Puede decirse que: Ecuaciones simultáneas son aquellas que tienen las mismas soluciones, es decir que, se satisfacen para unos mismos valores de las incógnitas.

Generalmente solo un par de valores pueden satisfacer simultáneamente dos de esas ecuaciones. Ese par de valores se llama conjunto solución de las dos ecuaciones.

Ya que las coordenadas de cualquier punto de la gráfica de una ecuación de primer grado con dos incógnitas, satisfacen la ecuación, las coordenadas del punto de intersección de las gráficas de dos de esas ecuaciones, constituyen la solución de ambas.

Ejemplo 3.

Resolver gráficamente las ecuaciones:

$$3x + 2y = 14 \qquad (1)$$
$$2x - y = 2 \qquad (2)$$

Solución:

Se resuelven primero (1) y (2) para "y", se obtiene:

$$(3)\quad y = -\frac{3}{2}x + 7$$

$$(4)\quad y = 2x - 2$$

Ahora, se asignan a "x" los valores, -2, 0, 4 en (3); y -3, 0, 3 en (4). Con ellos se obtienen las siguientes tablas con los correspondientes valores de "x" y "y"

x	-2	0	4
y	10	7	1

, de (3) y

x	-3	0	3
y	-8	-2	4

de (4)

Representando gráficamente los puntos determinados en estas tablas y construyendo las gráficas de las líneas, se obtiene la figura 1. Las gráficas se cortan en un punto cuyas coordenadas, son aproximadamente, (2.6, 3.2)

Por tanto, de acuerdo con la gráfica se puede decir que la solución de las ecuaciones (1) y (2) es, x= 2.6, y= 3.2. La exactitud del procedimiento empleado depende del valor de la escala considerada. Si en el miembro de la izquierda de (1) se sustituyen los valores obtenidos, se tiene:

$$3(2.6) + 2(3.2) = 14.2$$

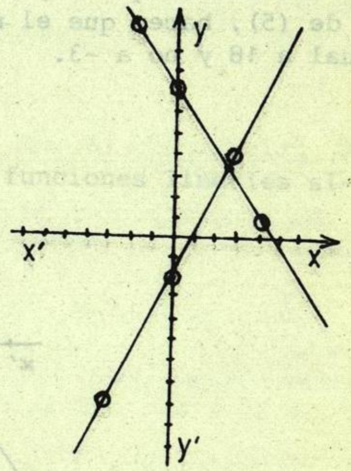

Fig. 1.

De igual manera, para los mismos valores de "x" y de "y" el miembro de la izquierda de (2), se transforma en 2(2.6)-3.2; ya que los miembros de la derecha de (1) y (2) son, respectivamente, 14 y 2, se observa que el par de valores x= 2.6, y y= 3.2 no es exactamente la solución de las dos ecuaciones pero que con una cifra decimal más, quizá se obtengan los valores correctos.

Tipos de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Puede suceder que las gráficas de dos ecuaciones de primer grado sean rectas paralelas. Por ejemplo: en la fig. 2, se muestran las gráficas de dos rectas paralelas que corresponden a las ecuaciones siguientes:

$$(5)\quad 3x - 2y = 6$$

$$(6)\quad 9x - 6y = -3$$

Por tanto, las ecuaciones no tienen solución. Algebráicamente se puede observar este hecho, si se considera que el miembro de la izquierda de (6), es exactamente 3 veces mayor que el miembro de la izquierda de (5). Por tanto cualquier par de valores que hagan igual a 6 el miembro de la izquierda de (5), hacen que el miembro de la izquierda de (6) sea igual a 18 y no a -3.

