2\left(\frac{5+110}{22}\right)$

$5\left(\frac{46}{22}\right) = 2\left(\frac{115}{22}\right)$

$\frac{230}{22} = \frac{230}{22}$ (verdadero)

Por lo tanto el conjunto solución es $\left\{\frac{5}{22}\right\}$

Ejemplo 13.

Resuelve la ecuación: $-2(y-6) = 3(5y-8)-(y-3)$

Solución:

Aplicando la Propiedad distributiva tenemos:

$(-2)(y)-(-2)(6) = 3(5y)-3(8)-1y-(-1)(3)$

$-2y+12 = 15y-24-y+3$ (ecuación equivalente)

Ahora, aplicando la segunda forma de la sección anterior para resolver la ecuación equivalente tenemos:

$(-15y)-2y+12 = (-15y)+15y-24-y+3$ (teorema 1)

$(-15y)+(y)-2y+12 = 0-24+(y)-Y+3$ (teorema 1)

$(-15y)+(y)-2y+12+(-12) = -24+0+3+(-12)$ (teorema 1)

$(-15y)+(y)-2y+0 = -24+3+(-12)$ (teorema 1)

$(-15+1-2)y = -36+3$ (efectuando operaciones)

$(-17+1)y = -33$ (efectuando operaciones)

$-16y = -33$ (ecuación equivalente)

$\left(-\frac{1}{16}\right)(-16y) = \left(-\frac{1}{16}\right)(-33)$ (teorema 2)

$y = 33/16$

Comprobación.

$-2(y-6) = 3(5y-8)-(y-3)$ (ecuación original)

$-2\left[\left(\frac{33}{16}\right)-6\right] = 3\left[5\left(\frac{33}{16}\right)-8\right]-\left[\left(\frac{33}{16}\right)-3\right]$ (conjunto sustitución)

$-2\left(\frac{33-96}{16}\right) = 3\left[\frac{5(33)-128}{16}\right]-\left[\frac{33-48}{16}\right]$

$$-2\left(-\frac{63}{16}\right) = 3\left(\frac{37}{16}\right) - \left(-\frac{15}{16}\right)$$

$$\frac{(-2)(-63)}{16} = \frac{(3)(37)}{16} + \frac{15}{16}$$

$$\frac{126}{16} = \frac{111}{16} + \frac{15}{16}$$

$$\frac{126}{16} = \frac{126}{16} \qquad \text{(es verdadero)}$$

Por tanto el conjunto solución es $\left\{\frac{33}{16}\right\}$

En resumen podemos decir que: "cuando haya ecuaciones que contengan paréntesis primero vamos a usar la propiedad distributiva para expresar ambos miembros de la ecuación por términos sin símbolos de agrupación y, segundo, aplicar cualquiera de las formas vistas en la sección anterior.

AUTOEVALUACIÓN 5.

Hallar los conjuntos solución de las ecuaciones siguientes. En todos los casos, comprobar los resultados en la ecuación original.

1.- $3(2x-7) = 4x + x - 2$

2.- $4(2y + 7) = 3y - 1 + 4y$

3.- $5 + (x + 2) = 2x - 4$

4.- $a - 2(3a - 1) = 7 - 4a$

5.- $4(3 - 7y) - 2(4 - 3y) = 2($[illegible]$y + 8)$

6.- $5(2n - 5) = 4(3n - 7) - 2(2n + 9)$

7.- $3(2-5k) - 6(3 - 4k) = 7(2k + 9)$

8.- $2(7k - 3) = 5(2k - 5) - 3(4k + 7)$

9.- $-3(x - 4) = 5(2x - 9) - (x - 5)$

3-10 SOLUCIÓN DE ECUACIONES QUE CONTIENEN FRACCIONES.

En las secciones anteriores hemos considerado ecuaciones con números enteros. Ahora vamos a resolver ecuaciones que contienen fracciones. Para ello, vamos a hacer uso del M.C.D. (mínimo común denominador) para luego multiplicar por este toda la ecuación y así poder convertir la ecuación a otra equivalente que no contenga fracciones y luego proceder a resolverla.

Pero antes de resolver ecuaciones de este tipo, hagamos un ejemplo de como sumar fracciones con distinto denominador.

Ejemplo 14.

Efectuar la operación:

$$\frac{5}{12} + \frac{7}{9} + \frac{1}{6}$$

Solución:

Al operar con fracciones en sumas o restas es cuando tenemos que tener un mismo denominador para poder sumar o restar los numeradores. Cuando no sucede esto hay que usar el M.C.D. Así, de los denominadores tenemos que:

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$$

$$9 = 3 \cdot 3 = 3^2$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$\text{M.C.D.} = 2^2 \cdot 3^2 = 36$$

Luego, poniendo como el M.C.D. el 36, tenemos que:

$$\frac{5(3)+7(4)+1(6)}{36} = \frac{15+28+6}{36}$$

$$= \frac{49}{36}$$

Ejemplo 15.

