AUTOEVALUACIÓN 8.

1.- 17	5.- 20
2.- 24	6.- 69
3.- 117	7.- 5
4.- 14	8.- 11.025

AUTOEVALUACIÓN 9.

1.- $t = d/V$	5.- $a = \frac{2s}{h} - b$
2.- $V = \frac{rT}{P}$	6.- $n = \frac{c - 10d}{5}$
3.- $v_0 = \frac{d}{t} - \frac{1}{2}gt$	7.- $h = \frac{3V}{\pi r^2}$
4.- $\ell = \frac{P - 2a}{2}$	8.- $q = \frac{D - r}{d}$

AUTOEVALUACIÓN 10.

1.- ϕ	4.- ϕ
2.- El dominio de la variable.	5.- {0}
3.- {0}	6.- El dominio de la variable.

ECUACIONES LINEALES EN DOS VARIABLES.

LECCIÓN 2.

3-15 INTRODUCCIÓN.

Hace miles de años, cuando el hombre aprendió a contar, inventó sistemas numéricos. Al hacerlo, sentó inconscientemente las bases de lo que un día sería el álgebra. El origen del álgebra, como el comienzo mismo del lenguaje, es desconocido, pero podemos estar seguros de que se desarrolló a causa del interés que la gente ha tenido siempre por los números.

Sabemos que los antiguos babilonios, conocieron, hace más de cinco mil años, los sistemas de numeración de bases 10 y 60. Aun cuando supieron extraer raíces cuadradas, resolver algunos tipos de ecuaciones y calcular el interés compuesto, su álgebra era muy elemental y limitada.

Ni los greigos ni los romanos estuvieron sensiblemente más adelantados. A los griegos les interesaban más la geometría y la lógica, mientras que los romanos se preocuparon principalmente en problemas prácticos de topografía y mediciones.

Por cerca de mil quinientos años no hubo avances de importancia, especialmente en el uso de letras y símbolos. Un siglo o dos antes del descubrimiento de América por Colón, la gente comenzó a preocuparse por el álgebra: Primero los hindúes, árabes y persas, más tarde, los españoles, italianos y alemanes.

Poco después de la invención de la imprenta, por 1490, comenzaron a aparecer muchos libros de aritmética y álgebra.

Poco después se desarrolló el álgebra, tal como la conocemos. Las fracciones decimales, los números negativos, los exponentes y las raíces, fueron algunas de las ideas que se empezaron a usar ampliamente.

Desde principios del siglo XX, los símbolos y métodos del álgebra son más elaborados. Una página de álgebra moderna parece un grupo de marcas sin significado, pero puede ser leída, por los que han aprendido álgebra, tan fácilmente como una prosa cualquiera. Y lo más importante, esta álgebra "teórica" es una herramienta indispensable en la ciencia, en la ingeniería y en la tecnología.

3-16 GRÁFICAS.

Es costumbre muy generalizada, en la vida moderna, establecer comparaciones entre ciertas magnitudes, como la producción de tal o cual artefacto, de algún metal determinado en varios años, los records alcanzados en atletismo en varias olimpiadas, las velocidades a que se ha llegado con los modernos medios de transporte, los nacimientos y las defunciones en tal número de años, etc., ya sea limitándose a un país o bien a regiones más extensas del globo o al mundo entero.

En la practica, la comparación de esas magnitudes se hace sobre todo por gráficas, basándose en los datos numéricos correspondientes a dichas magnitudes.

La ventaja de las gráficas es mostrar, rápida e intuitivamente, la relación que guardan las magnitudes que se comparan, cosa que no se logra al mismo grado, con simples datos numéricos.

3-17 LAS GRÁFICAS EN ÁLGEBRA.

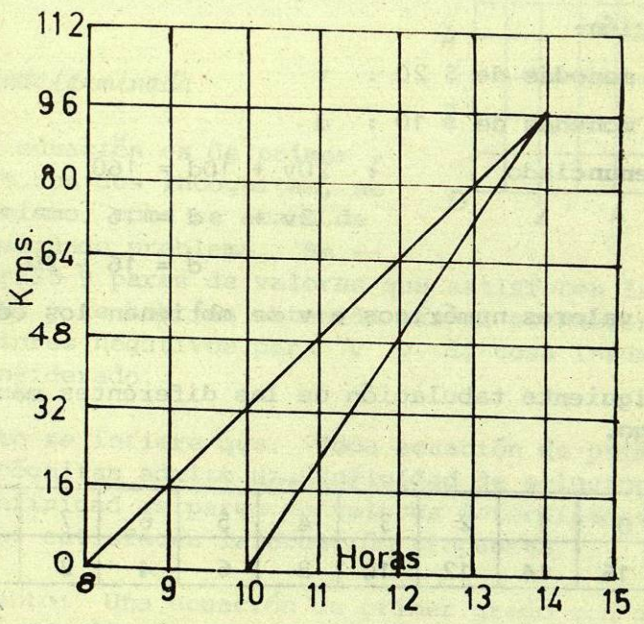
Lo que más interesa en Álgebra, es la representación gráfica de fórmulas y ecuaciones, en la resolución de problemas, como se ve a continuación.