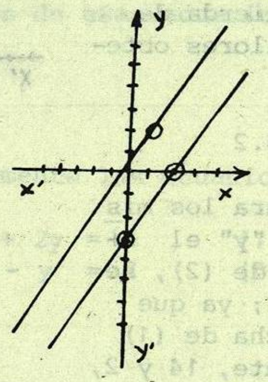

Fig. 2

Por otro lado, se pueden tener dos ecuaciones cuyas gráficas coinciden en todos sus puntos. Entonces, cualquier par de valores que satisfaga a la primera ecuación, satisface también a la segunda, y el par de ecuaciones tiene un número infinito de soluciones.

Si dos ecuaciones con dos incógnitas tienen una, y sólo una solución, se denominan ecuaciones consistentes. Si no tienen solución, se llaman soluciones inconsistentes, y si tienen un número infinito de soluciones, ecuaciones dependientes.

Aunque el método gráfico es un auxiliar para comprender los tres anteriores tipos de pares de ecuaciones de primer grado, no es, sin embargo, un método eficaz para obtener la solución, cuando ésta existe.

En primer lugar es excesivamente laborioso, en segundo, la exactitud del método depende de la habilidad del operador para construir las dos gráficas y para estimar las coordenadas de su punto de intersección. Los tres métodos algebráicos que se presentarán a continuación son más fáciles para obtener con absoluta exactitud la solución, cuando ésta exista.

AUTOEVALUACIÓN 1.

Construir las gráficas de las funciones lineales siguientes:

1.- y= x + 1

2.- y=-x + 2

3.- y= 3x+ 4

4.- 2x + 3y = 6

Dados los siguientes pares de ecuaciones lineales, construye las rectas y determina las coordenadas del punto de intersección por el método gráfico.

5.- y= -2x - 1

y= 3x +9

6.- y= -3x + 10

y= 2x - 10

7.- y= x - 1

y= -x + 5

Diga si el siguiente par de ecuaciones lineales son consistentes, inconsistentes o dependientes.

8.- 2x + 3y = 6

3x -10y = 15

9.- $6x - 8y = -2$

$3x - 4y = 5$

10.- $y + 5x = 3$

$2y + 10x = 6$

3-20 ELIMINACIÓN DE UNA INCÓGNITA.

El procedimiento gráfico que se acaba de exponer, por lo general, no es de aplicación práctica.

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es preferible reducir el sistema propuesto a una sola ecuación que solo contenga una incógnita. A esta reducción se le llama eliminación de una incógnita.

La eliminación se funda en que una misma literal de un sistema tiene igual valor en cada ecuación. Así, en el sistema anterior, v y d tienen el mismo valor, porque en cada una representan, respectivamente, el número de monedas de $ 20 y $ 10.

Evidentemente que si del primer miembro de la primera se resta el primero de la segunda, y de 16 se resta 10, o sea, si se restan miembro a miembro las dos ecuaciones, resultan diferencias iguales, y solo se tiene: v= 6 con lo cual queda eliminada la incógnita d.

Eliminar una incógnita de un sistema de ecuaciones es reducir el sistema propuesto a otro que tenga una ecuación y una incógnita menos.

Métodos de eliminación.

Los principales métodos de eliminación son:

1.- Por adición o sustracción.

2.- Por igualación,

3.- Por sustitución.

Mediante la aplicación de alguno de estos tres métodos se resuelven algebraicamente los sistemas de ecuaciones simultáneas.

3-21 ELIMINACIÓN DE UNA VARIABLE POR ADICIÓN O SUSTRACCIÓN.

Para resolver dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, se elimina primero una de las variables. Esto es, de las dos ecuaciones dadas se obtiene una tercera, con una sola incógnita, cuya solución es uno de los valores buscados. Luego se sustituye este valor en cualquiera de las ecuaciones dadas y se resuelve ésta para la otra incógnita.

Frecuentemente el proceso de eliminación puede ser más extenso para una variable que para la otra. Por tanto se recomienda estudiar el problema antes de intentar resolverlo y con ello seleccionar el método que requiera menor número de operaciones.