Consideremos ahora la ecuación:

$$\frac{3w}{4} - \frac{w}{2} + \frac{1}{4} = 2w - 5$$

Solución:

Para poder resolver este tipo de ecuaciones con fracciones, primero debemos encontrar el M.C.D. de la ecuación. Para ello debemos calcular el m.c.m. (mínimo común múltiplo) de los denominadores 4 y 2 que es el 4.

Una vez localizado el M.C.D. por el teorema 2, tenemos:

$4(\frac{3w}{4} - \frac{w}{2} + \frac{1}{4}) = 4(2w - 5)$ (teorema 2 y usando el M.C.D. = 4)

$\frac{(4)(3)w}{4} - \frac{4(w)}{2} + \frac{4(1)}{4} = 4(2w) - 4(5)$ (propiedad distributiva)

$3w - 2w + 1 = 8w - 20$ (efectuando la operación de multiplicación)

Ahora, resolvemos esta ecuación equivalente por cualquiera de las formas vistas anteriormente:

$(3-2)w + 1 = 8w - 20$ (propiedad distributiva)

$w + 1 = 8w - 20$ (ecuación equivalente)

$(-8w) + w + 1 = (-8w) + 8w - 20$ (teorema 1 y usando el inverso aditivo de 8w)

$(-8w) + w + 1 + (-1) = 0 - 20 + (-1)$ (teorema 1 y el inverso aditivo de 1)

$(-8w) + w = -20 + (-1)$

$(-8+1)w = -21$ (propiedad distributiva)

$-7w = -21$ (ecuación equivalente)

$(-\frac{1}{7})(-7w) = (-\frac{1}{7})(-21)$ (teorema 2 y el inverso multiplicativo de -7)

$w = \frac{21}{7}$

$w = 3$ (ecuación equivalente)

Comprobación:

$\frac{3w}{4} - \frac{w}{2} + \frac{1}{4} = 2w-5$ (ecuación dada)

$\frac{3(3)}{4} - \frac{(3)}{2} + \frac{1}{4} = 2(3)-5$ (conjunto sustitución)

$\frac{9}{4} - \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = 6 - 5$

$\frac{9-3(2)+1}{4} = 1$ (común denominador)

$\frac{9-6+1}{4} = 1$

$\frac{4}{4} = 1$

$1 = 1$ (es verdadera)

Por lo tanto el conjunto solución es $\{3\}$.

Ejemplo 16.

Resolver la ecuación:

$$\frac{5b}{3} + \frac{3}{7} - \frac{b}{2} = \frac{3b}{14} + \frac{4}{21}$$

Solución:

Primero encontremos el M.C.M de 3, 7, 2, 14, 21.

$$3 = 3$$
$$7 = 7$$
$$2 = 2$$
$$14 = 2 \times 7$$
$$21 = 3 \times 7$$
$$\text{m.c.m.} = 3 \times 7 \times 2 = 42$$

Luego, con el teorema 2 y el M.C.D. = 42, tenemos:

$$42\left(\frac{5b}{3} + \frac{3}{7} - \frac{b}{2}\right) = 42\left(\frac{3b}{14} + \frac{4}{21}\right)$$

$$\frac{(42)(5b)}{3} + \frac{(42)(3)}{7} - \frac{(42)(b)}{2} = \frac{(42)(3b)}{14} + \frac{(42)(4)}{21}$$

(propiedad distributiva)

$$(14)(5b) + (6)(3) - (21)b = (3)(3b) + (2)(4)$$

$$70b + 18 - 21b = 9b + 8$$

(ecuación equivalente)

Ahora, resolviendo esta ecuación equivalente tenemos:

$$(70-21)b + 18 = 9b + 8$$

$$49b + 18 = 9b + 8 \quad \text{(ecuación equivalente)}$$

$$(-9b) + 49b + 18 = (-9b) + 9b + 8 \quad \text{(teorema 1)}$$

$$(-9b) + 49b + 18 + (-18) = 0 + 8 + (-18) \quad \text{(teorema 1)}$$

$$(-9b) + 49b + 0 = 8 + (-18) \quad \text{(teorema 1)}$$

$$(-9 + 49)b = -10$$

$$40b = -10 \quad \text{(ecuación equivalente)}$$

$$\left(\frac{1}{40}\right)(40b) = \left(\frac{1}{40}\right)(-10) \quad \text{(teorema 2)}$$

