SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON TRES INCOGNITAS.

LECCIÓN 3.

3-24 INTRODUCCIÓN.

Aproximadamente dos décadas después a la introducción de las computadoras electrónicas, estamos en el comienzo de la revolución tecnológica. Comenzamos a ver la herramienta poderosa que significan estas computadoras de alta velocidad y las máquinas que se utilizan para procesar los datos automáticamente.

Es asombrosa la gran variedad de campos en los cuales se aplican las computadoras, tanto en la ciencia, como en la contabilidad, en la ingeniería, en la medicina, por mencionar unos cuantos. Se usan para controlar el tráfico, para analizar las condiciones del subsuelo, para interpretar cardiogramas, para estudiar la compleja estructura de las moléculas. Las computadoras han hecho posible el control automático de los procesos en la industria del petróleo, acero y textil, entre otras. Sin las computadoras electrónicas, pocas o ninguna de las exploraciones recientes del espacio exterior hubieran sido posibles.

Recientemente, se usaron en el análisis de los esfuerzos en las estructuras de acero de rascacielos de cien pisos de altura. Fue necesario resolver un sistema de 1500 ecuaciones simultáneas, que las computadoras efectuaron en 45 minutos.

3-25 ECUACIONES LINEALES CON TRES INCOGNITAS.

Consideraremos ahora el problema de resolver un sistema de tres ecuaciones lineales en tres incógnitas. Los métodos algebráicos que fueron usados para resolver un sistema de ecuaciones en dos incógnitas servirán de una manera análoga en el presente caso de tres incógnitas.

Un sistema de tres ecuaciones lineales en tres incógnitas tiene una solución, o no tiene solución, o tiene una infinidad de soluciones.

Esta misma situación fue discutida en el caso de dos incógnitas. Pero consideraremos sistemas de tres incógnitas que tienen una y solo una solución.

3-26 METODO DE SUMA Y RESTA.

Para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas se procede de este modo:

1.- Se combinan dos de las ecuaciones dadas y se elimina una de las incógnitas (lo más sencillo es eliminarla por suma y resta) y con ello se obtiene una ecuación con dos incógnitas.

2.- Se combina la tercera ecuación con cualquiera de las otras dos ecuaciones dadas y se elimina entre ellas la misma incógnita que se eliminó antes, obteniéndose otra ecuación con dos incógnitas.

3.- Se resuelve el sistema formado por las dos ecuaciones con dos incógnitas que se ha obtenido, hallando de este modo dos de las incógnitas.

4.- Los valores de las incógnitas obtenidas se sustituyen en una de las ecuaciones dadas originales, con lo cual se halla la tercera incógnita.

5.- Comprobar el conjunto solución en el sistema original.

Ejemplo 1.

Resolver el sistema:

$$x + 4y - z = 6 \qquad (1)$$
$$2x + 5y - 7z = -9 \qquad (2)$$
$$3x - 2y + z = 2 \qquad (3)$$

Solución:

Combinamos las ecuaciones (1) y (2) y vamos a eliminar la x. Multiplicando la ecuación (1) por 2, se tiene:

$$2x + 8y - 2z = 12$$
$$- 2x - 5y + 7z = 9$$

restando: $3y + 5z = 21$; (4)

combinando la tercera ecuación (3) con cualquiera de las otras dos ecuaciones dadas. Vamos a combinarla con (1) para eliminar la x. Multiplicando la ecuación (1) por 3 tenemos:

$$3x + 12y - 3z = 18$$
$$- 3x + 2y - z = -2$$

restando: $14y - 4z = 16$ (5)

dividiento entre 2: $7y - 2z = 8$

Ahora tomamos las dos ecuaciones con dos incógnitas que hemos obtenido (4) y (5), y formamos un sistema:

$$3y + 5z = 21 \qquad (4)$$
$$7y - 2z = 8 \qquad (5)$$

Resolvamos este sistema. Vamos a eliminar la z multiplicando (4) por 2 y (5) por 5:

$$6y + 10z = 42$$
$$35y - 10z = 40$$
$$41y \quad = 82$$
$$y = 2$$

Sustituyendo $y = 2$ en (5) se tiene:

$$7(2) - 2z = 8$$
$$14 - 2z = 8$$
$$-2z = -6$$
$$z = 3$$

Sustituyendo $y=2$, $z=3$, en cualquiera de las tres ecuaciones dadas, por ejemplo en (1), se tiene:

$$x + 4(2) - 3 = 6$$
$$x + 8 - 3 = 6$$
$$x = 1$$

R. $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

Por lo tanto el conjunto solución es: $\{(1,2,3)\}$

Comprobación,

Los valores, $x=1$, $y=2$, $z=3$ tienen que satisfacer las tres ecuaciones dadas. Haga la sustitución y verá que las tres ecuaciones dadas se convierten en identidad.

Ejemplo 2.

Resolver el sistema:

$$2x - 5y = 13 \quad (1)$$
$$4y + z = -8 \quad (2)$$
$$x - y - z = -2 \quad (3)$$

Solución.

En algunos casos, no hay reglas fijas para resolver el sistema y depende de la habilidad del alumno encontrar el modo más expedito de resolverlo. Este ejemplo puede resolverse así:

La ecuación (1) tiene x y y. Entonces tengo que buscar otra ecuación de dos incógnitas que tenga x y y para formar con (1) un sistema de dos ecuaciones que tengan ambas x y y.

Reuniendo (2) y (3):

$$4y + z = -8$$
$$x - y - z = -2$$

sumando: $x + 3y = -10$ (4)

Ya tenemos la ecuación que buscábamos.

Ahora, formamos un sistema con (1) y (4):

$$2x - 5y = 13$$
$$x + 3y = -10$$

Multiplicando esta última ecuación por 2 y restando:

$$2x - 5y = 13$$
$$-2x - 6y = 20$$
$$-11y = 33$$
$$y = -3$$

Sustituyendo $y = -3$ en (1):

$$2x - 5(-3) = 13$$
$$2x + 15 = 13$$
$$2x = -2$$
$$x = -1$$