Los pasos a seguir para la resolución de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas pueden resumirse como sigue:

a) Seleccionar la incógnita más fácil de eliminar.

b) Se encuentra el M.C.M. de los dos coeficientes de esta incógnita.

c) Se multiplican los dos miembros de cada ecuación por el cociente obtenido al dividir el anterior M.C.M. entre el coeficiente de la incógnita seleccionada en la ecuación.

d) Se suman o se restan los miembros correspondientes de las ecuaciones obtenidas en el paso anterior, según sean opuestos o iguales los signos de los términos en los que aparece la incógnita seleccionada.

e) Se resuelve para la incógnita que queda, la ecuación resultante.

f) Se substituye el valor obtenido en el paso anterior en cualquiera de las ecuaciones dadas y se resuelve ésta para la otra incógnita.

g) Se escribe el conjunto solución en la forma, { x=____ y=________ } poniendo los valores obtenidos en los pasos e) y f).

h) Se comprueban las operaciones sustituyendo en la ecuación original que no se usó en el paso f), los valores en el paso g).

Ejemplo 4.

Resolver las ecuaciones:

(7) $4x - 11y = -3$

(8) $6x + 7y = 19$

Solución:

Los M.C.M. de los coeficientes de "x" y de "y" son 12 y 77, respectivamente. Por tanto, se pueden operar con números más pequeños si se elimina "x" en vez de "y".

Si se divide 12 entre 4, y 12 entre 6 se obtiene 3 y 2, respectivamente. Por tanto se multiplicarán los dos miembros de (7) por 3 y los de (8) por 2, y se obtiene:

(9) $12x - 33y = -9$

(10) $12x + 14y = 38$

Ya que los términos que contienen a "x" tienen el mismo signo, se resta (10) de (9), y se tiene:

(11) $-47y = -47$

$\underline{y = 1}$

Sustituyendo en (7), y = 1, se tiene:

(12) $4x - 11 = -3$

$4x = 11 - 3 = 8$

$\underline{x = 2}$

Por consiguiente el conjunto solución es $\{(2,1)\}$

Puesto que para obtener el valor de x se usó la ecuación (7), se debe comprobar la solución mediante el uso de (8). Para x = 2, y = 1, el miembro de la izquierda de (8), es:

$6(2) + 7(1) = 12 + 7 = 19$

Siendo también 19 el miembro de la derecha de (8), la solución es correcta.

AUTOEVALUACIÓN 2.

Resolver eliminando por adición o sustracción, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales. (Hacer oralmente los cinco primeros) y comprobar las soluciones.

1.- $x + y = 4$
$x - y = 2$

2.- $x + y = 3$
$x - y = 1$

3.- $x + y = 6$
$x - y = 2$

4.- $x + 2y = 5$
$x + y = 4$

5.- $3x + 2y = 7$

$3x + y = 5$

6.- $x - y = 27$

$x + y = 33$

7.- $3x - y = 4$

$x + 3y = -2$

8.- $4x - 26 = y$

$3x + 5y - 31 = 0$

9.- $15u = 10 - 20v$

$25u = 30v + 80$

10.- $x + 1 = y/4$

$x = \dfrac{y + 1}{5}$

3-22 ELIMINACIÓN DE UNA VARIABLE POR SUSTITUCIÓN.

A continuación se enumerarán los pasos a seguir en el método de eliminación por sustitución, y luego se ilustrará su aplicación mediante dos ejemplos.

Con el fin de lograr mayor precisión en lo que va a exponerse, se supondrá que "y" es la variable que debe eliminarse. Sin embargo, las mismas instrucciones pueden seguirse para eliminar a "x", con solo intercambiar "x" y "y" en cada paso.

a) Se resuelve una de las ecuaciones para "y" en términos de "x".

b) Se sustituye el valor encontrado de "y" en la otra ecuación y se obtiene así una ecuación en la que aparece únicamente "x".

c) Se resuelve para "x" esta última ecuación.

d) Se sustituye el valor de "x" en la función obtenida en el paso a), y se calcula el valor de "y".

e) Se escribe el conjunto solución en la forma {(x=_____, y=_________)} poniendo los valores obtenidos en los pasos c) y d).

f) Se comprueba la solución sustituyendo sus valores en la ecuación no usada en el paso a).