$$b = \frac{10}{40}$$

$$b = -\frac{1}{4} \quad \text{(ecuación equivalente)}$$

Comprobación:

$$\frac{5b}{3} + \frac{3}{7} - \frac{b}{2} = \frac{3b}{14} + \frac{4}{21} \quad \text{(ecuación original)}$$

$$\frac{5}{3}b + \frac{3}{7} - \frac{1}{2}b = \frac{3}{14}b + \frac{4}{21}$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{3}{7} - \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{14}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{4}{21} \quad \text{(conjunto sustitución)}$$

$$-\frac{5}{12} + \frac{3}{7} + \frac{1}{8} = -\frac{3}{56} + \frac{4}{21}$$

$$\frac{-5(14) + 3(24) + 21}{168} = \frac{-3(3) + 4(8)}{168}$$

$$\frac{-70 + 72 + 21}{168} = \frac{-9 + 32}{168}$$

$$\frac{-70 + 93}{168} = \frac{23}{168}$$

$$\frac{23}{168} = \frac{23}{168} \quad \text{(es verdadera)}$$

Por lo tanto el conjunto solución es $\{-1/4\}$

De lo anterior podemos resumir que: "cuando haya ecuaciones lineales que tengan fracciones primero aplicamos el teorema 2 con el m.c.m. de los denominadores o bien se le llama también el M.C.D. Luego, la ecuación equivalente la resolvemos por los pasos vistos en secciones anteriores". Al igual que en las demás ecuaciones se debe comprobar siempre la respuesta en la ecuación original.

AUTOEVALUACIÓN 6.

Hallar los conjuntos solución de las ecuaciones siguientes. En todos los casos, comprobar los resultados en la ecuación original.

1.- $\frac{3y}{4} - \frac{y}{2} + \frac{1}{4} = 2y - 5$

2.- $\frac{5y}{8} - \frac{y}{3} - \frac{1}{9} = \frac{3y}{4} - 2$

3.- $y - \frac{11y}{7} + \frac{7}{3} = \frac{3}{7} - 2y$

4.- $\frac{3y}{5} - \frac{y}{8} - \frac{7}{4} = \frac{7y}{10} - 3$

5.- $\frac{4y}{3} + 3 - \frac{y}{6} = \frac{1}{3} + \frac{y}{2}$

6.- $\frac{2y}{3} + 7 = \frac{2}{3} - \frac{11y}{12}$

3-11 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES EN GENERAL.

En esta sección podremos utilizar todos los métodos de las secciones anteriores para resolver ecuaciones que contengan tanto fracciones como paréntesis. Esperamos que el estudiante a esta altura ya haya adoptado un procedimiento regular; aquí vamos a utilizar, el que consiste en quitar primeramente los paréntesis y en segundo término las fracciones.

Ejemplo 17.

Consideremos ahora la ecuación

$$\frac{1}{7}(2c - 4) - \frac{1}{2}(c - 5) = \frac{3}{14}$$

Solución:

Para resolver este tipo de ecuaciones, se sugieren los pasos siguientes:

1) Eliminar los paréntesis usando para ello la propiedad distributiva.

$$\frac{1}{7}(2c) - \frac{1}{7}(4) - \frac{1}{2}(c) + \frac{1}{2}(5) = \frac{3}{14}$$

$$\frac{2c}{7} - \frac{4}{7} - \frac{c}{2} + \frac{5}{2} = \frac{3}{14} \quad \text{(ecuación equivalente)}$$

2) Aplicar el teorema 2 a la ecuación equivalente por el M.C.D. = 14.

$$14\left(\frac{2c}{7} - \frac{4}{7} - \frac{c}{2} + \frac{5}{2}\right) = 14\left(\frac{3}{14}\right)$$

$$(2)(2c) - (2)(4) - (7)(c) + (7)(5) = (1)(3)$$

$$4c - 8 - 7c + 35 = 3 \quad \text{(ecuación equivalente)}$$

3) Resolviendo la ecuación equivalente por el método acostumbrado, tenemos:

$$4c - 8 + (8) - 7c + (35)+(-35) = 3 + (8)+(-35)$$

$$4c - 7c = 3 + 8 - 35$$

$$(4 - 7)\,c = 11 - 35$$

$$-3c = -24$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)(-3c) = \left(-\frac{1}{3}\right)(-24)$$

$$c = 8 \quad \text{(ecuación equivalente)}$$

Comprobación:

$$\frac{1}{7}(2c-4) - \frac{1}{2}(c-5) = \frac{3}{14} \quad \text{(ecuación original)}$$

$$\frac{1}{7}\left[2(8)-4\right] - \frac{1}{2}\left[8-5\right] = \frac{3}{14} \quad \text{(conjunto sustitución)}$$

$$\frac{1}{7}(16-4) - \frac{1}{2}(3) = \frac{3}{14}$$

$$\frac{12}{7} - \frac{3}{2} = \frac{3}{14}$$

$$\frac{3}{14} = \frac{3}{14} \quad \text{(es verdadera)}$$

Por lo tanto, el conjunto solución es $\{8\}$.