Ejemplo 1.

Un ciclista sale a las 8 de la mañana con una velocidad, supuesta uniforme de 16 Km por hora, con dirección a un punto determinado. Otro ciclista sale dos horas después, con una velocidad de 24 Km por hora y se dirige hacia el mismo punto. ¿Cuánto tiempo tardará el segundo en alcanzar al primero?

Solución:

La gráfica adjunta indica que se encuentran cuatro horas después de haber salido el segundo ciclista, es decir, a las 14 horas.



La misma gráfica señala igualmente que cada ciclista ha recorrido 96 Km, y por ella puede verse también, a qué distancia estaba cada uno del otro a las diferentes horas: 32 Km a las 10, 24 a las 11, 16 a las 12, etc.

La resolución del mismo problema; por ecuación es:

Número pedido	:	x
recorrido por el primer ciclista	:	32 + 16x
recorrido por el segundo cicilista	:	24x
según el enunciado	:	32 + 16x = 24x

$$32 = 24x - 16x$$

$$8x = 32$$

$$x = 4 \text{ horas}$$

Ejemplo 2.

Se quiere pagar la cantidad de $ 160 con monedas de $ 20 y monedas de $ 10. ¿De cuántas maneras puede hacerse el pago?

Solución:

Número de monedas de $ 20	:	v
Número de monedas de $ 10	:	d
según el enunciado	:	20v + 10d = 160

$$2v + d = 16$$

$$d = 16 - 2v$$

dando los valores numéricos a v se obtienen los correspondientes a d.

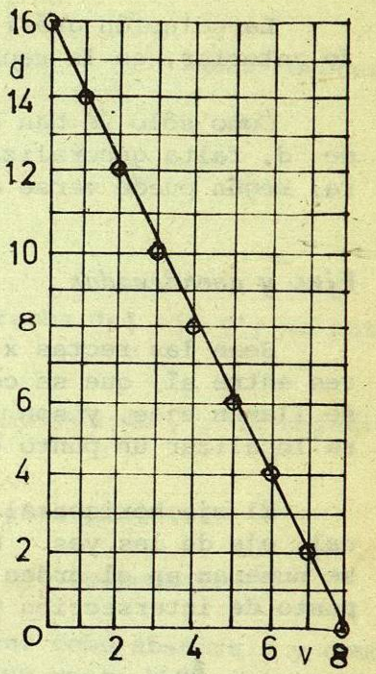
La siguiente tabulación de las diferentes maneras de hacer el pago.

v	0	1	2	3	4	5	6	7	8
d	16	14	12	10	8	6	4	2	0

Puede dibujarse un diagrama como el adjunto, en donde se ha llevado, en dirección horizontal, el número de monedas de $20, y en dirección vertical el de las monedas de $ 10.

Los puntos blancos tomados en la recta que une los puntos extremos, indican las diferentes soluciones del problema y corresponden a los pares de valores calculados para v y d en la tabulación.

Ecuación determinada.



En las ecuaciones y problemas de la lección anterior se ha obtenido una sola raíz o solución, lo cual permite afirmar que: Toda ecuación de primer grado con una incógnita solo tiene una raíz o solución, es decir, existe un valor único, bien determinado para dicha incógnita, que satisface la ecuación.

Luego: toda ecuación de primer grado con una incógnita es determinada.

Ecuación indeterminada.

Si la ecuación es de primer grado, pero con dos incógnitas, no sucede lo mismo, como se acaba de ver en el segundo problema. Se han encontrado 9 pares de valores que satisfacen la ecuación $2v + d = 16$, y se habrían obtenido más si se hubieran podido señalar valores negativos para v y d, cosa inadmisible en el caso considerado.

De esto se infiere que: Toda ecuación de primer grado con dos incógnitas admite una infinidad de soluciones, es decir, una infinidad de pares de valores determinados, no arbitrarios, que satisfacen la ecuación propuesta.

Por tanto: Una ecuación de primer grado con dos incógnitas, es indeterminada.

3-18 REPRESENTACIÓN CARTESIANA.

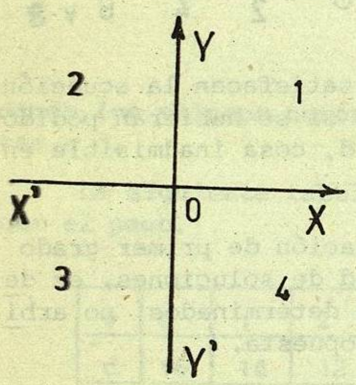
La solución gráfica dada al segundo problema en el párrafo anterior, es la representación llamada cartesiana.

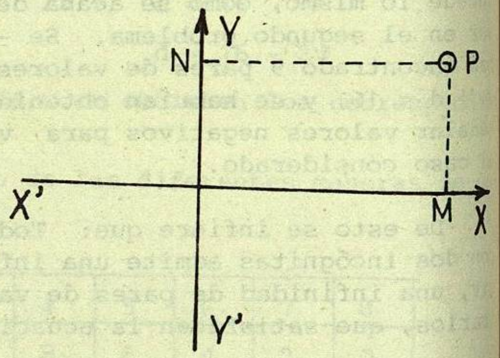
Como sólo se han considerado valores positivos de v y de d, falta generalizar para valores algebraicos cualesquiera, según puede verse a continuación.

Ejes y coordenadas.

Sean las rectas x'x y y'y (ver figura), perpendiculares entre sí, que se cortan en el punto 0. Estas dos rectas se llaman ejes, y son líneas de referencia, porque sirven para localizar un punto en el plano que determinan.

El eje horizontal se llama eje de las equis y el vertical, eje de las yes. Dichos ejes determinan 4 cuadrantes que se numeran en el orden que está indicado en la figura. El punto de intersección 0 se llama origen o cero.





Abscisa de un punto P es su distancia NP al eje vertical, y suele representarse con x (ver figura).

Ordenada de un punto P es su distancia MP al eje horizontal, y suele representarse con, y.

La abscisa y la ordenada del punto P se llaman coordenadas cartesianas de ese punto.

Signos de las coordenadas.

Por convención:

1.- Toda abscisa que queda a la derecha del eje y'y es positiva.

2.- Toda abscisa que queda a la izquierda de y'y es negativa.

3.- Toda ordenada arriba del eje x'x es positiva.

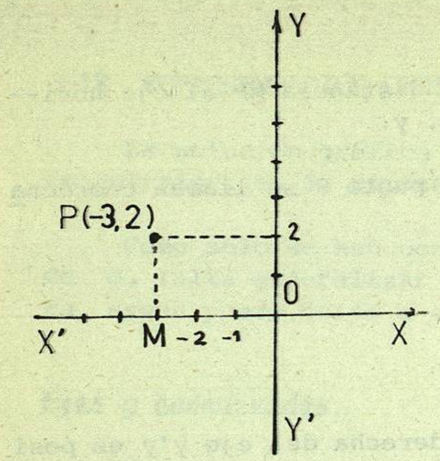
4.- Toda ordenada debajo del mismo eje es negativa.

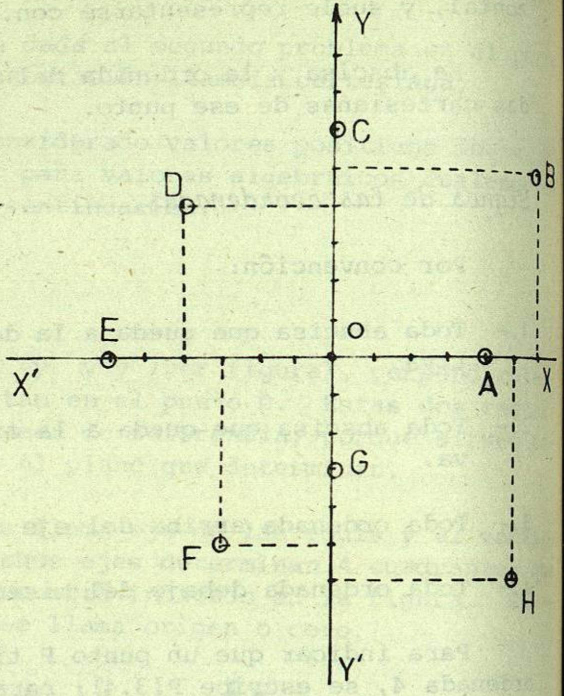
Para indicar que un punto P tiene como abscisa 3 y como ordenada 4, se escribe P(3,4); para un punto M de abscisa 5 y ordenada (-7), se escribe M(5,-7).

La coordenada horizontal es la que se escribe primero.

Representación de un punto.

Para representar un punto cualquiera, por ejemplo, -- P(-3,2), se llevan 3 unidades sobre x'x a partir de 0, a la izquierda, con lo cual se obtiene el punto M. En M se levanta una perpendicular (ver figura) y en ella, partiendo de M, se cuentan dos unidades hacia arriba, y se tiene representado el punto P.





La unidad es arbitraria y en la generalidad de los casos se toma la misma para las "x" y para las "y".

El uso de papel cuadriculado es muy recomendable para gráficas, pues con él se evita el trazo de perpendiculares. En la figura anterior se han presentado los siguientes puntos:

A(4, 0), B(6, 5), C(0, 6), D(-4, 4),
E(-6, 0), F(-3,-5), G(0,-3), H(5,-6),

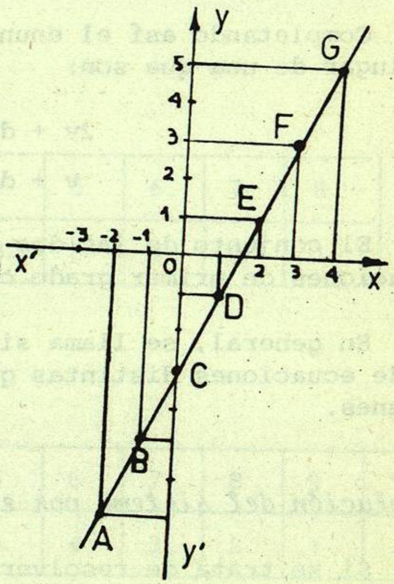
Representación de una ecuación.

En general una ecuación con dos incógnitas o variables, se puede representar gráficamente. Sea la ecuación, $y= 2x-3$. A cada valor que se atribuya a x (variable independiente), corresponde un valor para y (función).

Se comienza a tabular:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-7	-5	-3	-1	1	3	5
puntos	A	B	C	D	E	F	G

Llevando los valores de x como abscisas (ver figura), y los de "y" como ordenadas, según se ha explicado, cada par de valores quedará representado por un punto.



Uniendo ordenadamente los diferentes puntos obtenidos, resulta una recta, que es la representación gráfica o cartesiana de la ecuación, $y = 2x - 3$. Por tanto, toda ecuación de primer grado con dos incógnitas, de la forma $y = 2x - 3$, o generalizando $y= mx + b$, se llama ecuación lineal, porque su gráfica es una línea recta.

3-19 ECUACIONES SIMULTÁNEAS DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS.

Sistema de ecuaciones.

Si se quiere pagar la suma de \$ 160 con monedas de \$ 20 y monedas de \$10, ¿cuántas monedas de cada clase se deberán entregar?

La resolución del problema da lugar a la ecuación, d= 16 - 2v, la cual admite muchas soluciones que satisfacen las condiciones del problema. Pero este problema, indeterminado, porque tiene muchas respuestas, deja de serlo si se introduce este nuevo dato: El número de monedas debe de ser 10.

Completando así el enunciado, se tienen dos ecuaciones en lugar de una que son:

$$2v + d = 16$$

$$v + d = 10$$

El conjunto de las dos ecuaciones forma un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

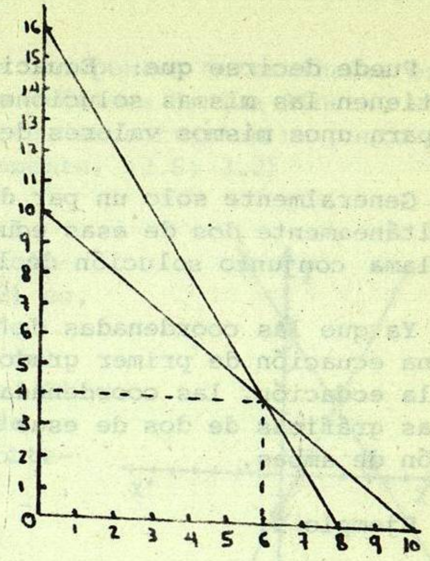
En general, se llama sistema de ecuaciones todo conjunto de ecuaciones distintas que tienen una o más soluciones comunes.

Resolución del sistema por el método gráfico.

Si se trata de resolver el sistema que se está considerando:

$$2v + d = 16 \qquad (1)$$

$$v + d = 10 \qquad (2)$$



se pueden representar gráficamente las rectas que corresponden a las dos ecuaciones. Su intersección que, como se ve en la figura se verifica en el punto v = 6, d = 4, es la solución del sistema, puesto que cualquiera de esas dos ecuaciones se satisfacen por estos valores.

Podría resolverse también por tabulación como se indica a continuación.

Para (1):

v	0	1	2	3	4	5	6	7	8
d	16	14	12	10	8	6	4	2	0

Para (2):

v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Los dos pares de valores, iguales en las dos tabulaciones, son las soluciones del sistema.

Las dos ecuaciones que se satisfacen para los mismos valores de v y de d, se llaman ecuaciones simultáneas.