Ejemplo 5.

Resolver simultáneamente las ecuaciones:

$$(1)\quad 5x + 3y = 13$$
$$(2)\quad 3x - y = 5$$

Solución:

a) Se observa que si la ecuación (2) se resuelve para "y" no se obtienen fracciones. Efectuando la operación, se tiene:

$$(3)\quad y = 3x - 5$$

b) Se sustituye ahora, $3x - 5$, en vez de "y" en la ecuación (1) y se tiene:

$$(4)\quad 5x + 3(3x-5) = 13$$

c) Se resuelve esta ecuación.

$$5x + 9x - 15 = 13$$
$$14x = 28$$
$$\underline{x = 2}$$

d) Se sustituye 2 en vez de "x" en la ecuación (3), y se obtiene:

$$y = 3(2) - 5$$
$$\underline{y = 1}$$

e) Por tanto, el conjunto solución es {(2,1)}.

f) Puesto que en el paso a) se usó la ecuación (2), se comprueba la solución obtenida sustituyendo por sus valores las letras del miembro de la izquierda de la ecuación (1).

De este modo se obtiene:

$$5(2) + 3(1) = 10 + 3 = 13$$

Ya que el miembro de la derecha de la ecuación (1) es también 13, la solución es correcta.

Ejemplo 6.

Resolver simultáneamente las ecuaciones:

$$(4) \quad 6x + 5y = 13$$

$$(5) \quad 7x - 4y = 25$$

Solución:

a) Puesto que al resolver como primer paso cualquiera de estas ecuaciones, la solución contiene fracciones, no existe ninguna diferencia en escoger una u otra. Por tanto, arbitrariamente se selecciona (4) y se resuelve para "x" obteniendo:

$$(6) \quad x = \frac{13 - 5y}{6}$$

b) Sustituyendo el miembro de la derecha de (6) en vez de "x" en (5), se tiene:

$$(7) \quad 7\left(\frac{13 - 5y}{6}\right) - 4y = 25$$

Eliminando las fracciones en (7) y multiplicando ambos miembros por 6, se tiene:

$$7(13 - 5y) - 24y = 150$$

$$91 - 35y - 24y = 150$$

$$-59y = 59$$

$$\underline{y = -1}$$

d) Sustituyendo -1 en vez de "y" en (6), se tiene:

$$x = \frac{13 - 5(-1)}{6} = 3$$

e) Por tanto el conjunto solución es, $\{(3,-1)\}$

f) La solución se comprueba sustituyendo por sus valores las letras del miembro de la izquierda de (5) y se obtiene:

$$7(3) - 4(-1) = 25$$

Por tanto, siendo 25 el miembro de la derecha de (5), la solución es correcta.

AUTOEVALUACIÓN 3.

1.- Si, y= 6, ¿cuál es el valor de x en: $2y + x = 16$?

2.- Si, x= 4, ¿cuál es el valor de y en, $x+3y = 16$?

3.- Si y= 7, ¿cuál es el valor de x en, $x + 2y = 19$?

4.- Si x= y, ¿cuál es el valor de y en, $x+2y = 6$?

5.- Si x= 2y, ¿cuál es el valor de y en $x + 2y = 8$?

Resolver los siguientes sistemas eliminando por el método de sustitución.

6.- $x + y = 23$
$x - y = 7$

7.- $2x + y = 3$
$3x - 7y = 30$

8.- $5x - 7y = -1$
$3x + 4y = 24$

9.- $x - y = 37$
$2x + 3y = 31x + 13y$

10.- $\frac{x + y}{5} = \frac{x - y}{3}$
$x - 4 = 2y$