AUTOEVALUACIÓN 7.

Hallar los conjuntos solución de las ecuaciones siguientes. En todos los casos, comprobar los resultados en la ecuación original.

1.- $\frac{1}{4}(4x + 3) + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}(3x - 2)$

2.- $\frac{1}{5}(10x + 7) - \frac{2}{3}(4x-2) = \frac{1}{10}(5x + 4)$

3.- $\frac{1}{2}(3x + \frac{4}{3}) - \frac{2}{3}(\frac{5x}{4} + 2) = 2x$

4.- $\frac{1}{8}(2x + 3) - \frac{2}{3}(5x - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}(\frac{5}{6} - 3x)$

5.- $\frac{1}{7}(2x - 4) - \frac{1}{2}(x - 5) = \frac{3}{14}$

6.- $\frac{1}{5}(\frac{3x}{2} + 10) = \frac{1}{4}(\frac{7x}{5} + 6)$

7.- $\frac{1}{4}(\frac{5x}{3} + 2) - \frac{1}{3}(3x - \frac{5}{2}) = \frac{1}{6}(4x - 7)$

3-12 CALCULO DEL VALOR DE UNA VARIABLE EN UNA FÓRMULA.

Las fórmulas tienen un interés especial porque expresan relaciones que son muy útiles tanto en las ciencias como en las matemáticas. Por ejemplo, la fórmula $F= 9/5\ C + 32$ expresa la relación entre la temperatura medida en la escala centígrada y en la escala Farenheit. La fórmula $P = 2\ell + 2a$ expresa la relación entre las variables que representan el perímetro y el ancho de un rectángulo.

El dominio de las variables en una fórmula está determinado por su significado en cada caso que se presenta en la práctica. Así, por ejemplo, consideremos la fórmula $C = 4n$, que establece el costo (c) de "n" camisas a \$ 120.00 por camisa. Es claro que "n" en este caso tiene como dominio al conjunto de los números naturales, puesto que no se comparan fracciones de camisas.

Ahora, si los valores de todas las variables, excepto de una, se conocen, suele ser fácil calcular el valor de la variable desconocida.

Ejemplo 18.

El área total de un prisma rectangular de largo "ℓ", ancho "a", y altura "h", está dado por la fórmula:

$$A = 2\ell a + 2\ell h + 2ah$$

Encontrar el área total cuando ℓ = 20 cm, a = 8 cm, h = 2.5 cm.

Solución:

Comenzamos por *sustituir* todos los valores conocidos en la fórmula dada, de tal manera que:

$$A = 2(20)(8) + 2(20)(2.5) + 2(8)(2.5)$$

Ahora, efectuando los productos y sumando todos los términos queda que:

$$A = 320 + 100 + 40$$

$$A = 460 \text{ cm}^2$$

Para comprobar el resultado sustituiremos en la fórmula original cada variable por su valor correspondiente, incluyendo el que hemos encontrado. Si la igualdad que resulta es una identidad, la respuesta es correcta.

$$A = 2\ell a + 2\ell h + 2ah$$

$$460 = 2(20)(8) + 2(20)(2.5) + 2(8)(2.5)$$

$$460 = 320 + 100 + 40$$

$$460 = 460$$

Ejemplo 19.

Consideremos ahora la fórmula:

$$M = C + C\,rt$$

que se usa para calcular el monto (capital más interés) que se obtiene al invertir un capital (C) a un tipo de interés (r) por un número de años (t).

Si al invertir un capital (C) por dos años al 4 % de interés nos da un monto de \$ 5,400.00. ¿Cuál es el capital C?

Solución:

Primero sustituyamos los valores conocidos como son M= \$ 5,400.00, r = 0.04, t = 2, en la fórmula de tal manera que:

$$M = C + C\,rt$$

$$5400 = C + C(0.04)(2)$$

Luego, simplificando tenemos:

$$5400 = C + 0.08\,C$$

$$5400 = (1 + 0.08)C$$

$$5400 = 1.08\,C$$

Aplicamos ahora el teorema 2 y el inverso multiplicativo de 1.08 a la ecuación equivalente, tenemos que: